TEF2 – Tenzorový počet – Tuhé těleso – Mechanika Kontinua – STR – Elektromagnetické pole a vlny

Pozorování/Experiment	Hypotéza/Teorie	Výsledky	Interpretace	Porovnání s realitou
Měření	Model + Matematický popis	(Math.)	Předpovědi	ověřování/vyvracení

Fyzikální veličiny veličina $X = \{X\}[X]$ je hodnotou $\{X\}$ – skalár, vektor, tenzor,...
a jednotkou $[X]$ – slouží k vztažení veličiny k reálnému světu

latina: scala=škála, stupnice, scalare=škálovat vector=nosič, vehere=nést tensio=napětí, tenere=držet, tendere=tahat, napínat variare=měnit se, contra=proti, co=společně s

Základní fyzikální jednotky SI – jsou definovány pomocí stanovených hodnot 7 základních konstant

Sekunda s (čas) je doba trvání 9 192 631 770 period záření, které odpovídá přechodu mezi dvěma hladinami velmi jemné struktury základního stavu atomu cesia 133 který je v klidu a při teplotě absolutní nuly.

Metr m (délka) definován tak, aby rychlost světla ve vakuu byla $c = 299792458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Kilogram kg (hmotnost) definován tak, aby Planckova konstanta byla $h = 6,62607015.10^{-34}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$

Ampér A (elektrický proud) definován tak, aby elementární náboj byl $e = 1,602176634.10^{-19}\,\mathrm{A\,s}$

Kelvin K (termodynamická teplota) def. tak, aby Boltzmannova konst. $k = 1,380649.10^{-23}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,K^{-1}}$.

Mol mol (látkové množství) je definován tak, aby Avogadrova konstanta $N_A = 6,02214076.10^{23}\mathrm{mol^{-1}}$. Jeden mol obsahuje přesně $\{N_A\}$ elementárních entit (atomů molekul, iontů, elektronů).

Kandela cd (svítivost) je definována tak, aby světelná účinnost monochromatického záření o frekvenci $540.10^{12}\mathrm{Hz}$ byla $K_{cd} = 683\,\mathrm{cd\,sr\,W^{-1}} = 683\,\mathrm{lm\,W^{-1}}$.

Tenzorový počet

Základem je reálný vektorový prostor V konečné dimenze $m \in \mathbb{N}$ na kterém budeme definovat veličiny. Tyto veličiny mají reprezentovat objekty v reálném světě a proto jsou nezávislé na volbě báze (báze reprezentuje volbu souřadnic, které zavádíme pro jejich popis). Budeme tedy zkoumat, jak se mění popis veličin (složky, souřadnice) při změně báze (tj. při tzv. pasivní transformaci)

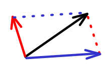
Báze prostoru V matice přechodu od báze $\mathcal{E}$ k bázi $\tilde{\mathcal{E}}$

$\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ $\tilde{\mathcal{E}} = (\vec{\tilde{e}}_1, \dots, \vec{\tilde{e}}_m)$ $\boxed{\vec{\tilde{e}}_j = \vec{e}_i\, \mathbb{S}^i{}_j}$ $\forall j \in \hat{m}$ $\mathbb{S} = (\mathbb{S}^i{}_j) = {}^{\tilde{\mathcal{E}}}\mathrm{Id}^{\mathcal{E}} = ((\vec{\tilde{e}}_1)_{\mathcal{E}}, \dots, (\vec{\tilde{e}}_m)_{\mathcal{E}}) \in GL(m)$

formálně $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\mathbb{S}$ $\vec{e}_k = \vec{\tilde{e}}_j (\mathbb{S}^{-1})^j{}_k$ $\forall k \in \hat{m}$ j–tý sloupec matice $\mathbb{S}_{\bullet j} = (\vec{\tilde{e}}_j)_{\mathcal{E}}$

1) Skaláry $s \in \mathbb{R}$ $\tilde{s} = s$ objem, hmotnost, náboj, energie, práce, teplo,...

2) Vektory $\vec{v} \in V$ $\boxed{\tilde{v}^j = (\mathbb{S}^{-1})^j{}_i v^i}$ $\forall j \in \hat{m}$ rychlost, zrychlení, hybnost, dipólový moment, ...
kontravariantní – transformují se proti změně báze V



$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i = \tilde{v}^j \vec{\tilde{e}}_j = \tilde{v}^j \vec{e}_i \mathbb{S}^i{}_j \Rightarrow v^i = \mathbb{S}^i{}_j \tilde{v}^j \quad \Big/ (\mathbb{S}^{-1})^k{}_i$$

$$(\mathbb{S}^{-1})^k{}_i v^i = (\mathbb{S}^{-1})^k{}_i \mathbb{S}^i{}_j \tilde{v}^j = (\mathbb{S}^{-1}\mathbb{S})^k{}_j \tilde{v}^j = (\mathbb{1})^k{}_j \tilde{v}^j = \delta^k_j \tilde{v}^j = \tilde{v}^k$$

$$(\vec{v})_{\mathcal{E}} = \mathbb{S}(\vec{v})_{\tilde{\mathcal{E}}} \qquad (\vec{v})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix} \qquad (\vec{v})_{\tilde{\mathcal{E}}} = \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ \tilde{v}^m \end{pmatrix}$$

$$(\vec{v})_{\tilde{\mathcal{E}}} = \mathbb{S}^{-1}(\vec{v})_{\mathcal{E}}$$

Duální vektorový prostor $V^\#$ k prostoru V je vektorový prostor $V^\# = \{\underleftarrow{\alpha}: V \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ je lineární}\} = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$

i–tý souřadnicový funkcionál v bázi $\mathcal{E}$ $\underleftarrow{e}^i = \vec{e}_i^{\,\#}$ $\underleftarrow{e}^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$\underleftarrow{e}^i(\vec{v}) = \underleftarrow{e}^i(v^j \vec{e}_j) = v^j \underleftarrow{e}^i(\vec{e}_j) = v^j \delta^i_j = v^i$ Duální báze $\mathcal{E}^\# = (\underleftarrow{e}^1, \dots, \underleftarrow{e}^m)$ k bázi $\mathcal{E}$

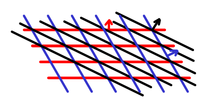
Funkcionál $\underleftarrow{\alpha} \in V^\#$ v bázi $\mathcal{E}^\#$ souřadnice v bázi $\tilde{\mathcal{E}}^\#$

$\underleftarrow{\alpha} = \alpha_i \underleftarrow{e}^i = \tilde{\alpha}_i \underleftarrow{\tilde{e}}^i$

$\underleftarrow{\alpha}(\vec{e}_j) = \alpha_i \underleftarrow{e}^i(\vec{e}_j) = \alpha_i \delta^i_j = \alpha_j$ $(\underleftarrow{\alpha})_{\tilde{\mathcal{E}}^\#} = (\underleftarrow{\alpha})_{\mathcal{E}^\#}\mathbb{S}$ $(\underleftarrow{\alpha})_{\mathcal{E}^\#} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$

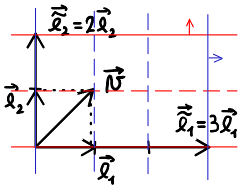
$\tilde{\alpha}_j = \underleftarrow{\alpha}(\vec{\tilde{e}}_j) = \underleftarrow{\alpha}(\vec{e}_i \mathbb{S}^i{}_j) = \underleftarrow{\alpha}(\vec{e}_i)\mathbb{S}^i{}_j = \alpha_i \mathbb{S}^i{}_j$ $(\underleftarrow{\alpha})_{\tilde{\mathcal{E}}^\#} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_m)$

Kovektory $\underleftarrow{\alpha} \in V^\#$ $\boxed{\tilde{\alpha}_j = \alpha_i \mathbb{S}^i{}_j}$ $\forall j \in \hat{m}$ lineární funkcionály, 1–formy, obecná hybnost, ...
kovariantní – transformují se stejně jako báze V



změna duální báze $\underleftarrow{\tilde{e}}^i = \underleftarrow{\tilde{e}}^i(\vec{e}_k)\underleftarrow{e}^k = \underleftarrow{\tilde{e}}^i(\vec{\tilde{e}}_j (\mathbb{S}^{-1})^j{}_k)\underleftarrow{e}^k = (\mathbb{S}^{-1})^j{}_k \underleftarrow{\tilde{e}}^i(\vec{\tilde{e}}_j)\underleftarrow{e}^k = (\mathbb{S}^{-1})^j{}_k \delta^i_j \underleftarrow{e}^k = (\mathbb{S}^{-1})^i{}_k \underleftarrow{e}^k$ kontravariantní

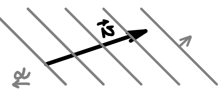
Př. $\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\mathbb{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\tilde{v}^1 = \frac{1}{3}v^1$ $\tilde{v}^2 = \frac{1}{2}v^2$



Transpozice $A \in \mathcal{L}(V, W) \to A^\#: \mathcal{L}(W^\#, V^\#)$ $A^\#(\varphi) := \varphi \circ A \in V^\#$ $\forall \varphi \in W^\#$ $\langle A^\#(\varphi), v\rangle = \langle \varphi, A(v)\rangle$

$M_{ij} = [{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{ij} = \langle y_i^\#, A(x_j)\rangle$ $[{}^{\mathcal{X}^\#}A^{\#\mathcal{Y}^\#}]_{ij} = \langle x_i^{\#\#}, A^\#(y_j^\#)\rangle = \langle x_i, A^\#(y_j^\#)\rangle = \langle y_j^\#, A(x_i)\rangle = M_{ji}$

Konvence: souřadnice vektoru v bázi B píšeme do sloupce
složky kovektoru v bázi B píšeme do řádku.

$\underleftarrow{\alpha}(\vec{v}) = \alpha_i \underleftarrow{e}^i(v^j \vec{e}_j) = \alpha_i v^j \underleftarrow{e}^i(\vec{e}_j) = \alpha_i v^j \delta^i_j = \alpha_i v^i =: \langle \underleftarrow{\alpha}, \vec{v} \rangle = (\underleftarrow{\alpha})_{\mathcal{E}^\#} (\vec{v})_{\mathcal{E}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}$ 3,5 

$\langle .,. \rangle : V \times V^\# \to \mathbb{R}$ je nedegenerované bilineární zobrazení (jednotkový tenzor)

Vektorový prostor V konečné dimenze a jeho duál $V^\#$ mají stejnou dimenzi a jsou tedy navzájem izomorfní. Izomorfizmů mezi nimi existuje nekonečně mnoho avšak žádný z nich není nijak význačný (kanonický) – "nezávislý na volbě báze", proto tyto prostory nelze bez dodatečně definvané struktury (např. skalárního součinu nebo nedegenerované bilineární formy na V) jednoznačně (kanonicky) ztotožnit. Prostor V a jeho druhý duál $(V^\#)^\#$ již ztotožnit lze, neboť mezi nimi existuje kanonický izomorfizmus nezávislý na volbě báze:

$f: V \to (V^\#)^\#$ definovaný vztahem $f(\vec{v})\underleftarrow{\alpha} = \underleftarrow{\alpha}(\vec{v}) \quad \forall \underleftarrow{\alpha} \in V^\#$

ztotožníme, tj. položíme $\vec{v} \equiv f(\vec{v})$ pak $\langle \underleftarrow{\alpha}, \vec{v} \rangle = \underleftarrow{\alpha}(\vec{v}) = f(\vec{v})\underleftarrow{\alpha} = \vec{v}(\underleftarrow{\alpha}) = \langle \vec{v}, \underleftarrow{\alpha} \rangle$

obdobně lze ztotožnit

$V^\# \cong V^{\#\#\#}$

$V^{\#\#} \cong V^{\#\#\#\#}$

Zatím tedy máme pro popis veličin k dispozici následující objekty:

$$\left.\begin{array}{lll} \underleftarrow{\alpha} \in V^\# & \underleftarrow{\alpha}: V \to \mathbb{R} & \underleftarrow{\alpha}(\vec{v}) = \langle \underleftarrow{\alpha}, \vec{v} \rangle \\ \vec{v} \in V = V^{\#\#} & \vec{v}: V^\# \to \mathbb{R} & \vec{v}(\underleftarrow{\alpha}) = \langle \vec{v}, \underleftarrow{\alpha} \rangle \\ s \in \mathbb{R} & s: \phi \to s \in \mathbb{R} & \end{array}\right\} \text{lineární zobrazení do } \mathbb{R}$$

zkonstruujeme lineární zobrazení které bude zobrazovat více vektorů a kovektorů současně multilineární formu – tenzor

