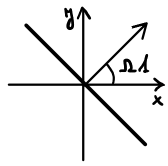
Vazby, Konfigurační prostor a obecné souřadnice

Vazby – jakékoliv podmínky omezující pohyb hm. bodů nebo těles tvořících mechanickou soustavu

- holonomní – vazby které snižují počet stupňů volnosti, lze je zapsat ve tvaru $f_k(\vec{x},t)=0,\ \forall k\in\hat{r}$
- neholonomní – všechny ostatní (např. $g(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)=0,\ |\ddot{\vec{x}}|\le K$)

- skleronomní (stacionární) – nezávislé na čase (např. $f(\vec{x})=0,\quad x^2+y^2+z^2-\ell^2=0$)
- rheonomní (nestacionární) – závislé na čase (např. $g(x,y,t)=x\cos\Omega t+y\sin\Omega t=0$



- udržující (oboustranné) – vyjádřené pomocí rovností $=$
- neudržující (jednostranné) – vyjádřené pomocí nerovností $>,\ \ge$

- ideální – nedochází k disipaci mechanické energie (Virtuální práce vazebných sil je nula)
- neideální – dochází k disipaci energie (např. tření)

Pozn: z řečtiny holos=celý, nomos=zákon, sklérós=pevný, tvrdý, rheó=teče, plyne

Pozn. Holonomní vazba je vždy udržující.

Skrytě holonomní vazby (semiholonomní) – vazby afinní v rychlostech, které lze nahradit holonomními

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i(\vec{x},t)\dot{x}_i+b(\vec{x},t)=0\ \Big/\cdot dt \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\sum_{i=1}^{3N}\underbrace{a_i(\vec{x},t)}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}dx_i+\underbrace{b(\vec{x},t)}_{\frac{\partial f}{\partial t}}dt}^{\omega}=0$$

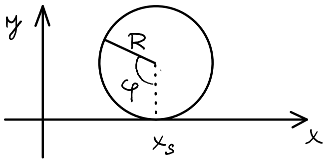
$$\dot{x}_i\,dt=dx_i$$

pokud je tato diferenciální forma exaktní tj. existuje $f=f(\vec{x},t)$, $df=\omega$ pak je vazba skrytě holonomní

Vazba je skrytě holonomní pokud $\exists\mu=\mu(\vec{x},t)\neq 0$ (integrační faktor $\mu\omega=df$) a platí podmínky:

$$\frac{\partial(\mu a_i)}{\partial x_j}=\frac{\partial(\mu a_j)}{\partial x_i}\qquad \frac{\partial(\mu a_i)}{\partial t}=\frac{\partial(\mu b)}{\partial x_i}\qquad \forall i,j\in\widehat{3N}$$

Př. Valení válce bez prokluzování (vzájemná rychlost bodů dotyku je nulová)



$$\dot{x}_s-R\dot{\varphi}=0\ \Big/\int dt \qquad \int\underbrace{\dot{x}_s dt}_{dx_s}-\int R\underbrace{\dot{\varphi}dt}_{d\varphi}=0$$

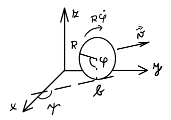
$$dx_s-R\,d\varphi=0$$

$$\boxed{f(x_s,\varphi)=x_s+x_0-R\varphi=0}\quad \text{je holonomní}$$

Př. Valení kotouče po rovině bez prokluzování a naklánění – neholonomní vazby

$$\dot{x}-R\dot{\varphi}\cos\psi=0$$
$$\dot{y}-R\dot{\varphi}\sin\psi=0$$

neexistuje $f(x,y,\varphi,\psi)=0$

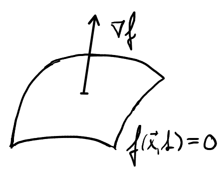


Holonomní soustava – soustava, která je podrobena pouze holonomním nebo semiholonomním vazbám – dále budeme pracovat pouze s holonomními soustavami a zapisovat všechny jejich vazby jako holonomní

