Lagrangeovy rovnice 2. druhu (pro holonomní soustavu N hm. bodů s $r \in \mathbb{N}_0$ nezávislými vazbami)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lagr. rce. 1. druhu: } f_k(\vec{x},t)=0 \quad \forall k\in\hat{r} \\ \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{r}\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad \forall i \in \widehat{3N}\end{array}}$$

převedeme do obecných souřadnic $x_i = \hat{x}_i(\vec q, t) \quad \forall i\in\widehat{3N}$

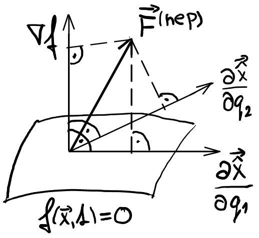
tím splníme rovnice vazeb $\hat f_k(\vec q,t) = f_k(\vec{\hat x}(\vec q,t),t) \equiv 0 \quad \forall k\in\hat r\,\forall\vec q\,\forall t$

Zbylých 3N diferenciálních rovnic vezmeme jako sloupcový vektor a přenásobíme maticí $\mathbb{S}^T$

kde $\mathbb{S} = \left(\underbrace{\frac{\partial\vec x}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial \vec x}{\partial q_s}}, \underbrace{\nabla f_1,\dots,\nabla f_r}\right)$ je regulární matice řádu $3N\times 3N$

báze tečného a normálového prostoru ke konfiguračnímu prostoru $M(t)$

Př. $\mathbb{R}^3$



$$(1)\quad \frac{\partial \hat x_i}{\partial q_j}\left[\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right] = \underbrace{\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}F_i^{(nep)}}_{Q_j^{(nep)}} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial \hat x_i}{\partial q_j}}_{\nabla f_k\cdot\frac{\partial\vec x}{\partial q_j}=0}$$

prvních s rovnic $\forall j\in\hat s \quad \Big/ \sum_{i=1}^{3N}$

$$(2)\quad \frac{\partial f_l}{\partial x_i}\left[\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right] = \frac{\partial f_l}{\partial x_i}F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_l}{\partial x_i}}_{\nabla f_k\cdot\nabla f_l = G_{kl}}$$

dalších r rovnic $\forall l\in\hat r \quad \Big/ \sum_{i=1}^{3N} \quad \Big/ \cdot(\mathbb{G}^{-1})_{lm}$

prvky Gramovy matice souboru $(\nabla f_1,\dots,\nabla f_r)$

$\det\mathbb{G} = \det(G_{kl})\neq 0 \iff$ je LN soubor

$$(\mathbb G^{-1})_{lm}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\left[\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right] - \frac{\partial f_l}{\partial x_i}F_i^{(nep)}\right) = \sum_{k=1}^r \lambda_k G_{kl}(\mathbb G^{-1})_{lm} = \sum_{k=1}^r\lambda_k\delta_{km} = \lambda_m \quad \forall m\in\hat r \quad \Big/ \sum_{i=1}^{3N}$$

Tím je těchto r rovnic vyřešeno. Dále upravíme levou stranu prvních s rovnic. K tomu využijeme:

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{jk} = \frac{\partial\dot q_j}{\partial\dot q_k} \qquad \frac{\partial \dot q_j}{\partial q_k} = 0 = \frac{\partial q_k}{\partial\dot q_j} \qquad x_i = \hat x_i(\vec q,t) \qquad \dot x_i = \dot{\hat x}_i = \frac{\hat d \hat x_i}{dt} = \frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial \hat x_i}{\partial t} \qquad \dot x_i = \dot{\hat x}_i(\vec q,\dot{\vec q},t)$$

obecné souřadnice a rychlosti jsou navzájem nezávislé

1) $\frac{\partial\hat x_i}{\partial\dot q_j}=0$ 2) $\frac{\partial\dot{\hat x}_i}{\partial\dot q_k} = \frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}\frac{\partial\dot q_j}{\partial\dot q_k} + 0 = \frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}\delta_{jk} = \frac{\partial\hat x_i}{\partial q_k}$ "pravidlo krácení teček"