3) Tenzory

Tenzorem T typu $\binom{p}{q}$ na prostoru V (kontravariantním řádu p a kovariantním řádu q) nazýváme multilineární (lineární v každmém argumentu) zobrazení $T: V^p_q = \underbrace{V \times \dots \times V}_{q\text{–krát}} \times \underbrace{V^\# \times \dots \times V^\#}_{p\text{–krát}} \to \mathbb{R}$ číslo $p+q$ nazýváme řádem tenzoru T

Složky tenzoru

Tenzor T je lineární zobrazení a proto je jednoznačně určen svými hodnotami na bázi prostoru V^p_q, které naýváme složky tenzoru T vzhledem k bázi $\mathcal{E}$. Tenzor T typu $\binom{p}{q}$ na prostoru dimenze m má m^{p+q} složek

$T^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q} = T(\underbrace{\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_q}, \underleftarrow{e}^{j_1}, \dots, \underleftarrow{e}^{j_p}}_{\text{prvek báze prostoru } V^p_q}) \quad \forall i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_p \in \hat{m}$ které se při změně báze $\mathcal{E} \to \tilde{\mathcal{E}}$ $\quad \vec{\tilde{e}}_i = \vec{e}_k \mathbb{S}^k_i$

transformují podle vztahu

$$\boxed{\tilde{T}^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q}} = T(\vec{\tilde{e}}_{i_1}, \dots, \vec{\tilde{e}}_{i_q}, \underleftarrow{\tilde{e}}^{j_1}, \dots, \underleftarrow{\tilde{e}}^{j_p}) = T(\vec{e}_{k_1} \mathbb{S}^{k_1}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{k_q} \mathbb{S}^{k_q}_{i_q}, (\mathbb{S}^{-1})^{j_1}_{l_1} \underleftarrow{e}^{l_1}, \dots, (\mathbb{S}^{-1})^{j_p}_{l_p} \underleftarrow{e}^{l_p}) =$$

$$= (\mathbb{S}^{-1})^{j_1}_{l_1} \dots (\mathbb{S}^{-1})^{j_p}_{l_p} T(\vec{e}_{k_1}, \dots, \vec{e}_{k_q}, \underleftarrow{e}^{l_1}, \dots, \underleftarrow{e}^{l_p}) \mathbb{S}^{k_1}_{i_1} \dots \mathbb{S}^{k_q}_{i_q} = \boxed{(\mathbb{S}^{-1})^{j_1}_{l_1} \dots (\mathbb{S}^{-1})^{j_p}_{l_p} T^{l_1 \dots l_p}_{k_1 \dots k_q} \mathbb{S}^{k_1}_{i_1} \dots \mathbb{S}^{k_q}_{i_q}}$$

Př. moment setrvačnosti $I_{jk} = \int_V \rho_m (x_l^2 \delta_{jk} - x_j x_k) dV$ elektrický kvadrupólový moment $Q_{jk} = \int_V (3x_j x_k - \delta_{jk} x_l^2) \rho_q dV$

Pozn. existují i další typy veličin, například 4) Tenzorové hustoty

Tenzorová hustota $\mathcal{T}$ typu $\binom{p}{q}$ váhy $\lambda \in \mathbb{Z}$ je veličina reprezentovaná (v bázi $\mathcal{E}$) m^{p+q} reálnými čísly $\mathcal{T}^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q}$ tzv. složkami, které při změně báze $\vec{\tilde{e}}_j = \vec{e}_i \mathbb{S}^i_j$ transformují předpisem

$$\tilde{\mathcal{T}}^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q} = (\det \mathbb{S})^\lambda (\mathbb{S}^{-1})^{j_1}_{l_1} \dots (\mathbb{S}^{-1})^{j_p}_{l_p} \mathcal{T}^{l_1 \dots l_p}_{k_1 \dots k_q} \mathbb{S}^{k_1}_{i_1} \dots \mathbb{S}^{k_q}_{i_q}$$

Reprezentace grupy G na vektorovém prostoru W je homomorfizmus grup $\rho: G \to GL(W)$ z G do grupy $GL(W)$ regulárních lineárních operátorů na W. Veličiny lze zadat i jako zobrazení $\phi: \mathcal{B}(V) \to (W, \rho)$ z mn. všch bází na V do tzv. prostoru komponent splňující $\phi \circ R_{\mathbb{S}} = \rho(\mathbb{S}^{-1}) \circ \phi$ kde $R_{\mathbb{S}} \mathcal{E} = \mathcal{E}\mathbb{S}$ $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{B}(V)$

Tenzorové operace

Sčítání tenzorů stejného typu $\binom{p}{q}$ a násobení číslem $a \in \mathbb{R}$ – po složkách

$(T + a \cdot R)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q, \underleftarrow{\alpha}^1, \dots, \underleftarrow{\alpha}^p) = T(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q, \underleftarrow{\alpha}^1, \dots, \underleftarrow{\alpha}^p) + a \cdot R(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q, \underleftarrow{\alpha}^1, \dots, \underleftarrow{\alpha}^p)$ $\quad \forall \vec{v}_i \in V \ \forall i \in \hat{q}$ $\quad \forall \underleftarrow{\alpha}^j \in V^\# \ \forall j \in \hat{p}$

ve složkách $(T + a \cdot R)^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q} = T^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q} + a \cdot R^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q} \quad \forall i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_p \in \hat{m}$

Množina všech tenzorů typu $\binom{p}{q}$ na V tvoří vektorový prostor $T^p_q(V)$ dimenze m^{p+q}

$T^0_0(V) = \mathbb{R}$ skaláry

$T^0_1(V) = V^\#$ kovektory

$T^1_0(V) = V^{\#\#} = V$ vektory

$T^1_1(V) \cong \mathcal{L}(V,V) \cong \mathcal{L}(V^\#, V^\#)$ lineární operátory na V nebo na $V^\#$

$T^0_2(V)$ bilineární formy na V

$T^2_0(V)$ bilineární formy na $V^\#$

$T \in T^1_1(V)$

$T(\vec{v}, \cdot) \in T^1_0(V)$ složky vektoru

$T(\vec{v}, \underleftarrow{\alpha}) = T(v^i \vec{e}_i, \alpha_j \underleftarrow{e}^j) = T(\vec{e}_i, \underleftarrow{e}^j) v^i \alpha_j = \underbrace{\alpha_j \overbrace{T^j_i v^i}}_{} \in \mathbb{R}$

složky kovektoru $T(\cdot, \underleftarrow{\alpha}) \in T^0_1(V)$

Tenzorový součin je zobrazení $\otimes: T^p_q(V) \times T^r_s(V) \to T^{p+r}_{q+s}(V)$ definované předpisem

$$(T\otimes R)(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{q+s},\underleftarrow{\alpha}^1,\dots,\underleftarrow{\alpha}^{p+r}) = T(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_q,\underleftarrow{\alpha}^1,\dots,\underleftarrow{\alpha}^p)\cdot R(\vec{v}_{q+1},\dots,\vec{v}_{q+s},\underleftarrow{\alpha}^{p+1},\dots,\underleftarrow{\alpha}^{p+r})$$

$\forall \vec{v}_i \in V \ \forall i \in \widehat{q+s}$
$\forall \underleftarrow{\alpha}^j \in V^\# \ \forall j \in \widehat{p+r}$

ve složkách $(T\otimes R)^{j_1\dots j_{p+r}}_{i_1\dots i_{q+s}} = T^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_q}\cdot R^{j_{p+1}\dots j_{p+r}}_{i_{q+1}\dots i_{q+s}} \quad \forall i_1,\dots,i_{q+s},j_1,\dots,j_{p+r}\in\hat{n}$

– je bilineární, asociativní, nekomutativní

homogenní prvky

Pozn. Vektorový prostor $T(V) = \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} T^p_q(V)$ tvoří spolu s tenzorovým součinem (rozšířeným pomocí linearity) $\otimes: T(V)\times T(V)\to T(V)$ asociativní algebru nazývanou tenzorová algebra vektorového prostoru V.

Př. Vnější součin pro 1–formy $\underleftarrow{e}^i\wedge\underleftarrow{e}^j = \underleftarrow{e}^i\otimes\underleftarrow{e}^j - \underleftarrow{e}^j\otimes\underleftarrow{e}^i$

Kontrakce tenzoru je zobrazení $C^b_a: T^p_q(V)\to T^{p-1}_{q-1}(V)$ určené výběrem dvou pozic $a\in\hat{q}$, $b\in\hat{p}$

$$T \to C^b_a T = \sum_{k=1}^{n} T(\dots,\underbrace{\vec{e}_k}_{a},\dots,\dots,\underbrace{\underleftarrow{e}^k}_{b},\dots)$$

$$(C^b_a T)^{j_1\dots\cancel{j_b}\dots j_p}_{i_1\dots\cancel{i_a}\dots i_q} = \delta^{i_a}_{j_b} T^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_q} = T^{j_1\dots i_a\dots j_p}_{i_1\dots i_a\dots i_q}$$

Tenzor se nazývá symetrický (antisymetrický) vzhledem k dvojici argumentů nebo indexů téhož typu, pokud se při jejich prohození jeho hodnota nezmění (změní v opačnou). $T^{\widehat{ij}}{}_{\underbrace{klm}_{\text{sym.}}} = T^{\widehat{ji}}{}_{klm} = -T^{ji}{}_{\underbrace{lkm}_{\text{antisym.}}}$

Je–li tenzor typu $\binom{p}{0}$ nebo $\binom{0}{q}$ symetrický (antisymetrický) vzhledem ke všem dvojicím svých indexů nazývá se uplně symetrický (uplně antisymetrický).

Invariantní tenzory Buď $G\subset GL(n)$ podgrupa.

Tenzor T se nazývá G–invariantní, pokud se jeho složky nemění při změně báze $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j \quad \forall S\in G$

tj. $\tilde{T}^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_q} = T^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_q}$ Pozn. $SO(n)$–invariatní tenzory se nazývají izotropní tenzory.

Je–li z kontextu zřejmé, o jakou grupu G jde, pak místo G–inariantní říkáme pouze invariantní. Např. v mechanice je touto grupou grupa ortogonálních transformací v STR Lorentzova grupa a zde $GL(n)$.

- tenzory nultého řádu (skaláry) $\langle\underleftarrow{\alpha},\vec{v}\rangle = \alpha_i v^i$ $\quad T^i_i = \delta^i_j T^j_i$ vyčíslení tenzoru na vektorech a kovektorech nezávisí na bázi! $\quad C^1_1\hat{1} = n = \dim V$
- tenzory prvního řádu (vektory, kovektory) – pouze nulový
- jednotkový tenzor $\hat{1}\in T^1_1(V)$ definovaný předpisem $\hat{1}(\vec{v},\underleftarrow{\alpha}) := \underleftarrow{\alpha}(\vec{v})$ $\quad \hat{1} = \delta^i_j\,\underleftarrow{e}^j\otimes\vec{e}_i = \sum \underleftarrow{e}^i\otimes\vec{e}_i$
  je (až na násobky číslem) jediný nenulový invariantní tenzor 2. řádu
- mocniny jednotkového tenzoru a jejich násobky číslem $\hat{1}\otimes\hat{1}$ (a dále permutace a lin. komb. $\lambda\delta^i_k\delta^j_l + \mu\delta^i_l\delta^j_k$)

Tenzory 2. řádu – lze vzhledem k bázi $\mathcal{E}$ reprezentovat maticemi $M \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathbb{M} = (M)_{\mathcal{E}}$

Bilineární formy (bf) V na $M = M_{ij}\,\underleftarrow{e}^i\otimes\underleftarrow{e}^j \in T^0_2(V)$ $\quad \mathbb{M} = (M_{ij}) = (M(\vec{e}_i,\vec{e}_j)) \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$M(\vec{u},\vec{v}) = M(u^i\vec{e}_i, v^j\vec{e}_j) = u^i v^j M(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = u^i v^j M_{ij} = u^i M_{ij} v^j = (\vec{u})^T_{\mathcal{E}}\,\mathbb{M}\,(\vec{v})_{\mathcal{E}}$$

u matic je jedno zda píšeme indexy nahoru či dolu, záleží pouze na tom, který z indexů je první a který druhý

Pomocí bf M můžeme definovat zobrazení $M_1: V\to V^\#$ a $M_2: V\to V^\#$ předpisy

$$M_1(\vec{v})\vec{w} := M(\vec{v},\vec{w}) \qquad M_2(\vec{v})\vec{w} := M(\vec{w},\vec{v}) \qquad \forall\vec{w}\in V$$

které každému vektoru $\vec{v}\in V$ přiřadí kovektor $M_1(\vec{v}) = M(\vec{v},\cdot)$, $M_2(\vec{v}) = M(\cdot,\vec{v})$ $\in V^\#$

Na konečně dimenzionálním prostoru V platí, že je–li jedno z těchto zobrazení izomorfizmus, pak je izomorfizmus i to druhé a bilineární forma M se nazývá nedegenerovaná. A M_2 je transpozice zobrazení M_1.

