Relativistické invarianty elektromagnetického pole $F^{\mu\nu}$ tenzor elmag. pole (Faradayův tenzor)

$I_0 = F^{\mu}{}_{\mu} = g_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$

$I_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\left(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}\right)$

$I_2 = F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} = 4\,\frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{c}$

Pozn. Hadamardův součin matic $(\mathbb{A}\circ\mathbb{B})_{ij} = \mathbb{A}_{ij}\mathbb{B}_{ij}\quad \forall i,j$

Další invarianty jsou buď triviální nebo závislé např. $F^*_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} = -I_1$

Podle hodnot těchto invariantů $I_1, I_2 \gtreqless 0$ lze rozdělit elmag. pole do devíti tříd.

Například třída $I_1 = 0 = I_2$ tj. $E = cB,\ \vec{E}\perp\vec{B}$ odpovídá elektromagnetické vlně ve vakuu.

Akce pro soustavu nabitých částic a elektromagnetického pole – zkoumáme dva mezní případy:

I) soustava vzájemně neinteragujících nabitých částic ve vnějším elmag. poli – neuvažujeme interakci mezi částicemi ani jejich vliv na elmag. pole

Pro částici s klidovou hm. m_0 a nábojem e → Pro soustavu N částic s klidovými hm. m_α a náboji e_α

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e(\varphi(\vec{r},t) - \vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)) \longrightarrow L = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} -m_\alpha c^2\sqrt{1-\frac{v_\alpha^2}{c^2}}}_{L_m \text{ hmota}} - \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha[\varphi(\vec{r}_\alpha,t) - \vec{v}_\alpha\cdot\vec{A}(\vec{r}_\alpha,t)]}_{L_{mf} \text{ interakce hmota pole}}$$

Diracova delta funkce δ

Je "funkce" na $\mathbb{R}$ s vlastnostmi $\int_{\mathbb{R}}\delta(x)dx = 1$ a $\delta(x) = 0\ \ \forall x\neq 0$

Ve skutečnosti jde o zobecněnou funkci, což je spojitý lienární funkcionál na prostoru tzv. testovacích funkcí (fce. třídy C^∞ s kompaktním nosičem) více v RMMF.

Platí pro ni: $\int_{\mathbb{R}}\delta(x)f(x)dx = f(0)\qquad \int_{\mathbb{R}}\delta(x-a)f(x)dx = f(a)\qquad x\delta(x) = 0$

Ve 3D máme: $\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_\alpha) = \delta(x-x_\alpha)\delta(y-y_\alpha)\delta(z-z_\alpha)\qquad \int_{\mathbb{R}^3}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_\alpha)f(\vec{r})dV = f(\vec{r}_\alpha)$

Prostor $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m) = \{f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}\,|\,\int_{\mathbb{R}^m}|f(x)|^2dx < +\infty\}$

skalární součin $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\overline{g(x)}dx = f_{reg}(g)\in\mathbb{C}$

ekvivalence $f\sim g \iff f-g = 0$ skoro všude $\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^m) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m)/_\sim$

"duální prostor je větší a jsou v něm zobecněné fce."

Nábojová a proudová hustota pro bodové náboje:

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\delta(\vec{r}-\vec{r}_\alpha(t))\qquad \vec{j}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\vec{v}_\alpha(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_\alpha(t))$$

Interakční lagrangián:

$$L_{mf} = -\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\varphi(\vec{r}_\alpha,t) + \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\vec{v}_\alpha\cdot\vec{A}(\vec{r}_\alpha,t) = -\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\overbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_\alpha)\varphi(\vec{r},t)dV}^{\varphi(\vec{r}_\alpha,t)} + \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\vec{v}_\alpha\cdot\overbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_\alpha)\vec{A}(\vec{r},t)dV}^{\vec{A}(\vec{r}_\alpha,t)} =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^3}\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_\alpha)}_{\rho(\vec{r},t)}\varphi(\vec{r},t)dV + \int_{\mathbb{R}^3}\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\vec{v}_\alpha\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_\alpha)}_{\vec{j}(\vec{r},t)}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)dV = -\int_{\mathbb{R}^3} c\rho(\vec{r},t)\frac{\varphi(\vec{r},t)}{c} - \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{A}(\vec{r},t)dV = \int_{\mathbb{R}^3}\underbrace{-j^\mu A_\mu}_{\mathcal{L}_{mf}}dV$$

