Kanonické transformace

Př. $H = H(\vec{p}, t)$ $\quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i(t) = \alpha_i$ Konst.
$\forall i \in \hat{s}$ $\quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \omega_i(\vec{\alpha}, t) \Rightarrow q_i(t) = \int \omega_i(\vec{\alpha}, t)\, dt + q_{0i}$

Pokud najdeme transformaci na Γ která zachová tvar Hamiltonových rovnic a převede H na fci. nezávisející na $\vec{q}$ je úloha vyřešena v kvadraturách.

Pozn. Bodové transformace $q_j = q_j(\vec{Q}, t)$ $\forall j \in \hat{s}$ konfiguračního pr. automaticky zachovávají tvar LR2D.

Hledáme transformace fázového prostoru Γ, které zachovávají tvar Hamiltonových rovnic

(1) $q_i = q_i(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ $\quad \forall i \in \hat{s}$ třídy C^2

$p_i = p_i(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ invertibilní $\left|\frac{\partial(\vec{q}, \vec{p})}{\partial(\vec{Q}, \vec{P})}\right| \neq 0$
Jacobián

tak, aby $\forall H = H(\vec{q}, \vec{p}, t) \in C^2(\Gamma \times \mathbb{R})$ $\exists K = K(\vec{Q}, \vec{P}, t) \in C^2(\Gamma \times \mathbb{R})$ tak, že $\forall (\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ na Γ platí

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \iff \dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j}$$

Hamiltonovy rovnice lze odvodit z modifikovaného Hamiltonova principu

$$\delta S_1 = \delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{(p_i \dot{q}_i - H)}_{f(\vec{q}, \vec{p}, \dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}}, t)} dt = 0 \qquad \delta\vec{q}(t_{1,2}) = 0 = \delta\vec{p}(t_{1,2})$$

$\delta\vec{q}, \delta\vec{p}$ nezávislé

$$\delta S_2 = \delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{(P_j \dot{Q}_j - K)}_{g(\vec{Q}, \vec{P}, \dot{\vec{Q}}, \dot{\vec{P}}, t)} dt = 0 \qquad \delta\vec{Q}(t_{1,2}) = 0 = \delta\vec{P}(t_{1,2})$$

$\delta\vec{Q}, \delta\vec{P}$ nezávislé

oba funkcionály jsou definovány na stejném prostoru křivek a mají-li popisovat stejnou úlohu, musí nabývat stacionární hodnoty na stejných křivkách (pouze popsaných jinými souřadnicemi) to nastává v případech:

a) $S_2 = \lambda \cdot S_1$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ $\quad (P_j \dot{Q}_j - K) = \lambda(p_i \dot{q}_i - H)$

Škálování $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ $\quad Q_j = \mu q_j$, $\quad P_j = \nu p_j$

$P_j \dot{Q}_j - K = \mu\nu p_j \dot{q}_j - K = \lambda(p_i \dot{q}_i - H)$ $\quad \Rightarrow \lambda = \mu\nu \;\wedge\; K = \mu\nu H$

b) $S_1 = S_2 + C$ $\quad C \in \mathbb{R}$ $\quad$ (Vytvořující funkce) $\exists F = F(\vec{Q}, \vec{P}, t) \in C^{(2)}(\Gamma \times \mathbb{R})$ $\quad p_i \dot{q}_i - H = P_j \dot{Q}_j - K + \frac{\hat{d} F(\vec{Q}, \vec{P}, t)}{dt}$

Transformace (1) pro kterou $\exists F = F(\vec{Q}, \vec{P}, t) \in C^{(2)}(\Gamma \times \mathbb{R})$ a $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall H \in C^{(2)}(\Gamma \times \mathbb{R})$ $\exists K \in C^{(2)}(\Gamma \times \mathbb{R})$ splňující $\lambda(p_i \dot{q}_i - H) = P_j \dot{Q}_j - K + \frac{\hat{d} F}{dt}$ se nazývá