Bilineární forma $M\in T^0_2(V)$ je nedegenerovaná, pokud $M(\vec{u},\vec{v}) = 0 \ \forall\vec{v}\in V \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ tj. $\det\mathbb{M}\neq 0$

Zvedání a snižování indexů – pomocí nedegenerované bf lze ztotožnit prostor V s jeho duálem $V^\#$

$$\vec{v} \equiv M_2(\vec{v}) = M(\cdot,\vec{v}) \qquad v_i = \underbrace{M_2(\vec{v})}_{\in V^\#}\vec{e}_i = M(\vec{e}_i,\vec{v}) = M(\vec{e}_i, v^j\vec{e}_j) = M(\vec{e}_i,\vec{e}_j)v^j = M_{ij}v^j$$

snižování indexů

Označme $M^{ij} := (\mathbb{M}^{-1})_{ij}$ prvky inverzní matice k matici $\mathbb{M} = (M_{ij})$ pak $M^{ki}M_{ij} = \delta^k_j$ $\quad \det(M^{ki})\neq 0$

a $M^{-1} = M^{ij}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j \in T^2_0(V)$ je nedegenerovaná bf pomocí níž dostaneme $v^k = M^{ki}v_i$ **zvedání indexů**

Po ztotožnění V s $V^\#$ nazýváme v_i kovariantními a v^i kontravariatními složkami vektoru $\vec{v}$

Obdobně pro tenzory $\quad M_{lk}T^{i\cdot rk}_{\cdot j} = T^{i\cdot r}_{\cdot j\cdot l} = M^{rk}T^{i}_{\cdot jkl}$ při zvedání a snižování indexů musíme zachovat jejich pořadí tečka dole před j říká, že j je až 2. index

(Pseudo) **metrický tenzor** g na V je nedegenerovaná symetrická forma $g \in T^0_2(V)$ $\quad g(\vec{u},\vec{v}) = g(\vec{v},\vec{u})$ $\quad g_{ij} = g_{ji}$

Symplektická forma ω na V je nedegenerovaná antisymetrická forma $\omega \in T^0_2(V)$ $\quad \omega(\vec{u},\vec{v}) = -\omega(\vec{v},\vec{u})$ $\quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}$

Každou bf $M = M_{ij}\, \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \in T^0_2(V)$ lze rozložit $M = M^S + M^A$ na symetrickou $M^S = \frac{1}{2}(M_{ij} + M_{ji})\, \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j = M_{(ij)}\, \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j$

a antisymetrickou část $M^A = \frac{1}{2}(M_{ij} - M_{ji})\, \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j = M_{[ij]}\, \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j$

Pro každou symetrickou bf $M^S \in T^0_2(V)$ existuje (polární, ortonormální) báze V_m ve které má její matice tvar

$\mathbb{M}^S = (M^S_{ij}) = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{s}, \underbrace{0,\dots,0}_{u})$ $\qquad r + s + u = m$ $\qquad u = 0 \rightarrow$ nedegenetovanost

$s \neq 0, r \neq 0 \rightarrow$ pseudometrický tenzor

Kanonický tvar metrického tenzoru $g = (g_{ij}) = (\eta_{ij}) = (\underbrace{1,\dots,1}_{r}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{s})$ $\qquad s = 0 \rightarrow$ metrický tenzor (skalární součin)

Pozn. Pro každou symplektickou formu $\omega \in T^0_2(V)$ existuje báze, ve které má její matice tvar $\omega = \mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_s \\ -\mathbb{1}_s & 0 \end{pmatrix}$

Symplektické formy existují jen na prostorech sudé dimeze $m = 2s$

Pozn. Ke ztotožnění V a $V^{\#}$ se používá symplektická forma ω v Hamiltonovské mechanice a metrický tenzor g v STR a Newtonovské mechanice

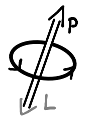
Orientace vektorového prosotru

Báze $\mathcal{E}$ a $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\mathbb{S}$ vek. pr. V_m jsou navzájem orientované souhlasně (pokud $\det \mathbb{S} > 0$) nebo opačně ($\det \mathbb{S} < 0$)

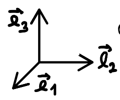
Orientace V_m je zobrazení σ, které každé jeho bázi $\mathcal{E}$ přiřadí číslo ± 1, tak že $\forall \mathbb{S} \in GL(m)$ $\quad \sigma(\mathcal{E}\mathbb{S}) = \frac{\det \mathbb{S}}{|\det \mathbb{S}|}\sigma(\mathcal{E})$

Báze $\mathcal{E}$ se nazývá kladně orientovaná, pokud $\sigma(\mathcal{E}) = +1$ nebo záporně orientovaná, pokud $\sigma(\mathcal{E}) = -1$

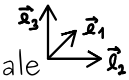
Orientaci V_m lze zadat výběrem nenulové n–lineární úplně antisymetrické formy $\sigma \in T^0_m(V_m)$ tak, že za kladně orientované báze označíme ty pro něž $\sigma(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_m) > 0$ a záporně orientované báze ty pro něž $\sigma(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_m) < 0$



Pozn. Reálný fyzikální prostor mechaniky není apriori nijak orientovaný a jeho orientaci je potřeba nějak zvolit (například výběrem pravidla pravé či levé ruky). Zákony mechaniky jsou $O(m)$–invariantní. V prostoru $\mathbb{R}^m$ se standardně volí orientace tak, že orienatace jeho standardní báze je kladná. Jeho orientaci pak fyzici pomocí souřadnicového izomorfizmu přenáší na V čímž jej orientují podle toho jakou si zrovna zvolili bázi, zda pravotočivou



či levotočivou



–jejich báze je tedy vždy orientovaná kladně a inverze os není jen změnou báze V ale i změnou orientace V.

Ačkoliv se tento přístup fyziků jeví jako matematicky hrubě nekorektní (vlastnost prostoru závisí na výběru jeho báze?) je docela praktický. Umožňuje jim totiž v mechanice rozeznat pseudoveličiny nejen podle jejich chování při aktivních tr. ale i při pasivních tr. (při kterých by se jinak transformovali stejně jako obyčejné veličiny) a zachovat tak do jisté míry duální charakter těchto transformací z grupy $O(m)$.
Napříkla pro vektorový součin na prostoru V_3 při aktivním zrcadlení $S(\vec{a}) = -\vec{a}$ máme $\quad (S\vec{a}) \times (S\vec{b}) = (-\vec{a}) \times (-\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b} \neq -(\vec{a} \times \vec{b}) = S(\vec{a} \times \vec{b}) = S(\vec{c})$
což znamená, že zrcadlení nezachovává orientaci ("nekomutuje s vektorovým součinem") a není tedy symetrií orientovaného prostoru.
Z hlediska veličin to znamená, že výsledek vektorového součinu je pseudovektor. Zatímco pasivně pro vektorový součin $c_i = \varepsilon_{ijk} a_i b_j$ v pravotočivé ortonormální bázi $\mathcal{E}$ a zrcadlení $\tilde{a}_i = -a_i$ máme $-\tilde{c}_i = \varepsilon_{ijk}(-\tilde{a}_i)(-\tilde{b}_j) = \varepsilon_{ijk}\tilde{a}_i\tilde{b}_j$ a tedy $\tilde{c}_i = -\varepsilon_{ijk}\tilde{a}_i\tilde{b}_j$ v levotočivé ON bázi $\tilde{\mathcal{E}} = -\mathcal{E}$
což znamená pouze to že v levotočivých ON bazích platí pro stejný vektorový součin jiný vzorec. Pokud však při zrcadlení současně se změnou báze $\mathcal{E} \rightarrow -\mathcal{E}$ změníme potají i orientaci prostoru $\sigma \rightarrow -\sigma$ dostaneme stejný vzorec $\tilde{c}_i = \varepsilon_{ijk}\tilde{a}_i\tilde{b}_j$ pro (teď ale již jiný) vektorový součin i v nové bázi $\tilde{\mathcal{E}}$ a budeme moci tvrdit, že složky pseudovektoru získaného pomocí vektorového součinu se při této inverzi os nemění.

Chien Wu (1956) – pozorovala pouze pravotočivá antineutrina při beta rozpadu kobaltu $^{60}_{27}Co \rightarrow {}^{60}_{28}Ni + e^- + \bar{\nu}_e + \gamma$ záření $\quad$ porušení parity

Pseudotenzory

jsou tenzory jejichž definice závisí na orientaci σ a to tak, že při změně orientace $\sigma \rightarrow -\sigma$ změní znaménko např. veličiny definované pomocí vektorového součinu (ten závisí na orientaci) $\quad \vec{\Omega}_{-\sigma} = -\vec{\Omega}_\sigma$ $\quad \vec{B}_{-\sigma} = -\vec{B}_\sigma$

úhlová rychlost $\quad$ magnetická indukce

Inverze os (parita) – je jako pasivní transformace (vzhledem k výše uvedenému) přechod od báze
(ve fyzice) $\quad \mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m)$ k bázi $\tilde{\mathcal{E}} = (-\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m)$ spojený se změnou orientace prostoru $\sigma \rightarrow -\sigma$
– narozdíl od ostatních $GL(n)$ transformací ji nelze realizovat spojitým přechodem

Afinní prostor

je uspořádaná trojice (A, φ, V) kde $A \neq \emptyset$ je množina bodů, V je přidružený reálný vektorový prostor a $\varphi : A \times A \rightarrow V$ zobrazení splňující

1, $\forall a, b, c \in A \quad \varphi(a,b) + \varphi(b,c) + \varphi(c,a) = \vec{0}$

2, $\forall a \in A$ je $\varphi_a : A \rightarrow V \quad \varphi_a(.) = \varphi(a,.)$ bijekce

Značení: dimenze A $\quad \dim A = \dim V$ $\quad$ je–li dimenze n můžeme ji vyznačit dolním indexem A_m

$V = Z(A) = \vec{A}$ zaměření afinního prostoru (volné vektory) $\qquad \varphi(a,b) = \vec{ab} = \vec{r}_{ab} =: b - a$ $\quad$ lze odčítat body

$\forall a \in A \ \forall \vec{r} \in V \ \exists_1 b \in A \quad \vec{r} = \varphi_a(b) = \varphi(a,b) = b - a \Rightarrow b = \varphi_a^{-1}(\vec{r}) =: a + \vec{r}$ $\quad$ lze přičíst k bodu vektor

Př. lineární varieta $(\vec{w}+W,\ominus,W)$, $\vec{w}\in V$, $W\subset\subset V$ vektorový prostor $(V,\ominus,V)$

Afinní (přímočaré) souřadnice bodu $b\in A$ v soustavě souřadnic $\langle\sigma,\underbrace{(\vec{\ell}_1,\dots,\vec{\ell}_m)}_{\mathcal{E}}\rangle$ jsou $\boxed{x^i(b):=\overleftarrow{\ell}^i(b-\sigma)}$

počátek $\sigma\in A$ $\mathcal{E}$ báze $Z(A)$

$b=\sigma+\underbrace{(b-\sigma)}_{\vec{r}(b)}=\sigma+\overleftarrow{\ell}^i(b-\sigma)\vec{\ell}_i$

$\vec{r}(b)$ polohový vektor bodu b (vázaný vektor umístěný v počátku σ) $(\vec{r}(b))_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^m\end{pmatrix}=x\in\mathbb{R}^m$ uspořádaná n-tice

Symetrie prostoru A – transformace (bijekce $A\xrightarrow{1:1}A$) které zachovávají jeho vlastnosti

→ afinní zobrazení $f:A\to A$ takové, že existuje $F\in\mathcal{L}(\vec{A},\vec{A})$ a $\forall b\in A\ \forall\vec{w}\in\vec{A}$ platí $f(b+\vec{w})=f(b)+F(\vec{w})$

$f(b)=f(\sigma+(b-\sigma))=f(\sigma)+F(b-\sigma)=f(\sigma)+F(\vec{r}(b)) \Rightarrow x^i(f(b))=\underbrace{x^i(f(\sigma))}_{\text{translace}}+\underbrace{\mathbb{F}^i{}_j x^j(b)}_{\text{lineární transformace – grupa } GL(m)}$ kde $(\mathbb{F}^i{}_j)={}^{\mathcal{E}}F^{\mathcal{E}}=\mathbb{F}\in GL(m)$ ⇒ Afinní grupa