II) elmag. pole buzené zadaným rozložením nabitých částic a jejich rychlostí

Chceme aby akce pro elmag. pole $S_f = \frac{1}{c}\int_{V^*}\mathcal{L}_f\,dV^*$ byla stejná ve všech inerciálních soustavách a nezávisela na zvolené kalibraci pole. Hustotu Lagrangeovy funkce $\mathcal{L}_f$ pro elmag pole hledáme tak, aby byla:

1) nejvýše kvadratická v polních proměnných $\vec{E}, \vec{B}, A_\mu, \partial_\nu A_\mu = A_{\mu,\nu}$ (Maxwellovy rce. jsou lineární)
2) relativisticky invariantní – invariatní vůči Lorentzově transformaci (kvůli kovarianci polních rovnic)
3) kalibračně invariantní (nezávislá na parametrizaci pole), např. $A_\mu A^\mu$, $A_{\mu,\nu}A^{\mu,\nu}$ nejsou kalib. invariantní

Kvadratickými v polních proměnných jsou invarianty $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ (skalár) a $F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}$ (pseudoskalár)

Lagrangián pro:
- pole bez zdrojů
- pole se zdroji

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\mu_0}2\left(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 - \frac{1}{2}\mu_0\vec{H}^2$$

$$\mathcal{L}(A_\mu, A_{\mu,\nu}, x^\lambda) = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu(x^\lambda)A_\mu = -\frac{1}{4\mu_0}(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu})(A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}) - j^\mu(x^\lambda)A_\mu$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\eta,\lambda}} = -\frac{1}{4\mu_0}\left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial A_{\eta,\lambda}}F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial A_{\eta,\lambda}}\right) = -\frac{1}{4\mu_0}\left(\frac{\partial(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu})}{\partial A_{\eta,\lambda}}F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}}{\partial A_{\eta,\lambda}}\right) = -\frac{1}{4\mu_0}\left((\delta^\eta_\nu\delta^\lambda_\mu - \delta^\eta_\mu\delta^\lambda_\nu)F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial A_{\eta,\lambda}}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\mu_0}\left(F^{\lambda\eta} - F^{\eta\lambda} + F_{\rho\sigma}\frac{\partial F^{\rho\sigma}}{\partial A_{\eta,\lambda}}\right) = -\frac{1}{4\mu_0}\left(2F^{\lambda\eta} + 2F^{\lambda\eta}\right) = -\frac{F^{\lambda\eta}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}F^{\eta\lambda}$$

I. série Maxwell–Lorentzových rovnic

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\eta} = -j^\mu\frac{\partial A_\mu}{\partial A_\eta} = -j^\mu\delta^\eta_\mu = -j^\eta\qquad 0 = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\eta,\lambda}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\eta} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{1}{\mu_0}F^{\eta\lambda}\right) - (-j^\eta) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial F^{\eta\lambda}}{\partial x^\lambda} = -\mu_0 j^\eta\quad \forall\eta = 0,1,2,3}$$

II. série je již splněna–potenciály

Akce pro soustavu nabitých částic a elmag. pole

$$S = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{N}(-m_\alpha c^2)\sqrt{1-\frac{v_\alpha^2}{c^2}}\,dt}_{S_m \text{ hmota (matter)}} + \underbrace{\frac{1}{c}\int_{V^*} -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}dV^*}_{S_f \text{ pole (field)}} + \underbrace{\frac{1}{c}\int_{V^*} -j^\mu A_\mu dV^*}_{S_{mf} \text{ interakce}}$$