Vazbové síly holonomních vazeb (Reakční síly) – nejsou známé předem (narozdíl od akčních sil)

$$\vec{F}^{(vaz)}=\vec{T}+\vec{N}\in\mathbb{R}^{3N}$$ pro jednu vazbu $f(\vec{x},t)=0$

tečná a normálová složka



$$\vec{N}=\lambda\nabla f\qquad N_i=\lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}\quad\forall i\in\widehat{3N}$$

Lagrangeův multiplikátor λ
- určuje velikost vazbové síly
- představuje novou neznámou fci. $\lambda=\lambda(t)=?$ která se objeví v pohybových rovnicích

holonomní vazba
- hladká $\vec{T}=0$ (ideální)
- drsná $\vec{T}\neq 0$ (tření, neideální)

Př. izotropní vlečné tření $\vec{T}=-K|\lambda\nabla f|\dfrac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$

pro $r\in\mathbb{N}$ hladkých holonomních vazeb $f_k(\vec{x},t)=0$ platí $F_i^{(vaz)}=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}$

Pozn. Nebude-li řečeno jinak, pak holonomní vazbu považujeme vždy za hladkou.

Konfigurační prostor (varieta)... množina všech možných konfigurací (poloh všech bodů) soustavy

$$M(t)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^{3N}\mid f_k(\vec{x},t)=0\ \forall k\in\hat{r}\}\subseteq\mathbb{R}^{3N}$$

dimenze $M(t)$ = dimenze tečného prostoru k $M(t)$

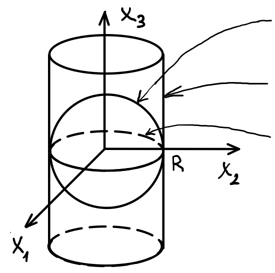
Vazby jsou <u>nezávislé</u>, pokud nelze žádnou z nich vynechat, aniž by se změnil konfigurační prostor.

Pokud je $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_\pi)$ $\forall \vec{x} \in M(t)$, $\forall t$ lineárně nezávislý soubor vektorů, pak jsou vazby $\underbrace{f_k(\vec{x},t)=0 \quad \forall k \in \hat{\pi}}_{\text{"obecné rovnice" konf. prostoru}}$ nezávislé a platí $\dim M(t) = 3N - \pi = s$ (počet stupňů volnosti).

Jsou-li vazby závislé, pak přebytečné vazby vypustíme a zbylých π nezávislých vazeb zapíšeme v takovém tvaru, aby jejich gradienty tvořily lineárně nezávislý soubor tj. aby hodnost matice

$$h\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\pi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_\pi}{\partial x_{3N}} \end{pmatrix} = \pi \quad \forall \vec{x} \in M(t) \ \forall t.$$

Př. bod na povrchu koule a válece



$f_1(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0$

$f_2(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$

M = kružnice s osou z a středem v počátku

popíšeme M pomocí funkcí s LN gradienty

$f_1(\vec{x}) - f_2(\vec{x}) = x_3^2 = 0 \iff \tilde{f}_1(\vec{x}) = x_3 = 0$

$\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$ $\nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ jsou LZ pro $x_3 = 0$

$\nabla \tilde{f}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ jsou LN na M

Obecné souřadnice φ

$s = 3\cdot 1 - 2 = 1$

$x_1 = R\cos\varphi$
$x_2 = R\sin\varphi$
$x_3 = 0$

• soustava N hm. bodů s $\pi \in \mathbb{N}_0$ (nezávislými) holonomními vazbami $f_k(\vec{x},t) = 0$ $\forall k \in \hat{\pi}$ (fce. třídy $C^{(1)}$)

Lagrangeovy rovnice 1. druhu (1775)

$$\boxed{\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_i(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) + \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \\ f_j(\vec{x},t) &= 0 \quad \forall j \in \hat{\pi} \quad \forall i \in \widehat{3N} \end{aligned}} \quad + \underbrace{\sum_{k=1}^{\pi} T_i^{(k)}}_{= 0 \text{ pro hladké vazby}}$$