3) $\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2\hat x_i}{\partial q_k\partial q_j}\dot q_k + \frac{\partial^2\hat x_i}{\partial t\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial\hat x_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\hat d\hat x_i}{dt}\right) = \frac{\partial\dot{\hat x}_i}{\partial q_j}$

$$\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}\left[\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right] = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\right)\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j} = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j} =$$

$$= \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\frac{\partial\dot{\hat x}_i}{\partial\dot q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\frac{\partial\dot{\hat x}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j} = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat L}{\partial\dot q_j}\right) - \frac{\partial\hat L}{\partial q_j}$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

$$\boxed{\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat L}{\partial\dot q_j}\right) - \frac{\partial\hat L}{\partial q_j} = Q_j^{(nep)} \quad\forall j\in\hat s}$$

- neobsahují vazbové síly (ideálních holonomích vazeb)
- jejich tvar nezávisí na konkrétní volbě obecných souřadnic
- rovnice pro proměnné $q_i,\dot q_i,\ddot q_i$, dosazením $q_i = \tilde q_i(t)$, $\dot q_i = \dot{\tilde q}_i(t)$, $\ddot q_i = \ddot{\tilde q}_i(t)$ dostaneme obyčejné difr. 2. řádu

Obecná nepotenciální síla

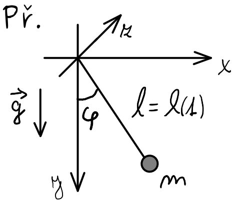
$$Q_j^{(nep)} = \frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}F_i^{(nep)}$$

Lagrangeova funkce (v obecných) - není určena jednoznačně

$$\hat L(\vec q,\dot{\vec q},t) = L\big(\vec{\hat x}(\vec q,t), \dot{\vec{\hat x}}(\vec q,\dot{\vec q},t),t\big) \qquad \hat L' = \hat L + \frac{\hat d}{dt}h(\vec q,t)$$

při $Q_j^{(nep)}=0$ plně charakterizuje holonomní soustavu s ideálníma vazbama

Př.



vazby: $f_1(z) = z = 0$

$f_2(x,y) = x^2+y^2-l^2(t) = 0$

$\boxed{s = 3-2 = 1}$

obecné souřadnice φ

$x = l(t)\sin\varphi$

$y = l(t)\cos\varphi$

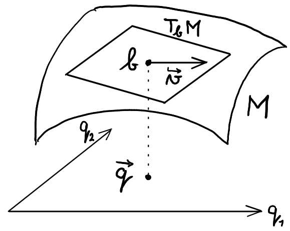
$z = 0$

$L = \frac12 m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) + mgy$

$\hat L = \frac12 m(\dot l^2(t) + l^2(t)\dot\varphi^2) + mgl(t)\cos\varphi$

LR2.D $\quad 0 = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat L}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial\hat L}{\partial\varphi} = \frac{\hat d}{dt}\left(ml^2(t)\dot\varphi\right) - \left(-mgl(t)\sin\varphi\right) = 2ml(t)\dot l(t)\dot\varphi + ml^2(t)\ddot\varphi + mgl(t)\sin\varphi$

Pozorovatelné veličiny (polohy, rychlosti, hybnosti, momenty, síly, energie ...)
jsou funkce $2s+1$ proměnných $\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t$ na tzv.
rozšířeném rychlostním fázovém prostoru $\underbrace{TM}_{\text{tečný bandl}} \times \mathbb{R}$ kde $TM = \bigcup_{b \in M} \underbrace{T_b M}_{\text{tečný prostor k M v bodě b}}$



Kinetická energie v obecných souřadnicích

$$\hat{T}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = T(\dot{\hat{\vec{X}}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{\hat{X}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} \overbrace{m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l}}^{T_{kl}(\vec{q},t)} \dot{q}_k \dot{q}_l +$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}}_{\beta_k(\vec{q},t)}\dot{q}_k + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l}}_{\beta_l(\vec{q},t)}\dot{q}_l + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}}_{\alpha(\vec{q},t)} = \underbrace{\frac{1}{2}T_{kl}(\vec{q},t)\dot{q}_k\dot{q}_l}_{\text{P.D.}} + \beta_k(\vec{q},t)\dot{q}_k + \alpha(\vec{q},t)$$