1. <u>kanonická</u>, pokud $\lambda = 1$
2. rozšířená kanonická, pokud $\lambda \neq 0, 1$ (lze získat jako 1. + škálování)
3. užší kanonická, pokud $\lambda = 1$ $\quad \frac{\partial Q_j}{\partial t} = 0 = \frac{\partial P_j}{\partial t}$ (bezčasová)

$$dF(\vec{Q}, \vec{P}, t) = p_i\, dq_i - P_j\, dQ_j + (K - H)\, dt$$

představuje rovnost dvou diferenciálních forem zapsaných v různých proměnných
upravíme buď levou (=>vytvořující fce.) nebo pravou stranu (=>kriteria kanoničnosti)

<u>Vytvořující funkce kanonické transformace</u> – je funkce vytvořená z F přepisem (nebo Legendreovou tr.) do takové sady proměnných, kdy $\forall j \in \hat{s}$ je vždy jedna z páru kanonicky sdružených prměnných Q_j, P_j ponechána velká (nová) a druhá převedena na malou (starou). Čtyři základní druhy vytvořujících fcí:

$$\begin{array}{ccc} ② & & ① \\ & \left|\begin{array}{c:c} \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{Q}} & \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{P}} \\ \hdashline \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{Q}} & \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{P}} \end{array}\right| \neq 0 & \\ ④ & & ③ \end{array}$$

① Vytvořující fce. 1. druhu $\quad F_1 = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) = F(\vec{Q}, \hat{\vec{P}}, t)$ $\quad$ kde $\hat{\vec{P}} = \hat{\vec{P}}(\vec{q}, \vec{Q}, t) \Leftarrow \left|\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{P}}\right| \neq 0$

$$dF_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) = p_i\, dq_i - P_j\, dQ_j + (K - H)\, dt = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

$$\begin{array}{ccc} ③ & & ① \\ & \left|\begin{array}{c:c} \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{q}} & \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{p}} \\ \hdashline \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{q}} & \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{p}} \end{array}\right| \neq 0 & \\ ④ & & ② \end{array}$$

$\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i \quad \forall i \in \hat{s}$ $\qquad \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -P_j \quad \forall j \in \hat{s}$

$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$ $\quad$ transformace Hamiltoniánu

hledáme-li transformaci danou fcí. F_1 představují tyto vztahy definice $\vec{p}$ a $\vec{P}$
hledáme-li vytvořující fci. pro danou transformaci, je třeba zapsat $\vec{p}, \vec{P}$ jako fce. $\vec{q}, \vec{Q}$ a řešit parciální dif. rce.

② $F_2 = F_2(\vec{q}, \vec{P}, t) = F(\hat{\vec{Q}}, \vec{P}, t) + P_j \cdot \hat{Q}_j = F_1 + P_j \cdot \hat{Q}_j$ $\quad \hat{\vec{Q}} = \hat{\vec{Q}}(\vec{q}, \vec{P}, t) \Leftarrow \left|\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{Q}}\right| \neq 0$ $\quad \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i$ $\quad \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = Q_j$ $\quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$

$dF = d(F_2 - P_j Q_j) = p_i\, dq_i - P_j\, dQ_j + (K - H)\, dt \Rightarrow dF_2(\vec{q}, \vec{P}, t) = p_i\, dq_i + Q_j\, dP_j + (K - H)\, dt$ $\quad$ Legendreova tr. fce. F_1

③ $F_3(\vec{p}, \vec{Q}, t) = F_1 - p_i q_i$ $\quad \frac{\partial F_3}{\partial p_i} = -q_i$ $\quad \frac{\partial F_3}{\partial Q_j} = -P_j$

④ $F_4(\vec{p}, \vec{P}, t) = F_1 - p_i q_i + P_j Q_j$ $\quad \frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q_i$ $\quad \frac{\partial F_4}{\partial P_j} = Q_j$

