Routhova funkce – vyloučení cyklické souřadnice Q $\qquad \boxed{L,\ s+1,\ \vec q, Q} \to \boxed{R,\ s,\ \vec q}$

nechť $L = L(\vec q, \dot{\vec q}, \dot Q, t)$ $\quad \frac{\partial L}{\partial Q} = 0 \ \Rightarrow\ P = \frac{\partial L}{\partial \dot Q}(\vec q, \dot{\vec q}, \dot Q, t) = \text{konst}$ (rovnice pro Q) $\ \Rightarrow\ \dot Q = \hat{\dot Q}(\vec q, \dot{\vec q}, P, t)$

do zbylých s rovnic $\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ \forall i \in \hat s$ dosadíme za $\dot Q$ a $\ddot Q$ tyto rovnice pro neznámé $\vec q, \dot{\vec q}, \ddot{\vec q}$ lze získat

z Routhovy funkce $R(\vec q, \dot{\vec q}, P, t) = \hat L - P\hat{\dot Q} = L(\vec q, \dot{\vec q}, \hat{\dot Q}(\vec q, \dot{\vec q}, P, t), t) - P\hat{\dot Q}(\vec q, \dot{\vec q}, P, t)$ (někdy $R = P\hat{\dot Q} - \hat L$)

která převezme roli Lagrangeovy funkce pro nový systém o s stupních volnosti

$$\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial \hat L}{\partial \dot q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot Q}}{\partial \dot q_i}\right) - \left(\frac{\partial \hat L}{\partial q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot Q}}{\partial q_i}\right) = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot Q}\frac{\partial \hat{\dot Q}}{\partial \dot q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot Q}}{\partial \dot q_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot Q}\frac{\partial \hat{\dot Q}}{\partial q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot Q}}{\partial q_i}\right) = \left[\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{\dot Q = \hat{\dot Q}(\vec q, \dot{\vec q}, P, t)}$$

Jacobiho princip – pro konzervativní soustavy (skleronomní holonomní vazby a konzervativní síly)

$L(\vec q, \dot{\vec q}) = \frac{1}{2} T_{ij}(\vec q)\dot q_i \dot q_j - U(\vec q)$ $\quad$ T je P.D. kvadratická forma v $\dot{\vec q}$ $\quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k - L = T + U = \text{konst}$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec q(t), \dot{\vec q}(t))\, dt = \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\text{substituce: změna parametrizace}} \\ t = t(\tau) & \vec q(\tau) = \vec q(t(\tau)) \\ dt = t' d\tau & \vec q\,' = \frac{d\vec q}{d\tau} = \dot{\vec q}\, t' \end{array} \right| = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(\vec q, \frac{\vec q\,'}{t'}\right) t'\, d\tau$$

"nový" variační princip pro $s+1$ křivek $\vec q(\tau), t(\tau)$ s funkcí $\hat L(\vec q, \vec q\,', t') = L\left(\vec q, \frac{\vec q\,'}{t'}\right) t'$ kde čas t je cyklickou souřadnicí, kterou vyloučíme pomocí Routhovy funkce

$$p_t = \frac{\partial (L t')}{\partial t'} = \frac{\partial L}{\partial t'} t' + L = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\left(-\frac{q'_k}{t'^2}\right) t' + L = -\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k + L = -p_k \dot q_k + L = -E$$

$$R = L t' - p_t t' = (L - p_t) t' = (L + p_k \dot q_k - L) t' = p_k \dot q_k t' = (L + E) t' = (T - U + T + U) t' = 2T t'$$

$$S_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} R\, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} p_k \dot q_k t'\, d\tau = \int_{\vec Q_1}^{\vec Q_2} p_k\, dq_k = \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2T t'\, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2T}\sqrt{2T}\, t'\, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - U(\vec q))}\sqrt{T_{ij}(\vec q)\dot q_i \dot q_j}\, t'\, d\tau =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - U(\vec q))}\sqrt{T_{ij}(\vec q)\dot q_i t' \dot q_j t'}\, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \underbrace{\sqrt{2(E - U(\vec q))}\sqrt{T_{ij}(\vec q) q'_i q'_j}}_{F(\vec q, \vec q\,')}\, d\tau \underset{q'_i d\tau = dq_i}{=} \int_{\vec Q_1}^{\vec Q_2} \sqrt{2(E - U(\vec q))}\, \underbrace{\sqrt{T_{ij}(\vec q)\, dq_i\, dq_j}}_{\substack{\text{element délky } dl^T \text{ v konf. pr.} \\ \text{s metrickým tenzorem } T_{ij}(\vec q)}}$$

Jacobiho princip: Konzervativní soustava se mezi konfiguracemi $\vec Q_1, \vec Q_2$ pohybuje po křivce na které zkrácená akce

$$S_0[\vec q(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - U(\vec q))}\sqrt{T_{ij}(\vec q) q'_i q'_j}\, d\tau = \int_{\vec Q_1}^{\vec Q_2} \sqrt{2(E - U(\vec q))}\, dl^T$$

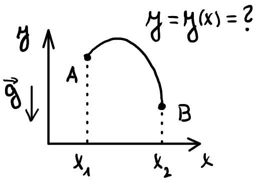
nabývá stacionární hodnoty vzhledem k variacím s pevnými konci $\delta \vec q(\tau_{1,2}) = 0$.