Odtud variacemi získáme

$\delta x^\mu_\alpha\quad \delta A_\mu = 0$ rce. pro částice v EM poli

$\delta A_\mu\quad \delta x^\mu_\alpha = 0$ I. série Maxwell–Lorentz

Nejednoznačnost lagrangiánu — lagrangiány $\mathcal{L}=\mathcal{L}(q_a,q_{a,\gamma},x^\nu)$ a $\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\frac{\partial G^\mu}{\partial x^\mu}$ kde $G^\mu=G^\mu(q_a,x^\nu)$ vedou na stejné pohybové rovnice

$$\delta S'-\delta S=\delta\frac{1}{c}\int_{V^*}\frac{\partial G^\mu}{\partial x^\mu}dV^*=\frac{1}{c}\delta\int_{\partial V^*}G^\mu df_\mu=\frac{1}{c}\int_{\partial V^*}\frac{\partial F^\mu}{\partial q_a}\delta q_a\, df_\mu=0 \quad \text{pro} \quad \delta q_a\big|_{\partial V^*}=0$$

"pevné konce"

Pozn. Nalézt lagrangián pro dané pole je obvykle složitá úloha při jejímž řešení se využívají principy symetrie a jednoduchosti. Např. v STR jde o požadavek Lorentzovské invariance lagrangiánu plynoucí z invariance akce a integrace vzhledem k $d\tilde{V}^*=J\,dV^*$ $\quad J=\det\left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}\right)=\det(\alpha^\mu{}_\nu)=+1$

pro vlastní Lorentzovy transformace

Zákony zachování v teorii pole

Zachovávající se čtyřproud je čtyřvektorová veličina $k^\mu(q_a,q_{a,\nu},x^\lambda)$ s nulovou čtyřdivergencí $\frac{\partial k^\mu}{\partial x^\mu}=0$

Ke každému zachovávajícímu se čtyřproudu existuje tzv. zachovávající se "náboj" $K(t)=\frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3,x^0=ct}k^0 dV=\text{konst.}$

$$0=\int_{V_R^*}\frac{\partial k^\mu}{\partial x^\mu}dV^*=\int_{\partial V_R^*}k^\mu df_\mu=\int_{V_R,x^0=ct_1}k^\mu df_\mu^{(1)}+\underbrace{\int_{\Sigma_R}k^\mu df_\mu}+\int_{V_R,x^0=ct_2}k^\mu df_\mu^{(2)} \quad \Big/ \lim_{R\to+\infty} \Rightarrow 0=\int_{\mathbb{R}^3,x^0=ct_1}-k^0dV+\int_{\mathbb{R}^3,x^0=ct_2}k^0dV=-K(t_1)+K(t_2)$$

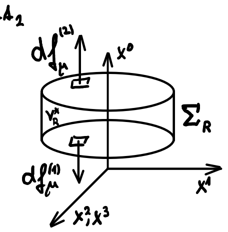
$V_R^*=\langle ct_1,ct_2\rangle\times V_R$ koule o poloměru R

$\partial V_R^*=V_{R,ct_1}\cup\Sigma_R\cup V_{R,ct_2}$ $\quad df_\mu=g_{\mu\nu}df^\nu$

$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=R^2$
$ct_1\le x^0\le ct_2$

integrál přes plášť 4-rozměrného válce v limitě integrace přes prostorové nekonečno — tok prostorové části k^μ plochou v nekonečnu za čas t_2-t_1 — předpokládáme, že je nula

$df_\mu^{(1)}=(-1,0,0,0)dV \qquad df_\mu^{(2)}=(1,0,0,0)dV$



Například pro čtyřproud $(j^\mu)=(c\rho,\vec{j})$ platí rovnice kontinuity $\partial_\mu j^\mu=0$ zachovává se náboj $Q(t)=\int_{\mathbb{R}^3}\rho(\vec{r},t)dV$

Teorém Noetherové: Ke každé spojité jednoparametrické grupě transformací, které ponechávají akci $S=\frac{1}{c}\int_{V^*}\mathcal{L}(q_a,q_{a,\nu},x^\lambda)dV^*$ invariantní (tj. jsou symetriemi akce) existuje zachovávající se čtyřproud k^μ.