Kriteria kanoničnosti – nutné a postačující podmínky pro kanoničnost transformace: $q_i = q_i(\vec{Q},\vec{P},\lambda)$, $p_i = p_i(\vec{Q},\vec{P},\lambda)$

$$dF(\vec{Q},\vec{P},\lambda) = p_i\,dq_i - P_j\,dQ_j + (K-H)\,d\lambda = \underbrace{\left(p_i\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - P_j\right)}_{\frac{\partial F}{\partial Q_j}} dQ_j + \underbrace{p_i\frac{\partial q_i}{\partial P_j}}_{\frac{\partial F}{\partial P_j}} dP_j + \underbrace{\left(K-H+p_i\frac{\partial q_i}{\partial \lambda}\right)}_{\frac{\partial F}{\partial \lambda}} d\lambda$$

$$dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}dQ_j + \frac{\partial q_i}{\partial P_j}dP_j + \frac{\partial q_i}{\partial \lambda}d\lambda$$

pokud má F existovat musí být tato diferenciální forma uzavřená

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Q_k \partial Q_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q_j \partial Q_k} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial Q_k}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + p_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_k\partial Q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial Q_k} = \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + p_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_j\partial Q_k} - \frac{\partial P_k}{\partial Q_j} \qquad 0 = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\frac{\partial p_i}{\partial Q_k} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = [Q_j, Q_k]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial P_k \partial P_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial P_j \partial P_k} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_k}\frac{\partial q_i}{\partial P_j} + p_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial P_k\partial P_j} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} + p_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial P_j\partial P_k} \qquad 0 = \frac{\partial q_i}{\partial P_j}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial P_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} = [P_j, P_k]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial P_k \partial Q_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q_j \partial P_k} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_k}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + p_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial P_k\partial Q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial P_k} = \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} + p_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_j\partial P_k} \qquad \delta_{jk} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} = [Q_j, P_k]$$

zbylé podmínky jsou definičními vztahy pro fci. K a na transformaci již nekladou zádná další omezení

(I.) $[Q_j, P_k] = \delta_{jk} \quad \forall j,k \in \hat{s}$

$[Q_j, Q_k] = 0 = [P_j, P_k]$

Lagrangeovy závorky – definované pro souřadnice fázového prostoru

$$[Q_j, P_k]_{(q,p)} = \sum_{i=1}^{\hat{s}}\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k}\right)$$

indexem u závorek jsou někdy značeny funkce které se v nich derivují

Pozn. $[Q_j, P_k]_{(Q,P)} = \frac{\partial Q_i}{\partial Q_j}\frac{\partial P_i}{\partial P_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial P_k}\frac{\partial P_i}{\partial Q_j} = \delta_{ij}\delta_{ik} - 0 = \delta_{jk} = [Q_j, P_k]_{(q,p)}$

Lagrangeovy závorky jsou invariantní při kanonické tr.

Jednotné souřadnice fázového prostoru Γ – zjednoduší zápis, reflektují rovnocennost $\vec{q}$ a $\vec{p}$

$$r_i = q_i, \quad r_{s+i} = p_i \quad \forall i \in \hat{s} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix}\vec{q}\\ \vec{p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \\ p_1 \\ \vdots \\ p_s\end{pmatrix}$$

Hamiltonovy rovnice $\quad \dot{r}_i = J_{ik}\frac{\partial H}{\partial r_k} \quad \forall i \in \widehat{2s} \qquad \dot{\vec{r}} = \mathbb{J}\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}\right)^T$

Poissonovy závorky $\quad \{F,G\}_r = \frac{\partial F}{\partial r_i} J_{ik}\frac{\partial G}{\partial r_k} = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{r}}\right)\mathbb{J}\left(\frac{\partial G}{\partial \vec{r}}\right)^T$

Lagrangeovy závorky $\quad [F,G]_r = \frac{\partial r_i}{\partial F} J_{ik}\frac{\partial r_k}{\partial G} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial F}\right)^T\mathbb{J}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial G}\right)$

(symplektická) matice řádu $2s \times 2s$

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_s \\ -\mathbb{1}_s & 0\end{pmatrix} \in SO(2s) \qquad \mathbb{J}^{-1} = \mathbb{J}^T = -\mathbb{J} \qquad \mathbb{J}^2 = -\mathbb{1}_{2s} \qquad \det\mathbb{J} = 1$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{r}}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial r_{2s}}\right) \qquad \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial F}\right) = \begin{pmatrix}\frac{\partial r_1}{\partial F} \\ \vdots \\ \frac{\partial r_{2s}}{\partial F}\end{pmatrix}$$