Pozn. z Eulerových rovnic $\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial q'_j}\right) = 0 \ \forall j \in \hat s \ \Rightarrow\ \vec q = \vec q(\tau)$ získáme pouze tvar trajektorie (τ není čas)

časovou parametrizaci trajektorie lze získat pomocí integrálu pohybu $E = T + U \ \Rightarrow\ 1 = \sqrt{\frac{2T}{2(E - U)}}$

$$t = \int_0^t 1\, d\tilde t = \int_0^t \sqrt{\frac{T_{ij}(\vec q)\dot q_i \dot q_j}{2(E - U(\vec q))}}\, d\tilde t = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\frac{T_{ij}(\vec q) q'_i q'_j}{2(E - U(\vec q))}}\, d\tau$$

Př. tvar trajektorie šikmého vrhu $L = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) - mgy$ $\quad U = mgy$ $\quad T = \frac{1}{2}(\dot x, \dot y)\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix}$ $\quad E = T + U = \text{konst}$



$$S_0 = \int_A^B \sqrt{2(E - mgy)}\sqrt{m(dx)^2 + m(dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2(E - mgy)}\sqrt{m(1 + y'^2)}\, dx = \underbrace{\sqrt{2g}\, m}_{\text{konst.}} \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{\frac{E}{mg} - y}\sqrt{1 + y'^2}}_{F(y, y')}\, dx$$

parametrizace $y = y(x)$ $\quad dy = y' dx$
(tj. $\tau = x$)

Eulerova rce. $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ protože $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ přejde na

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}}_{=C_1}\Big) = \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial x} - \left(y''\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) = y'\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] = 0$$

$C_1 = F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}$ $\qquad K = \frac{E}{mg}$

$C_1 = \sqrt{K - y}\sqrt{1 + y'^2} - y'\sqrt{K - y}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$

$C_1 = \frac{\sqrt{K - y}}{\sqrt{1 + y'^2}} \ \Rightarrow\ y' = \frac{1}{C_1}\sqrt{K - y - C_1^2} \ \Rightarrow\ \int \frac{1}{C_1}dx = \int \frac{y' dx}{\sqrt{K - y - C_1^2}} \ \Rightarrow\ \frac{x}{C_1} = -2\sqrt{K - y - C_1^2} + \frac{C_2}{C_1} \ \Rightarrow\ (x - C_2)^2 = 4C_1^2\left(\frac{E}{mg} - C_1^2 - y\right)$

Řešitelné modely mechaniky

Pokud síly kterými na sebe tyto body působí nezávisí na rychlostech, pak z omezení daných Galileiho principem relativity plyne, že tyto síly jsou konzervativní.

1) Problém dvou těles – izolovaná soustava dvou hmotných bodů

Izolovanou soustavu dvou těles jejichž vzájemné silové působení nezávisí na rychlostech a splňuje 3. Newtonův zákon můžeme popsat Lagrangeovou funkcí:

$$L(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dot{\vec{x}}_1,\dot{\vec{x}}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{x}}_2^2 - U(|\vec{x}_1-\vec{x}_2|)$$

Integrály pohybu

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{x}}_2^2 + U(|\vec{x}_1-\vec{x}_2|)$$

$$\vec{P} = (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)^{\cdot} = M\dot{\vec{R}}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2}{m_1+m_2} \qquad M = m_1+m_2$$

$$\dot{\vec{R}} = \frac{\vec{P}}{M} = \text{konst} \quad \Big/ \int dt \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \frac{\vec{P}}{M}t + \vec{R}_0$$

symetrie
Teorém
Noetherové

$$i=1,2 \qquad \vec{x}_i' = \vec{x}_i + \varepsilon\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m_1\dot{\vec{x}}_1 + m_2\dot{\vec{x}}_2$$

$$\vec{x}_i' = \mathbb{S}(\varepsilon)\vec{x}_i \Rightarrow \vec{L} = \vec{x}_1\times m_1\dot{\vec{x}}_1 + \vec{x}_2\times m_2\dot{\vec{x}}_2$$