Pozn. stačí aby transformace byly kvazisymetrie tj. aby zachovávali akci až na hraniční člen $S'=S+\int_{\partial V^*}(\dots)^\mu df_\mu$ tj. hustota Lagrangeovy funkce se může lišit o čtyřdivergenci $\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\partial_\mu G^\mu(q_a,x^\nu)$

Místo invariance akce vzhledem k transformaci budeme v dalším požadovat invarianci lagrangiánu: $\mathcal{L}(q'_a(x'^\nu),q'_{a,\mu}(x'^\nu),x'^\nu)=\mathcal{L}(q_a(x^\nu),q_{a,\mu}(x^\nu),x^\nu)$

Vnitřní symetrie — transformujeme pouze pole (například kalibrační transformace)

posunutí pole $q'_a=q_a+\varepsilon b_a$ $\qquad q'_{a,\mu}=q_{a,\mu}$

zachovávající se čtyřroud je hustota čtyřhybnosti

invariance lagrangiánu $\mathcal{L}(q'_{a,\mu}(x^\nu),x^\nu)=\mathcal{L}(q_{a,\mu}(x^\nu),x^\nu)$ $\qquad 0=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_a}=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}}\right)$ $\qquad \pi^{a\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}}$

Prostoročasové symetrie — Poincarého grupa tr. Minkowského prostoročasu a její reprezentace na polích

translace $x'^\nu=x^\nu+b^\nu$ $\qquad$ transformace pole $q'_a(x'^\nu)=q_a(x^\nu)$ $\qquad q'_{a,\mu}(x'^\nu)=q_{a,\mu}(x^\nu)$

kanonický tenzor energie—hybnosti

invariance lagrangiánu $\mathcal{L}(q'_a(x'^\nu),q'_{a,\mu}(x'^\nu))=\mathcal{L}(q_a(x^\nu),q_{a,\mu}(x^\nu))$

$$0=\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right)_{expl.}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_a}q_{a,\mu}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}q_{a,\nu\mu}=\delta_\mu^\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right)q_{a,\mu}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}q_{a,\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x^\nu}\overbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}q_{a,\mu}-\delta_\mu^\nu\mathcal{L}\right]}^{T_\mu{}^\nu}$$

Kanonický tenzor energie—hybnosti $T_\mu{}^\nu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}q_{a,\mu}-\delta_\mu^\nu\mathcal{L}$ je sada 4 zachovávajících se čtyřproudů pro které platí rovnice $\partial_\nu T_\mu{}^\nu=0 \quad \forall\mu=0,1,2,3$ představují zákony zachování energie a hybnosti v teorii pole

$$T^{\rho\nu}=g^{\rho\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}q_{a,\mu}-g^{\rho\nu}\mathcal{L}$$

hustota energie $\qquad$ hustota toku energie

$$(T^{\rho\nu})=\left(\begin{array}{c|c} w & \frac{1}{c}\vec{S}^T \\ \hline c\vec{g} & \mathfrak{S}\end{array}\right)$$

hustota hybnosti $\qquad$ hustota toku hybnosti

zachovávající se "náboje"

$$p^\mu=\frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3,x^0=ct}T^{\mu\nu}df_\nu$$

"$\dot{q}_a=\frac{\partial q_a}{\partial t}=c\,q_{a,0}$" podobný předpis jako pro obecnou energii

$$p^0=\frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3,x^0=ct}\left(g^{00}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{a,0}}q_{a,0}-g^{00}\mathcal{L}\right)df_0=\frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3,x^0=ct}\underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_a}\dot{q}_a-\mathcal{L}\right)}_{\sim w}dV$$

$df_\mu=(dV,0,0,0)$ $\qquad \sim w$ hustota energie

Symetrický tenzor energie–hybnosti pro elektromagnetické pole a zákony zachování

Kanonický tenzor energie–hybnosti obecně není symetrický a pro elmag. pole není ani kalibračne invariantní, proto jej nahradíme tzv. symetrickým tenzorem energie–hybnosti, který již kalibračně invariantní bude.