Transf. (1) $r_j = r_j(\vec{Z},\lambda)$ třídy C^2 $\forall j \in \widehat{2s}$ $\quad \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right| = \left|\left(\frac{\partial r_j}{\partial Z_k}\right)\right| \neq 0$ je kanonická $\Leftrightarrow$

(I) $$J_{ik} = [Z_i, Z_k]_r = \frac{\partial r_m}{\partial Z_i}J_{ml}\frac{\partial r_l}{\partial Z_k} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)_{mi} J_{ml}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)_{lk} = \left(\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)^T \mathbb{J}\underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)}_{\mathbb{A}}\right)_{ik} \Leftrightarrow \begin{matrix}[Q_j, P_k] = \delta_{jk} \quad \forall j,k\in\hat{s} \quad \Big/ \cdot\left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right) \\ [Q_j, Q_k] = 0 = [P_j, P_k]\end{matrix}$$

$\forall i,k \in \widehat{2s}$

(II) $$J_{ik} = \{Z_i, Z_k\}_r = \frac{\partial Z_i}{\partial r_m}J_{ml}\frac{\partial Z_k}{\partial r_l} = \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)_{im} J_{ml}\left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)_{kl} = \left(\overbrace{\left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)}^{\mathbb{A}^{-1}} \mathbb{J}\left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)^T\right)_{ik} \Leftrightarrow \begin{matrix}\{Q_j, P_k\} = \delta_{jk} \quad \forall j,k\in\hat{s} \\ \{Q_j, Q_k\} = 0 \quad \{P_j, P_k\} = 0\end{matrix}$$

(III.) Přímé (symplektické) podmínky

symplektický – z řečtiny sym+plektikos = spletený dohromady (Weyl 1939)

$$\mathbb{J}\underbrace{\left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)}_{\mathbb{A}^{-1}} = \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)^T}_{\mathbb{A}^T}\mathbb{J} \qquad J_{il}\frac{\partial Z_l}{\partial r_k} = \frac{\partial r_l}{\partial Z_i}J_{lk} \quad \forall i,k \in \widehat{2s}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{q}} & \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{p}} \\ -\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{q}} & -\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{p}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{Q}}\right)^T & \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{Q}}\right)^T \\ -\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{P}}\right)^T & \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{P}}\right)^T\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\frac{\partial P_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial P_i} & -\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial P_i}\end{matrix}} \quad \forall i,j \in \hat{s}$$

Pro časově nezávislou transformaci lze tyto podmínky odvodit i přímým výpočtem derivací složených funkcí z Hamiltonových rovnic.

Podobné (avšak pouze postačující) podmínky lze odvodit i z uzavřenosti forem dF_i, rozdíl je ve funkcích které zde vystupují. Např. pro $dF_1(\vec{q},\vec{Q})$

$$\frac{\partial \hat{P}_i(\vec{q},\vec{Q})}{\partial q_j} = -\frac{\partial \hat{p}_j(\vec{q},\vec{Q})}{\partial Q_i} \quad \text{vs.} \quad \frac{\partial P_i(\vec{q},\vec{p})}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j(\vec{Q},\vec{P})}{\partial Q_i}\bigg|_{\vec{Q}(\vec{q},\vec{p}),\vec{P}(\vec{q},\vec{p})}$$

Dk. $$\underset{\text{I}}{\mathbb{J} = \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A}} \Leftrightarrow \underset{\text{III}}{\mathbb{J}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T\mathbb{J}} \Leftrightarrow \mathbb{J}^2\mathbb{A}^{-1}\mathbb{J} = \mathbb{J}\mathbb{A}^T\mathbb{J}^2 \Leftrightarrow \mathbb{A}^{-1}\mathbb{J} = \mathbb{J}\mathbb{A}^T \Leftrightarrow \underset{\text{II}}{\mathbb{A}^{-1}\mathbb{J}(\mathbb{A}^{-1})^T = \mathbb{J}} \Leftrightarrow \mathbb{J} = \mathbb{A}\mathbb{J}\mathbb{A}^T$$