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 - \vec{P}t\right)$$

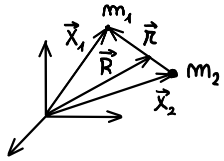
rovnoměrný přímočarý pohyb hmotného středu

Celkem 10 nezávislých integrálů pohybu

Přejdeme k souřadnicím $\vec{x}_1,\vec{x}_2 \longrightarrow \vec{R},\vec{r}$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2}{m_1+m_2} \qquad \vec{x}_1 = \vec{R} + \frac{m_2\vec{r}}{M}$$

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \qquad \vec{x}_2 = \vec{R} - \frac{m_1\vec{r}}{M}$$



$$\hat{L}(\vec{R},\vec{r},\dot{\vec{R}},\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 - U(|\vec{r}|) = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_1m_2}{M}}_{\mu}\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

redukovaná hmotnost μ

Pohybové rovnice

$$M\ddot{\vec{R}} = 0$$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

Cyklické souřadnice $\vec{R}$ $\qquad \vec{P} = \dfrac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\vec{R}}} = M\dot{\vec{R}}$

Routhova funkce

$$\tilde{L} = \hat{L} - \dot{\vec{R}}\cdot\vec{P} = \frac{1}{2}\frac{\vec{P}^2}{M} + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|) - \frac{\vec{P}^2}{M} = \overbrace{-\frac{1}{2}\frac{\vec{P}^2}{M}}^{\text{Konstanta (lze vypustit)}} + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

2) Pohyb částice ve sféricky symetrickém potenciálovém poli

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

Integrály pohybu $\quad \dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \dfrac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + U(|\vec{r}|)$

$$\underbrace{\vec{r}' = \mathbb{S}(\varepsilon)\vec{r}}_{\in SO(3)} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r}\times\mu\dot{\vec{r}} = \text{konst}$$

$$\Downarrow \quad \vec{r}\cdot\vec{L} = r_iL_i = 0$$

pohyb probíhá v rovině jdoucí počátkem a kolmé k $\vec{L}$

přejdeme k sférickým souřadnicím pro které osa z míří ve směru $\vec{L}$ pak $\Theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \dot{\Theta} = 0$

$$\hat{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2 + r^2\sin^2\Theta\,\dot{\varphi}^2\right) - U(r) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r)$$

Cyklická souřadnice φ

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2\dot{\varphi} = L_3 = l = \text{konst} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2} \qquad \varphi(t) = \int \frac{l}{\mu r^2}dt + \varphi_0$$

Routhova funkce

$$\tilde{L} = \hat{L} - \dot{\varphi}p_\varphi = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\frac{l^2}{\mu^2r^4}\right) - U(r) - \frac{l^2}{\mu r^2} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \frac{l^2}{2\mu r^2} - U(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U_{ef}(r)$$

Efektivní potenciál

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

3) Pohyb konzervativní soustavy s jedním stupněm volnosti

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}T(q)\dot{q}^2 - U(q)$$

Integrál pohybu $\quad \dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = T + U = \dfrac{1}{2}T(q)\dot{q}^2 + U(q) = \text{konst}$

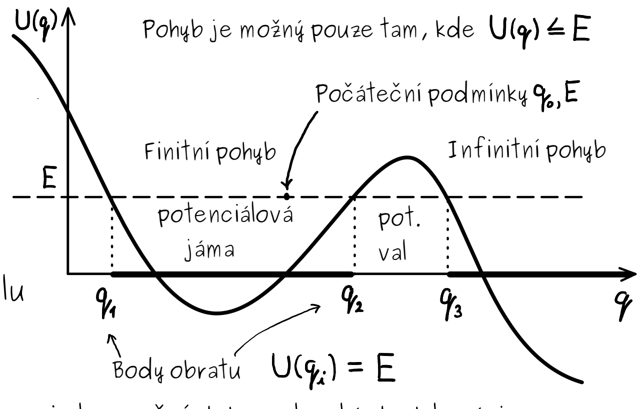
$$\dot{q}^2 = \frac{2(E-U(q))}{T(q)} \Rightarrow \dot{q} = \pm\sqrt{\frac{2(E-U(q))}{T(q)}}$$

znaménko určuje směr pohybu

$$\pm 1 = \sqrt{\frac{T(q)}{2(E-U(q))}}\,\dot{q} \quad \Big/ \int dt$$

$$\pm t = \int\sqrt{\frac{T(q)}{2(E-U(q))}}\,dq + t_0$$

řešení zapsané pomocí integrálu tzv. řešení v kvadraturách



Pozn. řešení původního problému dvou těles závisí celkem na 12 integračních konstantách, které jsme použili v tomto pořadí $\vec{P},\vec{R}_0;\ \vec{L}\leftrightarrow(\Theta,\dot{\Theta},l),\varphi_0;\ E,t_0$