Pozn. Symetrii tenzoru požaduje obecná teorie relativity, kde tento tenzor stojící na pravé straně Einsteinových rovnic představuje zdroj pro zakřivení prostoročasu

konstanty kosmologická gravitační

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=\varkappa T_{\mu\nu}$$

Ricciho tenzor $R_{\mu\nu}=\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu}-\partial_\nu\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}+\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu}-\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\nu}$

$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ $\qquad \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}:=\frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\nu}+\partial_\beta g_{\alpha\nu}-\partial_\nu g_{\alpha\beta})g^{\gamma\nu}$

Zákon zachování energie a hybnosti $\partial_\nu \mathcal{T}_\mu^{\cdot\nu}=0$ zůstane v platnosti, pokud kanonický tenzor $\mathcal{T}_\mu^{\cdot\nu}$ nahradíme symetrickým tenzorem

$$T_\mu^{\cdot\nu}=\mathcal{T}_\mu^{\cdot\nu}+\frac{\partial Q_\mu^{\cdot\nu\rho}}{\partial x^\rho} \quad \text{kde} \quad Q_\mu^{\cdot\nu\rho}=-Q_\mu^{\cdot\rho\nu} \quad \text{neboť} \quad \underbrace{\partial_\nu\partial_\rho}_{\text{sym.}} \underbrace{Q_\mu^{\cdot\nu\rho}}_{\text{antisym.}}=0 \quad \text{pak} \quad \partial_\nu T_\mu^{\cdot\nu}=0$$

Pro volné elmag. pole (bez zdrojů) máme $\mathcal{T}_\mu^{\cdot\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}_f}{\partial A_{\rho,\nu}}A_{\rho,\mu}-\delta_\mu^\nu\mathcal{L}_f=\frac{1}{\mu_0}A_{\rho,\mu}F^{\rho\nu}+\frac{1}{4\mu_0}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\delta_\mu^\nu$ není kalibračně invariantní

přičtením $\frac{\partial Q_\mu^{\cdot\nu\rho}}{\partial x^\rho}=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x^\rho}(A_\mu F^{\nu\rho})=\frac{1}{\mu_0}(A_{\mu,\rho}F^{\nu\rho}+A_\mu\underbrace{\partial_\rho F^{\nu\rho}}_{=0})=-\frac{1}{\mu_0}A_{\mu,\rho}F^{\rho\nu}$ získáme $T_\mu^{\cdot\nu}=\frac{1}{\mu_0}F_{\mu\rho}F^{\rho\nu}+\frac{1}{4\mu_0}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\delta_\mu^\nu$

I. série Mawvell

Symetrický tenzor energie–hybnosti pro elmag. pole $T^{\mu\nu}=\frac{1}{\mu_0}\left(-g_{\rho\sigma}F^{\mu\rho}F^{\nu\sigma}+\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)$ je kalibračne invariantní

$$(T^{\mu\nu})=\left(\begin{array}{c|ccc} w & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ \hline \frac{S_x}{c} & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \frac{S_y}{c} & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \frac{S_z}{c} & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array}\right)$$

$w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})=\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2+\frac{1}{2}\mu_0\vec{H}^2$ hustota energie elmag. pole

$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ hustota toku energie elmag. pole – Poyntingův vektor

$\vec{g}=\vec{D}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{c^2}\vec{S}$ hustota hybnosti elmag. pole

ve vakuu $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$, $c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$

Maxwellův tenzor napětí $\sigma=-[\vec{E}\otimes\vec{D}+\vec{H}\otimes\vec{B}-\frac{1}{2}\overbrace{(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})}^{w}\hat{1}]$

složky ve vakuu $\sigma_{ij}=-[\varepsilon_0E_iE_j+\mu_0H_iH_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}(\varepsilon_0E^2+\mu_0H^2)]$

je tenzor hustoty toku hybnosti – jeho řádky jsou vektory hustoty toku jednotlivých složek hybnosti

Pozn. U (tří)vektorů $\vec{E},\vec{D},\vec{B},\vec{H},\vec{g},\vec{S}$ a tenzoru σ zde píšeme indexy složek pouze dolu (odpovídají kontravariantním složkám příslušných čtyřveličin).

