Věta: Pro každou kanonickou transformaci platí $\overline{\{F,G\}_{(q,p)}} = \{\bar F, \bar G\}_{(Q,P)}$ Poissonovy závorky jsou invariantní při kanonické tr.

pruh označuje fce. vyjádřené ve velkých proměnných $\bar F(\vec Z, t) = F(\vec x(\vec Z,t),t)$

Dk. $$\overline{\{F,G\}_x} = \overline{\frac{\partial F}{\partial x_i}} J_{ik} \overline{\frac{\partial G}{\partial x_k}} = \frac{\partial \bar F}{\partial Z_l}\overline{\frac{\partial Z_l}{\partial x_i}} J_{ik} \overline{\frac{\partial Z_m}{\partial x_k}}\frac{\partial \bar G}{\partial Z_m} = \frac{\partial \bar F}{\partial Z_l}\overline{\{Z_l, Z_m\}_x}\frac{\partial \bar G}{\partial Z_m} = \frac{\partial \bar F}{\partial Z_l} J_{lm}\frac{\partial \bar G}{\partial Z_m} = \{\bar F, \bar G\}_Z$$

Matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2s,2s}$ se nazývá <u>symplektická</u> $\iff \mathbb{A}^T \mathbb{J} = \mathbb{J}\mathbb{A}^{-1} \iff \mathbb{J} = \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A} \iff \mathbb{J} = \mathbb{A}\mathbb{J}\mathbb{A}^T \iff \mathbb{A}^{-1}\mathbb{J} = \mathbb{J}\mathbb{A}^T$

Kriteria lze shrnout do věty: **Transformace (1) je kanonická $\iff$ její Jacobiho matice je symplektická.**

<u>Kanonické transformace tvoří grupu</u> – tr. souřadnic (třídy $C^{(2)}$) na fázovém prostoru Γ tvoří grupu

- identická transformace je kanonická $\vec x = \vec Z$ $\left(\frac{\partial \vec x}{\partial \vec Z}\right) = \mathbb{1}$ $\mathbb{1}^T \mathbb{J} \mathbb{1} = \mathbb{J}$
- inverzní tr. ke kanonické tr. je kanonická $\mathbb{A} = \left(\frac{\partial \vec x}{\partial \vec Z}\right)$ $\mathbb{A}^{-1} = \left(\frac{\partial \vec Z}{\partial \vec x}\right)$ $\mathbb{J} = \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A} \Rightarrow \underbrace{(\mathbb{A}^T)^{-1}}_{(\mathbb{A}^{-1})^T}\mathbb{J}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{J}$
- složení kanonických tr. je kanonická tr. $\vec x = \vec x(\vec Z, t)$ $\vec Y = \vec Y(\vec x, t)$ $\mathbb{B} = \left(\frac{\partial \vec Y}{\partial \vec x}\right)$ $\left(\frac{\partial \vec Y}{\partial \vec Z}\right) = \left(\frac{\partial \vec Y}{\partial \vec x}\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec x}{\partial \vec Z}\right) = \mathbb{B}\cdot\mathbb{A}$

Lze to dokázat i pomocí vytvořujících funkcí, ty se při skládání transformací sčítají.

$$(\mathbb{B}\mathbb{A})^T\mathbb{J}(\mathbb{B}\mathbb{A}) = \mathbb{A}^T\underbrace{(\mathbb{B}^T\mathbb{J}\mathbb{B})}_{\mathbb{J}}\mathbb{A} = \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A} = \mathbb{J}$$

$\Rightarrow$ symplektické matice tedy tvoří grupu tzv. <u>Symplektická grupa</u> $Sp(2s,\mathbb{R}) = \{\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2s,2s} \mid \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A} = \mathbb{J}\}$

Tvrzení: Determinant libovolné symplektické matice je roven jedné tj. $\forall \mathbb{A} \in Sp(2s,\mathbb{R})$ $\det \mathbb{A} = 1$

Dk. Pfaffián definovaný pro $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2s,2s}$, $\mathbb{A}^T = -\mathbb{A}$ $\mathrm{pf}(\mathbb{A}) = \frac{1}{2^s s!}\sum_{\pi \in S_{2s}} \operatorname{sgn}\pi\, A_{\pi(1),\pi(2)} \dots A_{\pi(2s-1),\pi(2s)}$ $\mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0\end{pmatrix} = a$
má vlastnosti

$$\det \mathbb{A} = (\mathrm{pf}\,\mathbb{A})^2 \qquad \forall \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{2s,2s}\ \mathrm{pf}(\mathbb{B}^T\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det\mathbb{B}\,\mathrm{pf}\,\mathbb{A} \qquad \mathrm{pf}\,\mathbb{J} = \mathrm{pf}(\mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A}) = \det\mathbb{A}\,\mathrm{pf}\,\mathbb{J} \Rightarrow \det\mathbb{A} = 1$$

Pozn. Kriteria kanoničnosti nekladou žádné podmínky na funkce K, H (kanoničnost tr. nezávisí na konkrétní fyzikální úloze) ani na časový průběh transformace. Proto lze čas považovat za nezávislý parametr a na časově závislou tr. nahlížet jako na jednoparametrickou množinu po sobě jdoucích časově nezávislých transformací. Kanoničnost transformace znamená zachování symplektické formy.