$x^i(f(b))=\overleftarrow{\ell}^i(f(b)-\sigma)=\overleftarrow{\ell}^i(f(\sigma+(b-\sigma))-\sigma)=\overleftarrow{\ell}^i(f(\sigma)-\sigma+F(b-\sigma))=\overleftarrow{\ell}^i(f(\sigma)-\sigma)+\overleftarrow{\ell}^i(F(b-\sigma))=x^i(f(\sigma))+\overleftarrow{\ell}^i(F(x^j(b)\vec{\ell}_j))=x^i(f(\sigma))+\overleftarrow{\ell}^i(F(\vec{\ell}_j))x^j(b)=x^i(f(\sigma))+F^i{}_j x^j(b)$

$\begin{pmatrix}\mathbb{F} & x_0\\ \vec{0}^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbb{F}x+x_0\\ 1\end{pmatrix}$

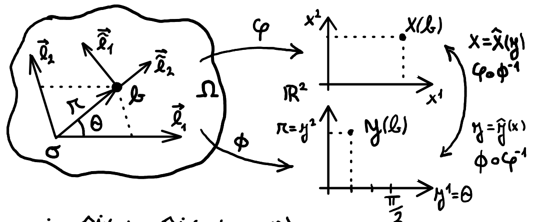
grupa translací – abelovská grupa $(\mathbb{R}^m,+)$

$Aff(m)\cong\mathbb{R}^m\rtimes GL(m)$

$\rtimes$ polopřímý součin grup

Křivočaré souřadnice

prosté zobrazení $\phi:\Omega\to\mathbb{R}^m$ oblasti $\Omega\subset A$ normovaného afinního prostoru A, které je spolu se svým inverzním zobrazením spojité



Přechod mezi přímočarými (afinními) souřadnicemi x^i a křivočarými souřadnicemi je dán m funkcemi $\hat{x}^i:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ třídy alespoň C^2 danými předpisy $x^i=\hat{x}^i(y)=\hat{x}^i(y^1,\dots,y^m)$ $\forall i\in\hat{m}$ kde $\det\left(\frac{\partial\hat{x}^i}{\partial y^j}\right)\neq 0$ na $\phi(\Omega)$ ⇒ $\exists\, y^j=\hat{y}^j(x)=\hat{y}^j(x^1,\dots,x^m)$

Protože zobrazení ϕ není lineární a globální, nejsou souřadnice y^i složkami vektoru ale pouze prvky uspořádané n-tice $y=(y^1,\dots,y^m)^T$ a mimo argument funkce je budeme považovat za jednosloupcové matice.

$y\in\mathbb{R}^m$ jsou sice vektory v $\mathbb{R}^m$, ale jejich sčítání nedává (díky lokálnosti $\Omega\neq A$ a nelinearitě zobrazení ϕ) z hlediska původního prostoru smysl – sčítat lze složky vektorů, ale ne souřadnice bodů!

k-tá souřadnicová plocha $\{b\in A\mid y^k(b)=y^k(b_0)=y_0^k\}$ jdoucí bodem b_0 je nadplocha na které je y^k konst.

k-tá souřadnicová křivka $\{b\in A\mid y^i(b)=y^i(b_0)=y_0^i,\ \forall i\in\hat{m}\setminus\{k\}\}$ je průnikem $m-1$ souřadnicových ploch

$\gamma_k:\mathbb{R}\to A$ $\quad \gamma_k(\tau)=\phi^{-1}(y_0^1,\dots,y_0^{k-1},y_0^k+\tau,y_0^{k+1},\dots,y_0^m)$ $\quad \gamma_k(\tau)=\sigma+\overleftarrow{\ell}^i(\gamma_k(\tau)-\sigma)\vec{\ell}_i=\sigma+x^i(\gamma_k(\tau))\vec{\ell}_i\in A$

Tečné vektory k souřadnicovým křivkám tvoří v bodě b_0 kovariantní bázi $\tilde{\mathcal{E}}=(\vec{\tilde{\ell}}_1,\dots,\vec{\tilde{\ell}}_m)$ zaměření $Z(A)$

$$\gamma_k'(0)=\left.\frac{d\gamma_k}{d\tau}\right|_0=\lim_{\tau\to 0}\frac{\gamma_k(\tau)-\gamma_k(0)}{\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{x^i(\gamma_k(\tau))-x^i(\gamma_k(0))}{\tau}\vec{\ell}_i=\left.\frac{dx^i\circ\gamma_k}{d\tau}\right|_0\vec{\ell}_i=\left.\frac{\partial x^i\circ\phi^{-1}}{\partial y^k}\right|_{y_0}\vec{\ell}_i=\underbrace{\left.\frac{\partial\hat{x}^i}{\partial y^k}\right|_{y_0}}_{\mathbb{S}^i{}_k(y_0)}\vec{\ell}_i=\vec{\ell}_i\,\mathbb{S}^i{}_k(b_0)=\vec{\tilde{\ell}}_k$$

"lokální přímočaré souřadnice"

Jacobiho matice transformace $x=\hat{x}(y)$ je maticí přechodu od báze $\mathcal{E}$ k bázi $\tilde{\mathcal{E}}$

Obdobně lze pomocí vnější derivace souřadnic $y^k:A\to\mathbb{R}$ definovat duální tzv. kontravariantní bázi

$$\overleftarrow{\tilde{\ell}}^k=d\hat{y}^k\Big|_{b_0}=\underbrace{\left.\frac{\partial\hat{y}^k}{\partial x^i}\right|_{b_0}}_{(\mathbb{S}^{-1}(b_0))^k{}_i}dx^i\Big|_{b_0}=\left.\frac{\partial\hat{y}^k}{\partial x^i}\right|_{b_0}\overleftarrow{\ell}^i$$

Je-li dán skalární součin, lze kovektory duální báze ztotožnit s gradienty k souřadnicovým plochám a jsou-li souřadnice ortonormální jsou tyto gradienty právě tečné vektory k souřadnicovým křivkám.

Někdy se značí $\vec{\ell}_i=\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{b_0}$ $\quad \overleftarrow{\ell}^j=dx^j\Big|_{b_0}$

Tenzorová pole

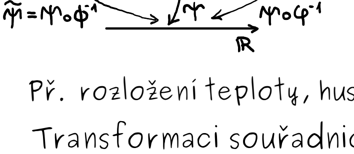
Tenzorové pole typu $\binom{p}{q}$ na afinním prostoru A je (zpravidla hladké) zobrazení $T:A\to T^p_q(Z(A))$, které každému $b\in A$ přiřadí tenzor $T(b)\in T^p_q(Z(A))$

Transfrormace tenzorových polí při změně souřadnic

$x\to y$ $\quad x^i=\hat{x}^i(y)=\hat{x}^i(y^1,\dots,y^m)$ $\quad \mathbb{S}^i{}_j=\frac{\partial\hat{x}^i}{\partial y^j}$ $\quad \det\mathbb{S}\neq 0$ $\quad\forall y$

složky tenzorového pole v souřadnicích

$$\tilde{T}^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_q}(y)=\left(\frac{\partial\hat{y}^{j_1}}{\partial x^{l_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial\hat{y}^{j_p}}{\partial x^{l_p}}\right)T^{l_1\dots l_p}_{k_1\dots k_q}(x)\left(\frac{\partial\hat{x}^{k_1}}{\partial y^{i_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial\hat{x}^{k_q}}{\partial y^{i_q}}\right)$$



Pole		v souřadnicích	
skalární	$\Psi:A\to\mathbb{R}$	$\tilde{\Psi}(y)=\Psi(x)$	⇒ předpis pro transformované pole $\tilde{\Psi}(y)=\Psi(\hat{x}(y))$
vektorové	$\vec{F}:A\to Z(A)$	$\tilde{F}^i(y)=\left(\frac{\partial\hat{y}^i}{\partial x^j}\right)F^j(x)$ $\forall i\in\hat{m}$	$(\vec{F}(y))_{\tilde{\mathcal{E}}}=\mathbb{S}^{-1}(\vec{F}(x))_{\mathcal{E}}$

Př. rozložení teploty, hustoty, skalární potenciál, silové pole, tenzory: napětí, deformace, metrický, elmag. pole

Transformaci souřadnic $S:x\to y$ nazveme symetrií tenzorového pole T pokud platí $T^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_q}(y)=\tilde{T}^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_q}(y)$

tj. jeho složky jsou před i po transformaci stejné funkce a pole je vůči této transformaci invariantní.

Např. Transformace $y=\hat{y}(x)=S(x)$

označme $\frac{\partial\hat{y}^i}{\partial x^j}=(\mathbb{S}^{-1})^i{}_j$

skalární pole symetrie

$U(\hat{y}(x))=U(y)\overset{\downarrow}{=}\tilde{U}(y)=U(x)$

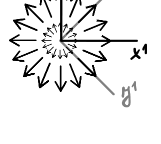
$U(S(x))=U(x)$

vektorové pole symetrie

$F^i(\hat{y}(x))=F^i(y)\overset{\downarrow}{=}\tilde{F}^i(y)=\frac{\partial\hat{y}^i}{\partial x^j}F^j(x)$

$F^i(S(x))=(\mathbb{S}^{-1})^i{}_j F^j(x)$

Př.



Newtonovská mechanika – platí pro rychlosti $v \ll c$ (jinak STR) a dostatečně velké rozměry těles (jinak kvantovka)

Absolutní čas – univerzální parametr, všude stejně plynoucí, spojitý, rovnoměrný, jednosměrný a jednorozměrný, nezávislý na pohybujících se tělesech ani fyzikálních jevech $t \in \mathbb{R}$

Absolutní prostror – soubor míst, kde se mohou nacházet hmotné body, homogenní, izotropní, 3–dim. a eukleidovský, není ovlivněn přítomností těles ani fyzikálními jevy které v něm probíhají $(E_3, \varphi, (\vec{E}_3, g))$ afinní prostor se skalárním součinem $\vec{a} \cdot \vec{b} = g(\vec{a}, \vec{b})$ $g \in T_2^0(E_3)$ (je pouze pozadím, na kterém se tyto jevy dějí)

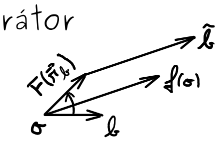
Pozn. Od absolutního prostoru a času (objektivní reality) Newton odlišoval relativní čas vnímaný (měřený) jako dobu nějakého pohybu (např. periodického) a relativní prostor určený vnímáním (měřením) vzdáleností a vzájemné polohy těles – zárodek vztažné soustavy. Newton také rozlišoval absolutní klid a pohyb (vzhledem k absolutnímu prostoru) a relativní pohyb vzhledem k ostatním tělesům. Naproti tomu Leibniz zastával názor, že prostor nemá smysl jinak než jako relativní poloha těles a čas jinak než jako relativní pohyb těles.

Symetrie eukleidovského prostoru

– jako aktivní transformace jsou afinní zobrazení zachovávající vzdálenost bodů $\rho(a,b) = \|b-a\| = \sqrt{(b-a)\cdot(b-a)}$

$\rho(a,b) = \rho(f(a), f(b)) = \|f(b) - f(a)\| = \|F(b-a)\| = \sqrt{F(b-a)\cdot F(b-a)}$ $\Rightarrow$ $F \in \mathcal{L}(E_3)$ je ortogonální operátor

$\tilde{b} = f(b) = f(o + (b-o)) = f(o) + F(b-o) + o - o = o + F(b-o) + f(o) - o = o + \underbrace{F(\vec{r}_b)}_{\text{rotace a zrcadlení}} + \underbrace{\vec{r}_{f(o)}}_{\text{translace}}$



$x^i(f(b)) = x^i(f(o)) + \mathbb{F}^i{}_j x^j(b)$ kde ${}^{\varepsilon}F^{\varepsilon} = (\mathbb{F}^i{}_j) = \mathbb{F} \in O(3)$

pokud je dána orientace, pak $\mathbb{F} \in SO(3)$

Eukleidova grupa $E(3) \cong \mathbb{R}^3 \rtimes O(3) \subset Aff(3)$ $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$

maticová reprezentace $\begin{pmatrix} \mathbb{F} & \vec{x}_0 \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\vec{r})_\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}(\vec{r})_\varepsilon + \vec{x}_0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

– jako pasivní transformace zachovávají metrický tenzor g (vzorec pro skalární součin) a slouží k přechodům mezi preferovanými (kartézskými) soustavami souřadnic a proto se typy veličin v mechanice obvykle klasifikují podle toho jak se jejich složky mění při $O(3)$-transformacích

Kartézská soustava souřadnic (KSS) $\langle o, \varepsilon = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rangle$ ε je ortonormální báze (pravotočivá x levotočivá)

skalární součin v KSS $\vec{a} \cdot \vec{b} = g(\vec{a}, \vec{b}) = \delta_{ij} a_i b_j = a^T b$ tj. metrický tenzor má v KSS tvar $g_{ij} = \delta_{ij}$ $\mathbb{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