- pokud jsou všechny vazby skleronomní pak $\hat{T}(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2}T_{kl}(\vec{q})\dot{q}_k\dot{q}_l$ je homogenní stupně 2 v rychlostech

Obecná síla $Q_j = \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} + Q_j^{(nep)}$

Obecná (kanonická) hybnost (nemusí mít rozměr hybnosti) $p_j = p_j(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$

Pozn. LR2D: $\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) = Q_j^{(nep)} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} \iff \dot{p}_j = Q_j$

Př. $L = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 - e(\varphi - \dot{x}_i A_i)$ $\quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j + eA_j \neq m\dot{x}_j$

Obecná energie (má rozměr energie) $E = E(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \hat{L}$

$$E = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \hat{L} = \underbrace{\frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j}_{=2\hat{T}} - \underbrace{\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j}_{=0} - (\hat{T} - \hat{U}) = \hat{T} + \hat{U}$$

Pokud je $\hat{T}$ homogenní fce. 2. stupně v rychlostech $\dot{\vec{q}}$ (všecny vazby jsou skleronomní) a $\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \ \forall j \in \hat{s}$ pak E je celková mechanická energie soustavy.

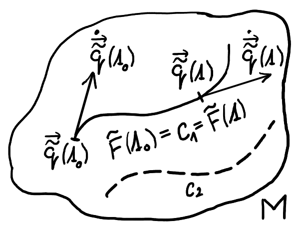
Integrály pohybu (zákony zachování) – jsou 1. integrály pohyb. rovnic, fce. konstantní podél trajektorie

Funkce $F(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ je integrálem pohybu pro systém popsaný pohybovými rovnicemi $\vec{R}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\ddot{\vec{q}},t) = 0$, pokud pro každé jejich řešení $\vec{q} = \vec{q}(t)$ (tzv. trajektorii) $\exists C \in \mathbb{R}$ tak, že $\tilde{F}(t) = F(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) = C \ \forall t$.

Funkce $F = F(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ je I.P. $\iff$ $0 = \left.\frac{\hat{d}F}{dt}\right|_{\vec{R}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\ddot{\vec{q}},t)=0} = \left.\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\right)\right|_{\vec{R}=0}$

$\Rightarrow \ddot{q}_i = G_i(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$

ověřit, že F je I.P. znamená řešit LR2D jako lineární algebraické rovnice pro $\ddot{\vec{q}}$ a toto řešení dosadit do $\frac{\hat{d}F}{dt} = 0$



Dále budeme předpokládat, že na soustavu nepůsobí žádné nepotenciální síly tj. $Q_j^{(nep)} = 0$, pak lze některé integrály pohybu nalézt na základě chybějících proměnných v předpisu Lagrangeovy funkce:

1) čas t $\quad \hat{L} = \hat{L}(\vec{q},\dot{\vec{q}})$ tj. $\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} = 0 \longrightarrow$ obecná energie $E = E(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = konst.$ je I.P.

$$\frac{\hat{d}E}{dt} = \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \hat{L}\right) = \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j - \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial \hat{L}}{\partial t}\right] = \dot{q}_j\underbrace{\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j}\right]}_{\text{LR2D} \ = Q_j^{(nep)}} - \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} = \underbrace{\dot{q}_j Q_j^{(nep)}}_{\text{výkon sil nepotenciálních}} - \underbrace{\frac{\partial \hat{L}}{\partial t}}_{=0} = 0$$

Pozn. Obecná energie holonomní soustavy se skleronomními vazbami a konzervativními silami je konstantní.

2) cyklická souřadnice q_k, $k \in \hat{s}$ tj. $\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_k} = 0 \longrightarrow$ obeacná hybnost $p_k = p_k(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = konst.$ je I.P.

je souřadnice, na které Lagr. fce. $\hat{L}$ nezávisí

$$\frac{\hat{d}}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{p_k} - \underbrace{\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_k}}_{=0} = Q_k^{(nep)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{d}p_k}{dt} = 0 \quad \text{tj.} \quad \dot{p}_k = 0$$

Pozn. 3) $\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_k} = Q_k^{(nep)} = 0$ nenastává