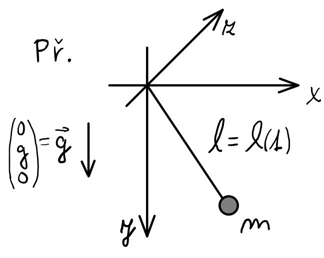
- pro soustavu N hmotných bodů s holonomními vazbami v inerciální vztažné soustavě (kartézské souřadnice) získáme přidáním rovnic vazeb a vazebných sil do původních rovnic
- 3N obyčejných diferenciálních rovnic II. řádu a π algebraických ronice pro $3N+\pi$ neznámých funkcí $x_i(t) = ?$ $i \in \widehat{3N}$, $\lambda_k(t) = ?$ $k \in \hat{\pi}$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \\ f_j(\vec{x},t) &= 0 \quad \forall j \in \hat{\pi} \quad \forall i \in \widehat{3N} \end{aligned}} \quad + \sum_{k=1}^{\pi} T_i^{(k)}$$

Pokud vazby nejsou hladké pak se tečné složky vazebných sil obvykle zahrnou mezi zbylé nepotenciální síly.

Pozn. $L'(\vec{x},\vec{\lambda},\dot{\vec{x}},t) = L + \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k f_k$ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}_k}\right) - \frac{\partial L'}{\partial \lambda_k} = 0$

Př.



$\begin{pmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{g}$

vazby: $f_1(z) = z = 0$

$f_2(x,y) = x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$

$\vec{F}_1^{(vaz)} = \lambda_1 \nabla f_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{F}_2^{(vaz)} = \lambda_2 \nabla f_2 = \lambda_2 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$

$m\ddot{x} = 0 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 + 0 + 2\lambda_2 x$

$m\ddot{y} = mg + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = mg + 0 + 2\lambda_2 y$

$m\ddot{z} = 0 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 + \lambda_1 + 0$

$y\ddot{x} - x\ddot{y} = -xg$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{m\ddot{x}}{2x}$

substituce
$x = l\sin\varphi$
$y = l\cos\varphi$

$2l\dot{l}\dot{\varphi} + l^2\ddot{\varphi} + gl\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi(t)$

Obecné (zobecněné) souřadnice q_j $j \in \hat{s}$ – parametry, které jednoznačně popisují možné konfigurace soustavy (lokální souřadnice na konfigurační varietě)

$\vec{x} = \hat{\vec{x}}(\vec{q},t)$ $\qquad \hat{\vec{x}} : \mathbb{R}^{s+1} \to \mathbb{R}^{3N}$

POZOR $\vec{q} = (q_1, \dots, q_s)$ již není vektor, ale jen uspořádaná s-tice

$x_i = \hat{x}_i(q_1, \dots, q_s, t)$ $\quad i \in \widehat{3N}$ $\quad$ parametrické rovnice konf. prostoru (z věty o implicitní funkci) $\quad h\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right) = s$

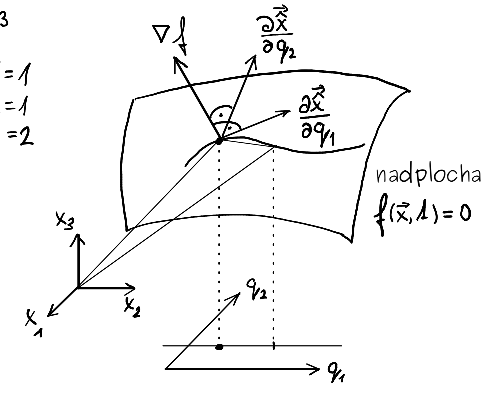
funkce třídy $C^{(2)}$ zvolené tak, aby splnily vazby:

$\hat{f}_k(\vec{q},t) = f_k(\hat{\vec{x}}(\vec{q},t),t) \equiv 0 \quad \forall \vec{q} \ \forall t \quad \forall k \in \hat{\pi}$

$$0 = \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \underbrace{\nabla f_k}_{\text{normálový vektor k nadploše } f_k(\vec{x},t)=0} \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{X}}{\partial q_j}}_{\text{tečný vektor k j-té souřadnicové křivce ležící v nadploše}}$$

skalární součin

Př. $\mathbb{R}^3$
$N = 1$
$\pi = 1$
$s = 2$



Pozn. závislost na čase je dána vývojem vazby, v případě skleronomních vazeb bude $x_i = \hat{x}_i(\vec{q})$ $\forall i \in \widehat{3N}$