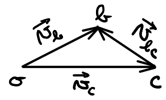
díky tomu jsou v KSS kovariantní a kontravariantní složky stejné $v_i = g_{ij} v^j = \delta_{ij} v^j = v^i$ navíc kovektory a vektory jsou při $O(3)$-transformacích nerozlišitelné a proto budeme v mechanice psát všechny indexy dolu

Přechod mezi KSS $\langle o, \varepsilon \rangle \to \langle \tilde{o} = o + \vec{w}, \tilde{\varepsilon} = \varepsilon \mathbb{S} \rangle$ $\mathbb{S} \in O(3)$ souřadnice $\tilde{x}_i(b) = (\mathbb{S}^{-1})_{ij}(x_j(b) - x_j(\tilde{o})) = \mathbb{S}_{ji}(x_j(b) - x_j(\tilde{o}))$

Vztažná soustava – tuhé hmotné těleso vůči němuž popisujeme polohu a pohyb zkoumaných těles
+ metoda měření času (obvykle pomocí periodických jevů – hodiny)
+ KSS jejíž počátek i osy jsou pevně spojeny s tělesem (tuhé měřicí tyče)

Kinematické veličiny – definované vzhledem ke vztažné soustavě reprezentované KSS $\langle o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rangle$

polohový vektor	$\vec{r} = b - o = x_i \vec{e}_i$	$(\vec{r})_\varepsilon = x$	relativní poloha	$\vec{r}_{bc} = \vec{r}_b - \vec{r}_c = b - o - (c - o) = b - c$
okamžitá rychlost	$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}_i \vec{e}_i$	$(\vec{v})_\varepsilon = \dot{x}$	rychlost	$\vec{v}_{bc} = \vec{v}_b - \vec{v}_c$
okamžité zrychlení	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}_i \vec{e}_i$	$(\vec{a})_\varepsilon = \ddot{x}$	zrychlení	$\vec{a}_{bc} = \vec{a}_b - \vec{a}_c$



Vztažné soustavy budeme reprezentovat pomocí KSS v afinním prostoru. Důležitý bude relativní (vzájemný) pohyb těchto soustav (nikoliv jejich pohyb vůči prostoru), proto při přechodech mezi nimi budeme vždy brát soustavu ze které přechod popisujeme za nehybnou a pohyb druhé vztahovat k ní.

1. **NZ** Těleso (hm. bod) na které nepůsobí vtištěné síly (pravé síly u kterých lze určit původce) se pohybuje rovnoměrně přímočaře tj. v KSS pro něj platí $x_i(t) = v_{0i} t + x_{0i} \Leftrightarrow \dot{x}_i(t) = v_{0i} \Leftrightarrow \ddot{x}_i(t) = 0 \quad \forall i \; \forall t$

Inerciální vztažná soustava – soustava v níž platí 1. NZ (tj. pro bezsilové hm. body $\ddot{x}(t) = 0$)

např. spojená se stálicemi, spojená se Zemí (je pro děje s trvající << 24h)

Transformace souřadnic mezi vztažnými soustavami $x = (\vec{r}(b))_\varepsilon \longrightarrow \tilde{x} = (\tilde{\vec{r}}(b))_{\tilde{\varepsilon}}$ $\tilde{\vec{r}}(b) = \vec{r}(b) - \vec{r}(\tilde{o})$

$\langle o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rangle$

$\langle \tilde{o}(t), (\tilde{\vec{e}}_1(t), \tilde{\vec{e}}_2(t), \tilde{\vec{e}}_3(t)) \rangle$

$\tilde{o}(t) = o + \vec{w}(t)$

$\tilde{\vec{e}}_j(t) = \vec{e}_i \mathbb{S}^i{}_j(t)$

$\mathbb{S}(t) \in O(3)$

$\tilde{x}_i = \mathbb{S}_{ji}(x_j - x_j(\tilde{o}))$

$\tilde{x} = \mathbb{S}^T(x - x(\tilde{o})) \quad / \mathbb{S} \cdot$

$\mathbb{S}\tilde{x} = x - x(\tilde{o}) \quad / \frac{d}{dt}$

$\dot{\mathbb{S}}\tilde{x} + \mathbb{S}\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{x}(\tilde{o}) \quad / \frac{d}{dt}$

$\ddot{\mathbb{S}}\tilde{x} + 2\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{x}} + \mathbb{S}\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}(\tilde{o})$

Jde–li o inerciální vztažné soustavy, pak musí pro každý bezsilový hm. bod platit $\ddot{x}(b) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\tilde{x}}(b) = 0$

$\Rightarrow \forall \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}$ $\quad \ddot{\mathbb{S}}\tilde{x} + 2\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{x}} = -\ddot{x}(\tilde{o}) \Rightarrow \ddot{x}(\tilde{o}) = 0 \quad \dot{\mathbb{S}}(t) = 0$

$\vec{w}(t) = \vec{W}t + \vec{x}_0 \quad \tilde{o}(t) = o + \vec{W}t + \vec{x}_0$ počátek se pohybuje rovnoměrně přímočaře

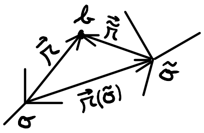
$\mathbb{S} =$ konst. $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i \mathbb{S}^i{}_j$ osy mohou být natočené, ale neotáčí se

Galileiho transformace $\langle \sigma, \mathcal{E}\rangle \to \langle \tilde\sigma = \sigma + \vec{w}t + \vec{x}_0, \tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\mathbb{S}\rangle$ Galileiho grupa $Gal(3) \cong \mathbb{R}^4 \rtimes E(3) \cong \mathbb{R}^4 \rtimes (\mathbb{R}^3 \rtimes O(3))$

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{x}_i &= \mathbb{S}_{ji}(x_j - w_j t - x_{0j})\\ \tilde{t} &= t - t_0\end{aligned}}$$

$\mathbb{S} \in O(3)$
$w, x_0 \in \mathbb{R}^3$
$t_0 \in \mathbb{R}$
$x = (\vec{\pi})_{\mathcal{E}}$ $\quad \tilde{x} = (\vec{\pi})_{\tilde{\mathcal{E}}}$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d(t - t_0)}$$



Maticová reprezentace pro aktivní transformace

$$\begin{pmatrix}\mathbb{S} & w & x_0\\ \vec{0}^T & 1 & t_0\\ \vec{0}^T & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ t\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{S}x + wt + x_0\\ t + t_0\\ 1\end{pmatrix}$$

$x = (\vec{\pi})_{\mathcal{E}}$
$w, x_0 \in \mathbb{R}^3$
$t_0 \in \mathbb{R}$
$\mathbb{S} \in O(3)$

Galileiho princip relativity – zákony mechaniky mají stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách.
- inerciální vztažné soustavy nelze mezi sebou rozlišit mechanickými experimenty v nich prováděnými
- pohybové rovnice úplné, izolované mechanické soustavy jsou ve všech inerciálních soustavách navzájem ekvivalentní (mají stejný systém řešení) jsou tzv. invariantní vůči Galileiho transformacím

Kovariantní tvar rovnice
- všechny členy rovnice se transformují stejným způsobem vzhledem k uvažované grupě transformací souřadnic, všechny veličiny se transformují určitou reprezentací této grupy
- rovnice zapsané pomocí tenzorů (nezávisí na volbě souřadnic)

2.NZ Změna pohybu je úměrná vtištěné síle a nastává ve směru přímky, podél níž síla působí.

v inerciální vztažné soustavě

setrvačná hmotnost → $m\vec{a} = \vec{F}$ ← vtištěná síla
↑okamžité zrychlení

m setrvačná = m gravitační – princip ekvivalence OTR

vektor: $m\vec{a}(t) = \vec{F}(\underbrace{\ell(t), t}_{})$ – vektorové pole
skalár
pro jednoduchost neuvažujem síly závislé na rychlosti

díky zápisu pomocí vektorů je $O(3)$-kovariantní navíc je $Gal(3)$-kovariantní, neboť při Galileiho tr. $\mathbb{S}$ = konst. $\quad \mathbb{S}\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}(\tilde\sigma) \Rightarrow \ddot{\tilde{\vec{\pi}}} = \ddot{\vec{\pi}} - \ddot{\vec{\pi}}(\tilde\sigma)$

$\ddot{\vec{\pi}}(\tilde\sigma) = (\vec{w}t + \vec{x}_0)^{\cdot\cdot} = 0 \Rightarrow \tilde{\vec{a}} = \vec{a}$ derivace v různých VS

a tedy v $\langle\tilde\sigma, \tilde{\mathcal{E}}\rangle$ má stejný tvar $m\tilde{\vec{a}}(t) = \tilde{\vec{F}}(\ell(t), t)$

v neinerciální soustavě $m\ddot{\tilde{x}}_i = \tilde{F}_i + \tilde{Z}_i$ zdánlivé (setrvačné) síly

$$m\ddot{x} = m[\ddot{\mathbb{S}}\tilde{x} + 2\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{x}} + \mathbb{S}\ddot{\tilde{x}} + \ddot{x}(\tilde\sigma)] = F = \mathbb{S}\tilde{F} \quad / \mathbb{S}^T = \mathbb{S}^{-1}$$

$$m\mathbb{S}^T\ddot{\mathbb{S}}\tilde{x} + m2\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{x}} + m\mathbb{S}^T\mathbb{S}\ddot{\tilde{x}} + m\mathbb{S}^T\ddot{x}(\tilde\sigma) = \mathbb{S}^T\mathbb{S}\tilde{F} = \tilde{F}$$

$$\boxed{m\ddot{\tilde{x}} = \tilde{F} - m\mathbb{S}^T\ddot{x}(\tilde\sigma) - 2m\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{x}} - m\mathbb{S}^T\ddot{\mathbb{S}}\tilde{x}} \; *$$

$$\mathbb{S}^T\mathbb{S} = \mathbb{1} \;/\frac{d}{dt} \qquad \mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} + \dot{\mathbb{S}}^T\mathbb{S} = 0 \Rightarrow \dot{\mathbb{S}}^T\mathbb{S} = -\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}$$

$$\tilde\omega^T = (-\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})^T = -\dot{\mathbb{S}}^T\mathbb{S} = \mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = -\tilde\omega \quad \text{antisymetrický}$$

Antisymetrickému tenzoru 2. řádu na E_3 lze přiřadit pseudovektor (pomocí tzv. Hodgeova operátoru) předpisem (v pravotočivé ON bázi) $\tilde\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\tilde\Omega_k$

$$\varepsilon_{ijl}\tilde\omega_{ij} = \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{ijk}\tilde\Omega_k = 2\delta_{lk}\tilde\Omega_k = 2\tilde\Omega_l$$

označíme $\tilde\omega = -\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}$ tenzor úhlové rychlosti v bázi $\tilde{\mathcal{E}}$
jde o matici, mělo by se psát $\tilde{\underline{\omega}}$

Úhlová rychlost $\vec{\Omega}$

$$\boxed{\tilde\Omega_l = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijl}\tilde\omega_{ij} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{lij}(\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})_{ij}}$$

složky pseudovektoru úhlové rychlosti rotace $\langle\tilde\sigma, \tilde{\mathcal{E}}\rangle$ vůči soustavě $\langle\sigma, \mathcal{E}\rangle$ v bázi $\tilde{\mathcal{E}}$

$$\tilde\Omega = \begin{pmatrix}\tilde\omega_{23}\\ -\tilde\omega_{13}\\ \tilde\omega_{12}\end{pmatrix} \longleftrightarrow \tilde\omega = \begin{pmatrix}0 & \tilde\omega_{12} & \tilde\omega_{13}\\ -\tilde\omega_{12} & 0 & \tilde\omega_{23}\\ -\tilde\omega_{13} & -\tilde\omega_{23} & 0\end{pmatrix}$$
antisymetrická matice má tři nezávislé prvky

Působení antisymetrického $\tilde\omega$ tenzoru na složky lib. vektoru $\tilde\omega_{ij}\tilde{y}_j = \varepsilon_{ijk}\tilde\Omega_k\tilde{y}_j = -\varepsilon_{ikj}\tilde\Omega_k\tilde{y}_j = -(\tilde\Omega \times \tilde{y})_i$