$$T^{00}=\frac{1}{\mu_0}(-g_{\rho\sigma}F^{0\rho}F^{0\sigma}+\frac{1}{4}g^{00}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2}+\frac{1}{4}2\left(\vec{B}^2-\frac{\vec{E}^2}{c^2}\right)\right)=\frac{1}{\mu_0}\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2}+\vec{B}^2\right)=\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2+\frac{1}{2}\mu_0\vec{H}^2=w$$

hustota energie

$$T^{0i}=\frac{1}{\mu_0}(-g_{\rho\sigma}F^{0\rho}F^{i\sigma}+\frac{1}{4}g^{0i}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})=\frac{1}{\mu_0}(F^{0k}F^{ik})=\frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{E_k}{c}\cdot(-\varepsilon^{ikl}B_l)\right)=\frac{1}{\mu_0c}\varepsilon^{ikl}E_kB_l=\frac{1}{\mu_0c}(\vec{E}\times\vec{B})_i=\frac{1}{c}(\vec{E}\times\vec{H})_i$$

$F^{0k}=-\frac{E_k}{c}$ $\qquad F^{ik}=-\varepsilon^{ikl}B_l$

Poyntingův vektor $\vec{S}$ hustota toku energie

$$T^{ij}=\frac{1}{\mu_0}(-g_{\rho\sigma}F^{i\rho}F^{j\sigma}+\frac{1}{4}g^{ij}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})=\frac{1}{\mu_0}\left(-g_{00}F^{i0}F^{j0}-g_{kk}F^{ik}F^{jk}-\frac{1}{4}\delta_{ij}2\left(\vec{B}^2-\frac{\vec{E}^2}{c^2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{E_i}{c}\frac{E_j}{c}+\varepsilon^{ikl}B_l\varepsilon^{jkm}B_m-\frac{1}{2}\left(B^2-\frac{E^2}{c^2}\right)\right)=\frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{1}{c^2}E_iE_j+(\delta_{ij}\delta_{lm}-\delta_{im}\delta_{jl})B_lB_m-\frac{1}{2}\delta_{ij}\left(B^2-\frac{E^2}{c^2}\right)\right)=$$

$$=-\varepsilon_0E_iE_j+\frac{1}{\mu_0}B_lB_l\delta_{ij}-\frac{1}{\mu_0}B_iB_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}\left(B^2-\frac{E^2}{c^2}\right)=-[\varepsilon_0E_iE_j+\mu_0H_iH_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}(\varepsilon_0E^2+\mu_0B^2)]=\sigma_{ij}$$

$\frac{1}{\mu_0c^2}=\varepsilon_0$

Maxwellův tenzor napětí

Lokální zákon zachování energie a hybnosti

Pozn. Existence hybnosti elmag. pole byla experimentálně potvrzena objevem mechanického tlaku záření (Lebeděv 1899)

1) pro volné elmag. pole (bez zdrojů) $\partial_\nu T^{\mu\nu}=\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=0$

$$\frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu}=\frac{\partial w}{\partial(ct)}+\frac{1}{c}\frac{\partial S_i}{\partial x^i}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{S}\right)=0 \quad \text{lokální zákon zachování energie}$$

$$\frac{\partial T^{i\nu}}{\partial x^\nu}=\frac{\partial(cg_i)}{\partial(ct)}+\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x^k}=0 \quad \text{lokální zákon zachování hybnosti}$$

2) pro soustavu nabitých částic a elmag. pole lze odvodit $\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=-f^\mu$ kde $f^\mu=F^{\mu\nu}j_\nu=\left(\frac{\vec{j}\cdot\vec{E}}{c},\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}\right)$

je hustota Lorentzovy čtyřsíly $(K^\mu=eF^{\mu\nu}u_\nu)$

$$\frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu}=\frac{\partial w}{\partial(ct)}+\frac{1}{c}\frac{\partial S_i}{\partial x^i}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{S}\right)=-\frac{1}{c}\vec{j}\cdot\vec{E}=-f^0 \quad \text{(Poyntingova věta)}$$

$$\frac{\partial T^{i\nu}}{\partial x^\nu}=\frac{\partial(cg_i)}{\partial(ct)}+\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x^k}=-(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B})_i=-f^i$$

Srovnejte s pohybovou rovnicí kontinua. $\left(\rho a_i=f_i+\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)$

Maxwellův tenzor napětí, kterou elmag. pole působí na náboje v daném objemu, ve stacionárním případě elmag. pole $\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}=0$ máme $\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x^k}=-f^i$ a odtud $\int_V f^i dV=-\oint_{\partial V}\sigma_{ij}dS_j$