Symplektický vektorový prostor (V,ω) je vektorový prostor V nad $\mathbb{R}$ vybavený symplektickou formou ω

Symplektická forma ω na V je zobrazení $\omega: V\times V \to \mathbb{R}$, které je současně

- bilineární $\omega(x,y) = \omega(x^i e_i, y^j e_j) = x^i y^j \omega(e_i,e_j) = x^i y^j \omega_{ij} = \vec x^T \omega \vec y$ ($\dim V = n$ a $(e_1,\dots,e_n)$ báze V)
- antisymetrické $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$ $\forall x,y \in V$
- nedegenerované $(\omega(x,y) = 0\ \forall y \in V) \Rightarrow x = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\omega^T = -\omega \\ \det(\omega) \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \dim V = 2s$$

dimenze symplektického pr. je vždy sudá

Pozn. Ve V exituje tzv. symplektická báze ve které je $\omega = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1}_s \\ \hline -\mathbb{1}_s & 0\end{array}\right) = \mathbb{J}$

Automorfizmy (symetrie) prostoru (V,ω) jsou lineární bijekce $A: V \to V$ zachovávající formu ω
tj. $\omega(Ax,Ay) = \omega(x,y)$ $\forall x,y \in V$ v bázi V $(\mathbb{A}\vec x)^T\omega\mathbb{A}\vec y = \vec x^T\mathbb{A}^T\omega\mathbb{A}\vec y = \vec x^T\omega\vec y$ $\forall \vec x,\vec y \in \mathbb{R}^n$

Pozn. Nedegenerovanou bilineární formu lze využít k ztotožnění vek. pr. V a jeho duálu V^*

$\forall \alpha \in V^*\ \exists_1 v \in V\ \forall u \in V$ $\alpha(u) = \omega(u,v)$ zobrazení $b_\omega(v) = \omega(.,v)$ je izomorsizmus V na V^*

Hamilton–Jacobiho rovnice (HJR)

Hledáme vytvořující funkci kanonické tr. 2. druhu $F_2(\vec{q},\vec{P},t)$ která převede zadaný hamiltonián H na co nejjednodušší tvar tj. řeší rovnici $K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$ kde je dosazeno $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ do fce. $H(\vec{q},\vec{p},t)$.

Což je parciání diferenciání rovnice určující jak F_2 závisí na $\vec{q}$ a t. Pak

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j} = 0 \Rightarrow Q_j = \text{Konst.}$$

$$\dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow P_j = \text{Konst.}$$

Hledaná časově závislá transformace představuje přechod $(\vec{q},\vec{p}) \xrightarrow{F_2} (\vec{Q},\vec{P})$ do souřadnic, ve kterých je systém v klidu.

Pozn. Lze hledat i vytvořující funkce jiných druhů např. $F_3(\vec{p},\vec{Q},t)$ – pak dosazujeme do H za $q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$

Hamilton–Jacobiho rovnice

$$\boxed{H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

je parciální diferenciální rovnice 1. řádu pro neznámou funkci S závisející na $s+1$ navzájem nezávislých proměnných $\vec{q}, t$.

Její řešení (úplný integrál HJR) závisí na $s+1$ integračních konstantách.

Neboť S vystupuje v rovnici pouze skrze své derivace, je určeno až na aditivní konstantu, kterou lze považovat za jednu z těchto $s+1$ konstant. Zbylých s konstant označíme $P_1,\dots,P_s$.

Resení HJR $S = S(\vec{q},t,\vec{P})$, nazývané hlavní funkce Hamiltonova, obsahuje úplnou informaci o systému.

Jacobiho věta: Hlavní funkce Hamiltonova $S(\vec{q},t,\vec{P})$ je vytvořující funkce kanonické transformace $(\vec{Q},\vec{P}) \longrightarrow (\vec{q},\vec{p})$ která udává pohyb dané soustavy tj.

Pozn. k $\frac{\partial S}{\partial P_j}$ Fce. $S(\vec{q},t,\vec{P})$ je funkcí $2s+1$ nezávislých proměnných $\vec{q},t,\vec{P}$ přičemž proměnné $\vec{P}$ jsou konstanty (integrály pohybu) pouze pro soustavu popsanou Hamiltonovou funkcí H. Tr. danou fci. S lze použít i na jiný systém se stejným s, pak ale $\vec{P}$ nemusí být konst.

$$\forall j \in \hat{s} \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j}(\vec{q},t,\vec{P}) \longrightarrow q_i = q_i(t,\vec{Q},\vec{P}) \quad \forall i \in \hat{s}$$