Maticově
$$\boxed{\tilde\omega\tilde{y} = -\tilde\Omega \times \tilde{y}}$$

Tenzorově – metrická forma objemu: úplně antisymetrický tenzor $\sigma \in T^0_3(E_3)$ který na pravotočivé ON bázi $\sigma(\vec{\mathcal{E}}_1, \vec{\mathcal{E}}_2, \vec{\mathcal{E}}_3) = 1$
$\vec{\Omega} \times \vec{y} = g^{-1}(\cdot, \sigma(\vec{\Omega}, \vec{y}, \cdot))$

upravíme členy rovnice $*$: $-m\mathbb{S}^T\ddot{x}(\tilde\sigma) = \tilde{F}_s$ Setrvačná síla

$$-2m\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{x}} = 2m\tilde\omega\dot{\tilde{x}} = -2m\tilde\Omega \times \dot{\tilde{x}} = \tilde{F}_c \quad \text{Coriolisova síla}$$

$$\mathbb{S}^T\ddot{\mathbb{S}} = (\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})^{\cdot} - \dot{\mathbb{S}}^T\dot{\mathbb{S}} = -\dot{\tilde\omega} - \dot{\mathbb{S}}^T\mathbb{S}\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = -\dot{\tilde\omega} + \mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = -\dot{\tilde\omega} + \tilde\omega\tilde\omega$$

$$-m\mathbb{S}^T\ddot{\mathbb{S}}\tilde{x} = -m(-\dot{\tilde\omega} + \tilde\omega\tilde\omega)\tilde{x} = m\dot{\tilde\omega}\tilde{x} - m\tilde\omega\tilde\omega\tilde{x} = -m\dot{\tilde\Omega} \times \tilde{x} - m\tilde\Omega \times (\tilde\Omega \times \tilde{x}) = \tilde{F}_E + \tilde{F}_\sigma \quad \text{Eulerova+Odstředivá síla}$$

$*$ Vektorově $m\tilde{\vec{a}} = \vec{F} - m\vec{a}_s - m2\vec{\Omega} \times \tilde{\vec{v}} - m\vec{\mathcal{E}} \times \tilde{\vec{\pi}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \tilde{\vec{\pi}}) = \vec{F} - m\vec{a}_s - m\vec{a}_c - m\vec{a}_E - m\vec{a}_d$

Pozn. $(\vec{\mathcal{E}})_{\tilde{\mathcal{E}}} = \tilde{\mathcal{E}} = \dot{\tilde\Omega}$
$(\vec{\mathcal{E}})_{\mathcal{E}} = \mathcal{E} = \dot{\Omega}$

Symetrie Newtonových pohybových rovnic $m\ddot{x}^k = F^k(x, t)$

Symetrie systému rovnic je transformace (bijekce) jeho definičního oboru, která zobrazuje každé jeho řešení na řešení. Při pasivní interpretaci této transformace to znamená, že symetrie systému rovnic je transformace, která jej změní na systém ekvivalentní (tj. systém se stejnou množinou řešení). Budeme nyní uvažovat pouze (pasivní) symetrie dané změnami souřadnic: $x^k = \hat{x}^k(y, t) \in C^2$

$$\dot{x}^k = \dot{\hat{x}}^k(y, \dot{y}, t) = \frac{\hat{d}}{dt}\hat{x}^k(y, t) = \frac{\partial\hat{x}^k}{\partial y^a}\dot{y}^a + \frac{\partial\hat{x}^k}{\partial t}$$

$$\ddot{x}^k = \frac{\partial\hat{x}^k}{\partial y^a}\ddot{y}^a + \left(\frac{\partial^2\hat{x}^k}{\partial y^b\partial y^a}\dot{y}^b + \frac{\partial^2\hat{x}^k}{\partial t\partial y^a}\right)\dot{y}^a + \left(\frac{\partial^2\hat{x}^k}{\partial y^a\partial t}\dot{y}^a + \frac{\partial^2\hat{x}^k}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial\hat{x}^k}{\partial y^a}\ddot{y}^a + \frac{\partial^2\hat{x}^k}{\partial y^a\partial y^b}\dot{y}^a\dot{y}^b + 2\frac{\partial^2\hat{x}^k}{\partial y^a\partial t}\dot{y}^a + \frac{\partial^2\hat{x}^k}{\partial t^2}$$

$$m\left[\frac{\partial\hat{x}^k}{\partial y^a}\ddot{y}^a + \frac{\partial^2\hat{x}^k}{\partial y^a\partial y^b}\dot{y}^a\dot{y}^b + 2\frac{\partial^2\hat{x}^k}{\partial y^a\partial t}\dot{y}^a + \frac{\partial^2\hat{x}^k}{\partial t^2}\right] = F^k(x, t) \;/ \cdot\frac{\partial\hat{y}^l}{\partial x^k} = (\mathbb{S}^{-1})^l_k \quad \text{ekvivalentní úprava}$$

$$\frac{\partial\hat{y}^l}{\partial x^k}\frac{\partial\hat{x}^k}{\partial y^a} = \frac{\partial y^l}{\partial y^a} = \delta^l_a$$

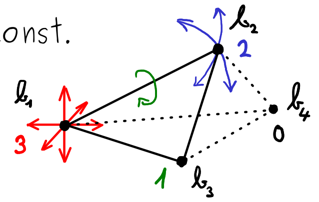
$$m\ddot{y}^l + m\frac{\partial\hat{y}^l}{\partial x^k}\underbrace{\left[\frac{\partial^2\hat{x}^k}{\partial y^a\partial y^b}\dot{y}^a\dot{y}^b + 2\frac{\partial^2\hat{x}^k}{\partial y^a\partial t}\dot{y}^a + \frac{\partial^2\hat{x}^k}{\partial t^2}\right]}_{} = \frac{\partial\hat{y}^l}{\partial x^k}F^k(x, t) = \tilde{F}^l(y, t)$$

polynom 2. stupně v $\dot{y}$ $= 0 \;\forall\dot{y} \Rightarrow$ lineární transformace

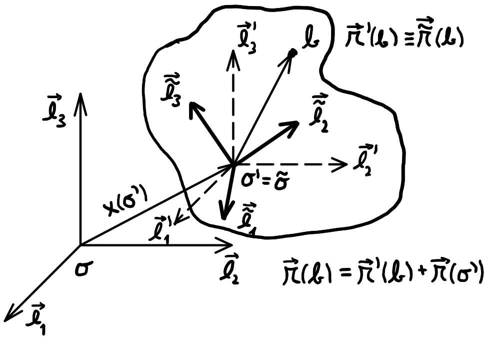
transformace bude symetrií, pokud pro libovolnou rychlost vypadne polynom v závorce na levé straně a současně bude symetrií vektorového pole vpravo tj. bude-li $\tilde{F}^l$ stejnou funkcí od y, t jako F^l od x, t

Mechanika tuhého tělesa

vazby $|b_\alpha - b_\beta| = |\vec{r}_{\alpha\beta}| = \text{konst.}$



Tuhé těleso
- model reálného tělesa, nepodléhá deformacím
- aproximujeme soustavou hm. bodů o neměných vzdálenostech
- má $s = 6$ stupňů volnosti (3 translační + 3 rotační)



$\vec{r}(b) = \vec{r}'(b) + \vec{r}(\sigma')$

inerciální VS (laboratorní)	VS hmotného středu (těžišťová)	VS pevně spojená s tělesem (tělesová)
$\langle \sigma, \mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rangle$ $\longrightarrow$	$\langle \sigma'(t), \mathcal{E}' = \mathcal{E} \rangle$ $\longrightarrow$	$\langle \tilde{\sigma}(t) = \sigma'(t), \tilde{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}\, \mathbb{S}(t) \rangle$

translace $\sigma'(t) = \sigma + \vec{R}(t)$ $\qquad$ rotace $\tilde{\vec{e}}_i = \vec{e}_j \mathbb{S}_{ji}(t)$ $\quad \mathbb{S}(t) \in SO(3)$

$x'(b) = x(b) - x(\sigma')$ $\qquad$ $\tilde{x}(b) = \mathbb{S}^T x'(b) = \mathbb{S}^T (x(b) - x(\tilde{\sigma}))$

inverze $x(b) = \mathbb{S}\tilde{x}(b) + x(\tilde{\sigma})$

Body tělesa b_α indexujeme řeckými indexy a pro jejich souřadnice $x_\alpha = x(b_\alpha)$ v různých VS platí

$$\dot{x}(b_\alpha) = \dot{x}_\alpha = \dot{\mathbb{S}}\tilde{x}_\alpha + \mathbb{S}\underbrace{\dot{\tilde{x}}_\alpha}_{0} + \dot{x}(\tilde{\sigma}) = \underbrace{\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T}_{-\omega} x'_\alpha + \dot{x}(\tilde{\sigma}) = \underbrace{\Omega \times x'_\alpha}_{\dot{x}'_\alpha} + \dot{x}(\sigma') = \Omega \times (x_\alpha - x(\tilde{\sigma})) + \dot{x}(\tilde{\sigma})$$

body tělesa jsou v soustavě $\langle \tilde{\sigma}, \tilde{\mathcal{E}} \rangle$ v klidu; $-\omega$ nezávisí na volbě počátku $\sigma' = \tilde{\sigma}$; $\dot{x}'_\alpha$ rychlost vůči $\langle \sigma', \mathcal{E}' \rangle$

Transformace
$\omega' = \omega \qquad \Omega' = \Omega$
$\tilde{\omega} = \mathbb{S}^T \omega' \mathbb{S} \qquad \tilde{\Omega} = \mathbb{S}^T \Omega'$

Tenzor úhlové rychlosti $\omega = -\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T$ je antisymetrický $\omega^T = (-\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T)^T = -\mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T = -\omega$ $\qquad$ Dk. $\mathbb{S}\mathbb{S}^T = \mathbb{1} \;/ \frac{d}{dt}$

Přiřadíme mu pseudovektor úhlové rychlosti, tak aby platilo $-\omega x'_\alpha = \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T x'_\alpha = \Omega \times x'_\alpha \quad \forall x'_\alpha \in \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T + \mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = 0$

$\mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = -\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T$

Úhlová rychlost $\vec{\Omega}$

$$\boxed{\Omega_l = \frac{1}{2}\varepsilon_{lik}\,\omega_{ik} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{lik}(\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T)_{ik}}$$

složky pseudovektoru úhlové rychlosti rotace tělesa (VS $\langle \tilde{\sigma}, \tilde{\mathcal{E}} \rangle$) vůči inerciální VS $\langle \sigma, \mathcal{E} \rangle$ v bázi $\mathcal{E}$

dříve bylo $\tilde{\Omega}_l = -\frac{1}{2}\varepsilon_{lik}(\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})_{ik}$ složky vektoru $\vec{\Omega}$ v bázi $\tilde{\mathcal{E}}$

Pohyb bodu b_α tělesa je složením translace počátku $\sigma' = \tilde{\sigma}$ a rotace kolem tohoto počátku

$\dot{x}_\alpha = \Omega \times (x_\alpha - x(\tilde{\sigma})) + \dot{x}(\tilde{\sigma}) = \Omega \times x'_\alpha + \dot{x}(\sigma') \quad \forall \alpha \in \hat{N}$ $\Rightarrow$ Úhlová rychlost nezávisí na volbě počátku σ' a je stejná pro všechny body tělesa

Kinetická energie tuhého tělesa

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_\alpha^2 = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \left(\Omega \times x'_\alpha + \dot{x}(\sigma')\right)^2 = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}(\sigma')^2 + \sum_\alpha m_\alpha (\Omega \times x'_\alpha)\cdot \dot{x}(\sigma') + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\Omega \times x'_\alpha)^2 =$$

$$(\Omega \times x'_\alpha)^2 = (\mathbb{S}\tilde{\Omega} \times \mathbb{S}\tilde{x}_\alpha)^2 \underset{\mathbb{S} \in SO(3)}{=} (\mathbb{S}(\tilde{\Omega} \times \tilde{x}_\alpha))^2 = (\tilde{\Omega} \times \tilde{x}_\alpha)^2 = \varepsilon_{ijk}\tilde{\Omega}_j \tilde{x}_{\alpha k}\,\varepsilon_{ilm}\tilde{\Omega}_l \tilde{x}_{\alpha m} = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\tilde{\Omega}_j \tilde{x}_{\alpha k}\tilde{\Omega}_l \tilde{x}_{\alpha m}$$
$$= (\delta_{jl}\tilde{x}_{\alpha k}^2 - \tilde{x}_{\alpha j}\tilde{x}_{\alpha l})\tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_l$$

skalární součin můžeme psát i pomocí transpozice

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\sum_\alpha m_\alpha}_{M} \dot{x}(\sigma')^2 + \Big[\Omega \times \underbrace{\Big(\sum_\alpha m_\alpha x'_\alpha\Big)}_{MR'}\Big]\cdot \dot{x}(\sigma') + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_\alpha m_\alpha (\delta_{jl}\tilde{x}_{\alpha k}^2 - \tilde{x}_{\alpha j}\tilde{x}_{\alpha l})}_{\tilde{I}_{jl}}\tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_l = \frac{1}{2} M\dot{x}(\sigma')^2 + M(\Omega \times R')\cdot \dot{x}(\sigma') + \frac{1}{2}\tilde{I}_{jl}\tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_l$$

$\tilde{I}_{jl}$ tenzor momentu setrvačnosti v tělesové soustavě

Věta: Buď $\sigma' \equiv \tilde{\sigma}$ hmotný střed tělesa (HMS), pak $\boxed{T = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_{jk}\tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_k}$ kinetická energie translace HMS + energie rotace vůči HMS

Dk. $x(\sigma') = R \qquad R' = 0$

Tenzor momentu setrvačnosti $\tilde{I}_{jk} = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{jk}\tilde{x}_\alpha^2 - \tilde{x}_{\alpha j}\tilde{x}_{\alpha k})$ $\qquad$ maticově $\tilde{\mathbb{I}} = \sum_\alpha m_\alpha [(\tilde{x}_\alpha^T \tilde{x}_\alpha)\mathbb{1} - \tilde{x}_\alpha \tilde{x}_\alpha^T]$

skalární a tenzorový součin

$\tilde{I}_{jk} = \int_V \rho(\tilde{x})(\delta_{jk}\tilde{x}_l\tilde{x}_l - \tilde{x}_j\tilde{x}_k)\,dV$ pro spojité rozložení hmoty $\qquad$ tenzorově $\tilde{I} = \sum_\alpha m_\alpha [(\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha)\hat{1} - \vec{r}_\alpha \otimes \vec{r}_\alpha]$

Transformace $\tilde{I}_{jk} = I'_{lm}\mathbb{S}_{lj}\mathbb{S}_{mk} \qquad \mathbb{S} \in SO(3) \qquad \tilde{\mathbb{I}} = \mathbb{S}^T \mathbb{I}' \mathbb{S} \qquad \mathbb{I}'(t) = \mathbb{S}(t)\tilde{\mathbb{I}}\mathbb{S}^T(t)$ v soustavě HMS závisí na čase

Tenzor momentu setrvačnosti je symetrický $\tilde{I}_{jk} = \tilde{I}_{kj}$ a proto diagonalizovatelný v ON bázi $\tilde{\tilde{\mathcal{E}}} = \tilde{\mathcal{E}}\mathbb{D}$ $\quad \mathbb{D} \in SO(3)$
osy tělesové soustavy odpovídající vektorům této báze se nazývají hlavní osy setrvačnosti a diagonální členy $\tilde{\tilde{I}}_1, \tilde{\tilde{I}}_2, \tilde{\tilde{I}}_3$ hlavními momenty setrvačnosti (dvě vlnky se vynechávají) $\tilde{\tilde{\mathbb{I}}} = \mathbb{D}^T \tilde{\mathbb{I}} \mathbb{D}$ $\qquad \tilde{\tilde{\mathbb{I}}} = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{I}}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\tilde{I}}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\tilde{I}}_3 \end{pmatrix}$

Nediagonální složky $\tilde{I}$ se nazývají deviační momenty.

Rotace $\vec{\Omega} = |\vec{\Omega}|\vec{m}$ vzhledem k pevné ose $\vec{m}$ jdoucí počátkem v $\langle \tilde{\sigma}, \tilde{\mathcal{E}} \rangle$

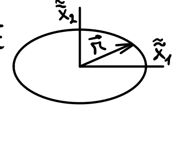
kin. energie v soustavě hm. středu $\langle \sigma', \mathcal{E} \rangle$

$$T' = \frac{1}{2}\tilde{I}_{jk}\tilde{\Omega}_j\tilde{\Omega}_k = \frac{1}{2}\underbrace{\tilde{I}_{jk}\tilde{m}_j\tilde{m}_k}_{\text{moment setrvačnosti vzhledem k ose } \vec{m}}|\vec{\Omega}|^2 = \frac{1}{2}I_{\vec{m}}|\vec{\Omega}|^2$$

Elipsoid setrvačnosti (v hlavních osách)

$1 = x^T \mathbb{I} x = \sum I_i x_i^2 = |\vec{r}|^2 \sum I_i m_i^2$

$1 = |\vec{r}|^2 I_{\vec{m}} \quad \Rightarrow \quad I_{\vec{m}} = \frac{1}{|\vec{r}|^2}$



Pozn. Steinerova věta – posunutí počátku tělesové soustavy do jiného bodu tělesa $\tilde{\sigma}+\vec{a}$ $\quad \tilde{\vec{r}}_\alpha = \vec{r}_\alpha + \vec{a}$

$$\tilde{\mathbb{I}} = \sum_\alpha m_\alpha[(\tilde{\vec{r}}_\alpha\cdot\tilde{\vec{r}}_\alpha)\hat{1} - \tilde{\vec{r}}_\alpha\otimes\tilde{\vec{r}}_\alpha] = \mathbb{I} + \sum_\alpha m_\alpha[2(\vec{r}_\alpha\cdot\vec{a})\hat{1} - \vec{r}_\alpha\otimes\vec{a} - \vec{a}\otimes\vec{r}_\alpha] + M[\vec{a}\cdot\vec{a}\,\hat{1} - \vec{a}\otimes\vec{a}] = \mathbb{I} + M[(2\underset{-\vec{a}}{\vec{R}}\cdot\vec{a})\hat{1} - \vec{R}\otimes\vec{a} - \vec{a}\otimes\vec{R}] + M[\vec{a}\cdot\vec{a}\,\hat{1} - \vec{a}\otimes\vec{a}] = \mathbb{I} - M(\vec{a}\cdot\vec{a}\,\hat{1} - \vec{a}\otimes\vec{a})$$

Pohyb tuhého tělesa = translační pohyb jeho hmotného středu $(\langle\sigma,\mathcal{E}\rangle \to \langle\sigma'(t),\mathcal{E}\rangle)$
složený s rotačním pohybem vůči hm. s. $(\langle\sigma',\mathcal{E}\rangle \to \langle\sigma',\tilde{\mathcal{E}}(t)\rangle)$ $\Big\}$ neznámé $\quad R(t) = ?\quad \mathbb{S}(t) = ?$

1. Věta Impulsová v inerciální soustavě $\quad \dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(e)} \quad \vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = M\dot{\vec{R}} \quad \boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}}$

2. Věta Impulsová v soustavě hmotného středu $\quad \dot{\vec{L}}' = \vec{N}'^{(e)}$ ← převedeme ji do soustavy tělesové

$$(\vec{L}')_i^{\mathcal{E}'} = \Big(\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}'_\alpha \times \dot{\vec{r}}'_\alpha\Big)_i^{\mathcal{E}'} = \Big(\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}'_\alpha \times (\vec{\Omega}\times\vec{r}'_\alpha)\Big)_i^{\mathcal{E}'} = \sum_\alpha m_\alpha \varepsilon_{ijk} X'_{\alpha j}\varepsilon_{klm}\Omega_l X'_{\alpha m} = \sum_\alpha m_\alpha(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})X'_{\alpha j}X'_{\alpha m}\Omega_l =$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha(\delta_{il}X'_{\alpha j}X'_{\alpha j} - X'_{\alpha i}X'_{\alpha l})\Omega_l = \mathrm{I}'_{il}\Omega_l = (\mathbb{I}'\Omega)_i = (\mathbb{I}'\vec{\Omega})_i^{\mathcal{E}'}$$
← v bázi $\mathcal{E}'$
← i–tá složka

Moment hybnosti v soustavě HMS $\quad \vec{L}' = \mathbb{I}'\vec{\Omega}' \quad (\vec{L}')_{\mathcal{E}'} = L' = \mathbb{I}'\Omega' = \mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\mathbb{S}^T\mathbb{S}\tilde{\Omega} = \mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\Omega} = \mathbb{S}(\vec{L}')_{\tilde{\mathcal{E}}}$

Pozn. $\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\Omega} \neq \tilde{L} = 0$

$$\dot{L}' = (\mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\Omega})^\cdot = \dot{\mathbb{S}}\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\Omega} + \mathbb{S}\underset{=0}{\dot{\tilde{\mathbb{I}}}}\tilde{\Omega} + \mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\dot{\tilde{\Omega}} \underset{\text{2.V.I.}}{=} N'^{(e)} = \sum_\alpha X'_\alpha \times F'^{(e)}_\alpha = \sum_\alpha(\mathbb{S}\tilde{X}_\alpha \times \mathbb{S}\tilde{F}^{(e)}_\alpha) = \mathbb{S}\Big(\sum_\alpha \tilde{X}_\alpha\times\tilde{F}^{(e)}_\alpha\Big) = \mathbb{S}\tilde{N}^{(e)} \quad /\mathbb{S}^T$$

$$\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\Omega} + \mathbb{S}^T\mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\dot{\tilde{\Omega}} = \mathbb{S}^T\mathbb{S}\tilde{N}^{(e)} \quad /\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = -\tilde{\omega} = \tilde{\Omega}\times$$

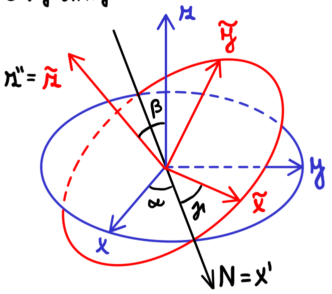
$$\tilde{\Omega}\times(\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\Omega}) + \tilde{\mathbb{I}}\dot{\tilde{\Omega}} = \tilde{N}^{(e)}$$

Eulerovy setrvačníkové rovnice $\quad \forall i = 1,2,3 \quad \boxed{\tilde{\mathrm{I}}_{ij}\dot{\tilde{\Omega}}_j + \varepsilon_{ijk}\tilde{\Omega}_j\tilde{\mathrm{I}}_{kl}\tilde{\Omega}_l = N_i^{(e)}}$

Eulerovy setrvačníkové rovnice v hlavních osách setrvačnosti $\quad \boxed{\tilde{\tilde{\mathrm{I}}}_i\dot{\tilde{\tilde{\Omega}}}_i + \sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\tilde{\tilde{\Omega}}_j\tilde{\tilde{\mathrm{I}}}_k\tilde{\tilde{\Omega}}_k = \tilde{\tilde{N}}_i^{(e)} \qquad \forall i = 1,2,3}$

vlnky se obvykle vynechávají

Eulerovy úhly



osy

$\mathcal{E} \sim (x,y,z)$ otočení o α kolem osy z $\quad \mathcal{E}' = \mathcal{E}\,\mathbb{S}(\alpha) \quad \mathbb{S}(\alpha) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\mathcal{E}' \sim (x',y',z')$ otočení o β kolem osy x' $\quad \mathcal{E}'' = \mathcal{E}'\,\mathbb{S}(\beta) \quad \mathbb{S}(\beta) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta\\ 0 & \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$

$\mathcal{E}'' \sim (x'',y'',z'')$ otočení o γ kolem osy z'' $\quad \hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}''\,\mathbb{S}(\gamma) \quad \mathbb{S}(\gamma) = \begin{pmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\tilde{\mathcal{E}} \sim (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}''\mathbb{S}(\gamma) = \mathcal{E}'\mathbb{S}(\beta)\mathbb{S}(\gamma) = \mathcal{E}\underbrace{\mathbb{S}(\alpha)\mathbb{S}(\beta)\mathbb{S}(\gamma)}_{\mathbb{S}}$$

matice přechodu od báze $\mathcal{E}$ k bázi $\tilde{\mathcal{E}}$

$(z,\tilde{z},N)$ pravotočivá soustava

$$\begin{pmatrix}0 & \tilde{\Omega}_3 & -\tilde{\Omega}_2\\ & 0 & \tilde{\Omega}_1\\ & & 0\end{pmatrix} = \tilde{\omega} = -\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = \ldots = \begin{pmatrix}0 & \dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta & \dot{\beta}\sin\gamma - \dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma\\ & 0 & \dot{\beta}\cos\gamma + \dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma\\ & & 0\end{pmatrix}$$

Jinak (Euler)

$$\vec{\Omega} = \dot{\alpha}\vec{e}_3 + \dot{\beta}\vec{e}'_1 + \dot{\gamma}\tilde{\vec{e}}_3$$

$$(\vec{\Omega})_{\tilde{\mathcal{E}}} = \dot{\alpha}(\vec{e}_3)_{\tilde{\mathcal{E}}} + \dot{\beta}(\vec{e}'_1)_{\tilde{\mathcal{E}}} + \dot{\gamma}(\tilde{\vec{e}}_3)_{\tilde{\mathcal{E}}} = \tilde{\Omega}$$

$$(\tilde{\vec{e}}_3)_{\tilde{\mathcal{E}}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad (\vec{e}'_1)_{\tilde{\mathcal{E}}} = \begin{pmatrix}\cos\gamma\\-\sin\gamma\\0\end{pmatrix} \quad (\vec{e}_3)_{\tilde{\mathcal{E}}} = \begin{pmatrix}\sin\beta\sin\gamma\\ \sin\beta\cos\gamma\\ \cos\beta\end{pmatrix} \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix}\dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma\\ \dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma\\ \dot{\alpha}\cos\beta + \dot{\gamma}\end{pmatrix}$$

$z \perp N \wedge \tilde{z} \perp N \Rightarrow$ projekce z do roviny $\tilde{x},\tilde{y}$ je kolmá na N $\quad \cos(\frac{\pi}{2}-\gamma) = \sin\gamma \quad \sin(\frac{\pi}{2}-\gamma) = \cos\gamma$

Pohyby: Precese $\alpha = \alpha(t) \wedge \beta,\gamma$ konst. $\qquad$ Nutace $\beta = \beta(t) \wedge \alpha,\gamma$ konst. $\qquad$ Rotace $\gamma = \gamma(t) \wedge \alpha,\beta$ konst.