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}(\vec{q},t,\vec{P}) \longrightarrow p_i = p_i(t,\vec{Q},\vec{P})$$

je fázová trajektorie soustavy s Hamiltonovou funkcí $H = -\left.\frac{\partial S}{\partial t}\right|_{(\vec{q},t,\vec{P}(\vec{q},\vec{p},t))}$

Řesení HJR–separací proměnných. Pokud $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, separujeme čas $S = -E(\vec{P})t + S_0(\vec{q},\vec{P})$ a hledáme charakteristickou funkci Hamiltonovu $S_0(\vec{q},\vec{P})$ jako řešení bezačasové HJR $H(\vec{q},\frac{\partial S_0}{\partial \vec{q}}) = E$

Význam hlavní funkce Hamiltonovy

$$S(\vec{q},\tilde{t},\vec{Q}) = \int_{t_0(\vec{Q})}^{\tilde{t}(\vec{q})} L(\vec{q}(t),\dot{\vec{q}}(t),t)\,dt$$

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{H.R.} = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_j}}_{p_j}\dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{-H} + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial P_k}\dot{P}_k}_{0} = p_j\dot{q}_j - H = L$$

derivace podél fázové trajektorie; vytvořující fce.; HJR; integrál pohybu

Hlavní fce. Hamiltonova je akce vypočtená podél skutečné trajektorie v konfiguračním prostoru vycházející v čase t_0 z bodu $\vec{Q}$ (s hybností $\vec{P} = -\frac{\partial S}{\partial \vec{Q}}$) jako funkce "horní meze" $\vec{q}$ v čase $\tilde{t}$.

Charakteristická fce. Ham. je zkrácená akce vypočtená podél skutečné trajektorie $\left.\frac{dS_0}{dt}\right|_{HR} = \frac{\partial S_0}{\partial q_i}\dot{q}_i = p_i\dot{q}_i$ $\quad S_0 = \int p_i\, dq_i$

Př. Volný hmotný bod $L = \frac{1}{2}m\dot{q}_i^2$ $\quad H = \frac{p_i^2}{2m}$ $\quad$ HJR $H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ $\quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ $\quad \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

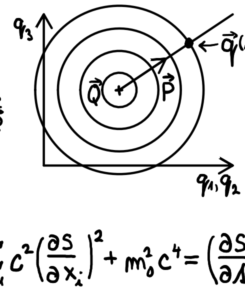
$q_i(t) = Q_i + v_i t$ $\quad v_i = \frac{q_i - Q_i}{t} = \text{Konst.}$ $\quad t_0 = 0$ čas kdy $\vec{q}(t) = \vec{Q}$

$$S = \int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}m\dot{q}_i^2\,d\tilde{t} = \int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}mv_i^2\,d\tilde{t} = \left[\frac{1}{2}mv_i^2\tilde{t}\right]_{t_0}^{t} = \frac{1}{2}mv_i^2 t = \frac{m}{2t}(q_i - Q_i)^2$$

Pozn.

1) $S = S(\vec{q},t,\vec{Q})$ lze považovat za rovnici vlnoplochy šířící se konfiguračním pr. M.

Pro dané t představuje $S(\vec{q},t,\vec{Q}) = \text{Konst.}$ rovnici nadplochy v konf. pr. M, která se při změně t šíří jako "čelo rázové vlny". Bod popisující konfiguraci systému je bodem této nadplochy určeným podmínkou $\vec{P} = -\frac{\partial S}{\partial \vec{Q}}$. Kanonická hybnost $\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}} = \nabla_q S$ je normálou k této nadploše a pokud je rovnoběžná s obecnou rychlostí $\dot{\vec{q}}$, pak trajektorie jsou kolmé k nadplochám. Na vývoj systému tak lze pohlížet jako šíření vlnoplochy v konfiguračním prostoru a na trajektorie jako na paprsky.



2) Rovnice eikonálu ve vakuu $\sum_{i=1}^{3} v^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2$ odpovídá HJR fotonu $H = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$, $\quad \sum_{i=1}^{3} c^2\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + m_0^2c^4 = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2$

3) Schrödingerova rce. $i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(\vec{x})\cdot\psi$ pro vlnovou funkci $\psi = \psi(\vec{x},t)$ kde $P_{rob.}(\vec{x},t) = \bar{\psi}\psi\, dV$

hledáme–li řešení tvaru $\psi(\vec{x},t) = C\exp\left[\frac{i}{\hbar}S(\vec{x},t)\right]$ pak rovnice pro S $\quad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + U(\vec{x}) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\Delta S$

v limitě pro $\hbar \to 0$ přejde na HJR (Klasická limita kvantové mechaniky)

Bezčasová Schr. rce. $\hat{H}\psi = E\psi$ – hledání vlastních vektorů $\hat{H}$ odpovídá řešení bezčasové HJR.

Plochy konstantní fáze $S = \text{Konst.}$ vlnové fce. ψ kvant. mech. jsou v této limitě kolmé na klasické trajektorie.