Setrvačníky volné $(\vec{N}^{(e)} = 0)$ – řešitelné analyticky

1) volný sférický $(\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_3)$ setrvačník $\qquad$ Euler rce. $\quad \mathrm{I}_j\dot{\Omega}_j = 0 \quad \forall j = 1,2,3 \Rightarrow \Omega(t) = $ konst.

2) volný symetrický $(\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2 \neq \mathrm{I}_3)$ setrvačník

$$\mathrm{I}_1\dot{\Omega}_1 + (\mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_2)\Omega_2\Omega_3 = 0 \quad /\frac{d}{dt}$$
$$\mathrm{I}_2\dot{\Omega}_2 + (\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_3)\Omega_3\Omega_1 = 0 \quad \Rightarrow \dot{\Omega}_2 = \frac{(\mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_1)}{\mathrm{I}_1}\Omega_1\Omega_3$$
$$\mathrm{I}_3\dot{\Omega}_3 + \underbrace{(\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_3)}_{=0}\Omega_3\Omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \mathrm{I}_3\dot{\Omega}_3 = 0 \Rightarrow \Omega_3(t) = \text{konst.}$$

$$\mathrm{I}_1\ddot{\Omega}_1 + (\mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_1)\dot{\Omega}_2\Omega_3 = 0$$
$$\ddot{\Omega}_1 + \underbrace{\frac{(\mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_1)^2\Omega_3^2}{\mathrm{I}_1^2}}_{\nu^2 > 0}\Omega_1 = 0$$

řešení

$\Omega_1(t) = A\cos(\nu t + \varphi)$
$\Omega_2(t) = A\sin(\nu t + \varphi)$
$\Omega_3(t) = $ konst.

3) volný asymetrický $(\mathrm{I}_1 \neq \mathrm{I}_2 \neq \mathrm{I}_3 \neq \mathrm{I}_1)$ setrvačník – řešení pomocí eliptických funkcí

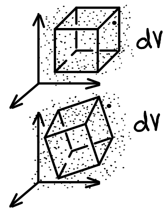
Setrvačníky těžké $(\vec{N}^{(e)} \neq 0)$ – řešitelné případy: vyvážený setrvačník s nehybným těžištěm (Euler)
symetrický setrvačník s pevným bodem na hlavní ose rotace $\tilde{z}$ pod těžištěm (Lagrange)
symetrický setrvačník $(\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2 = 2\mathrm{I}_3)$ s pevným bodem v rovině z',y' (Kovalevská)

Pozn. k úplnému vyřešení úlohy o pohybu tuhého tělesa je třeba z 1. VI spočíst $R(t)$, najít řešení eulerových setrvačníkových rovnic $\tilde{\Omega}(t)$ a nakonec vyřešit soustavu ODR 1. řádu $\tilde{\Omega}_l = -\frac{1}{2}\varepsilon_{lik}(\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})_{ik}$ a najít tak $\mathbb{S}(t)$

Mechanika kontinua

Modely: hm. bod (zanedbatelné rozměry) → tuhé těleso (neměnné vzdálenosti) → kontinuum (spojitost)

$s = 3$ $\quad s = 6$ $\quad s = 3N \to +\infty$



Spojitý model látky – objemy dV (případně plošky dS) v látce uvažujeme tak malé, aby v nich bylo možné její makroskopické vlastnosti považovat za konstantní a současně tak velké, aby obsahovaly dostatek elementárních částic (atomů) kterými je látka tvořena tj. tak aby např. hustota ρ v daném místě látky nezávisela na tom jak konkrétně objem dV zvolíme.

Síly působící na objem dV tělesa (pružného, plastického, tekutého)

1) objemové – působí na celé těleso, závisí na objemu a např. hmotnostní či nábojové hustotě,

$d\vec{F}^{(o)} = \vec{f}\,dV$ pro zvolený objem a zpravidla i celé těleso vnější síly, např. tíhová síla

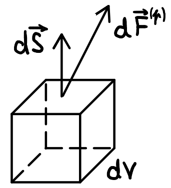
př. hustota tíhové síly $\vec{f}_g = \rho\vec{g}$

$\vec{f}(\vec{r},t)$ objemová hustota síly

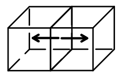
celková objemová síla na těleso $\vec{F}^{(o)} = \int_V d\vec{F}^{(o)} = \int_V \vec{f}\,dV$

celkový moment objemové síly $\vec{M}^{(o)} = \int_V \vec{r}\times\vec{f}\,dV$

2) plošné – síly kterými působí na objem dV ostatní (sousední) body tělesa, předpokládáme, že působí na vzdálenosti řádově stejné jako vzdálenosti sousedních atomů či molekul tj. mezi body ležícími na opačných stranách plochy ohraničující objem dV, vnitřní síly působící v tělese



celková plošná síla na těleso $\vec{F}^{(p)} = \int_S d\vec{F}^{(p)}$



3. NZ. akce a reakce: plošné síly uvnitř tělesa se navzájem vyruší

celkový moment plošných sil $\vec{M}^{(p)} = \int_S \vec{r}\times d\vec{F}^{(p)} = \int_S \vec{r}\times\vec{T}\,dS$

kde $dS = |d\vec{S}|$ velikost plošky

$d\vec{S} = \vec{n}|d\vec{S}| = \vec{n}\,dS$ normála míří ven z objemu

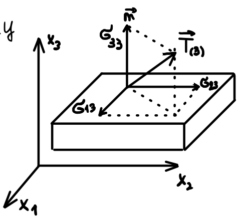
$\vec{T}$ vektor napětí – síla $d\vec{F}^{(p)}$ vztažená na velikost plochy $d\vec{S}$ $\quad d\vec{F}^{(p)} = \vec{T}\,dS$

Plošná síla $d\vec{F}^{(p)}$ závisí na poloze, čase a zvolené plošce $d\vec{S}$

$$dF_i^{(p)}(\vec{r},t,d\vec{S}) = \underbrace{dF_i^{(p)}(\vec{r},t,\vec{0})}_{0} + \underbrace{\left.\frac{\partial F_i^{(p)}}{\partial S_j}\right|_{dS=0}}_{\sigma_{ij}(\vec{r},t)} dS_j + \underbrace{o(|d\vec{S}|^2)}_{\text{moc malé}} \doteq \sigma_{ij}(\vec{r},t)\,dS_j = \sigma_{ij}(\vec{r},t)\,n_j\,dS$$

přes nulovou plochu síla nepůsobí

– Taylorův rozvoj podle malé plošky



Tenzor napětí – tenzorové pole $\sigma(\vec{r},t)$ definované v každém bodě kontinua $dF_i^{(p)} = \sigma_{ij}dS_j$ nebo $T_i = \sigma_{ij}n_j$

Pohybová rovnice kontinua

Celková síla působící na objem V tělesa, složky:

$$F_i = F_i^{(o)} + F_i^{(p)} = \int_V f_i\,dV + \oint_{S=\partial V}\sigma_{ij}dS_j = \int_V f_i\,dV + \int_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}dV = \int_V f_i + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}dV$$

Pozn. $\boxed{\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega}\omega}$ divergenční věta Gauss, Stokes

divergence $\underbrace{\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}dV}_{d\omega} = \underbrace{\sigma_{ij}dS_j}_{\omega}$

na elementární objem dV působí síla $dF_i = \left(f_i + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)dV$

změna hybnosti elementu $dm = \rho\,dV$

$$\frac{d}{dt}p_i = \frac{d}{dt}(v_i\,dm) = \dot{v}_i\,dm = \dot{v}_i\,\rho\,dV = a_i\rho\,dV$$

s časem se mění hustota i objem elementu, ale hmotnost zůstává stejná $dm = konst$

Pohybová rovnice kontinua $\boxed{\rho a_i = f_i + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}}$

divergence tenzoru napětí $(\mathrm{div}\,\sigma)_i = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}$

Celkový moment působící na objem V

2. věta impulzová

M hmotnost kontinua objemu V

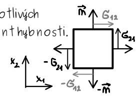
$$N_i = \int_V \varepsilon_{ijk}x_jf_k\,dV + \oint_{S=\partial V}\varepsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl}dS_l = \int_V\varepsilon_{ijk}x_jf_k\,dV + \int_V\frac{\partial}{\partial x_l}(\varepsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl})\,dV = \int_V\varepsilon_{ijk}\left[x_jf_k + \sigma_{kj} + x_j\frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial x_l}\right]dV = \dot{L}_i = \frac{d}{dt}\int_M\varepsilon_{ijk}x_jv_k\,dm = \int_M\varepsilon_{ijk}(\dot{x}_jv_k + x_j\dot{v}_k)\,dm =$$

$$= \int_V\varepsilon_{ijk}x_ja_k\rho\,dV \Rightarrow \int_V\varepsilon_{ijk}x_j\underbrace{\left(f_k + \frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial x_l} - \rho a_k\right)}_{=0} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{kj}\,dV = 0$$

pro spojité funkce díky libovolnosti V $\quad \varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0$

$$0 = \varepsilon_{iml}\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} = (\delta_{mj}\delta_{lk} - \delta_{mk}\delta_{jl})\sigma_{kj} = \sigma_{lm} - \sigma_{ml}$$

Pokud by sigma nebyl symetrický docházelo by k roztáčení jednotlivých elementů tělesa – elementy (molekuly) nesmí mít vlastní moment hybnosti.



Tenzor napětí je symetrický $\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$ ⇒ je diagonalizovatelný – hlavní osy a hlavní hodnoty $\tilde{\sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$

pozor jde o tenzorové pole, hlavní osy i hodnoty mohou být v každém bodě kontinua jiné

$$\sigma = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{pmatrix} = \overbrace{\tfrac{1}{3}\mathrm{Tr}\,\sigma\,\mathbb{1}}^{\text{objemová část } \sigma^{(o)}} + \overbrace{\begin{pmatrix}\sigma_{11}-\frac{\mathrm{Tr}\sigma}{3} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\frac{\mathrm{Tr}\sigma}{3} & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-\frac{\mathrm{Tr}\sigma}{3}\end{pmatrix}}^{\text{smyková část } \sigma^{(s)}}$$

Stopa tenzoru $\mathrm{Tr}\,\sigma = \sum\sigma_{ii} = -3p$ (nezávisí na bázi)

$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ normálová napětí >0 tah <0 tlak

$\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ napětí smyková (tangenciální, střižná)

Pozn. někdy tenzor napětí symetrický být nemusí (např. pro necentrální síly)

Eulerovy hydrodynamické rovnice – pohybové rovnice ideální (dokonalé) tekutiny

Ideální tekutina – nepůsobí v ní smyková napětí, tenzor napětí má pouze objemovou část $\sigma = -p\mathbb{1}$ $\quad \mathrm{Tr}\,\sigma = -3p$ $\quad p \geq 0$

– dokonale nestlačitelná = ideální kapalina, dokonale stlačitelná = ideální plyn

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\delta_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j} = -(\nabla p)_i$$

popsána vektorovým polem rychlostí proudění $\vec{v}(\vec{r},t)$ a skalárními poli hustoty $\rho(\vec{r},t)$ a tlaku $p(\vec{r},t)$

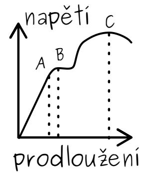
Rychlost pohybu částice kapaliny $\vec{w}(t) = \vec{v}(\vec{r}(t),t)$ $\quad a_i = \frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial v_i}{\partial t}$ $\quad \vec{a} = (\vec{v}\nabla)\vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$

$$\boxed{(\vec{v}\nabla)\vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho}(\vec{f} - \nabla p)}$$

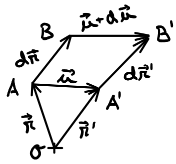
K určení všech neznámých funkcí $\vec{v}, \rho, p$ je třeba přidat rovnice kontinuity a polytropy.

Pružné kontinuum – Tenzor deformací

Těleso pod vlivem sil může měnit svůj tvar – podléhá deformaci. Deformaci nazýváme elastickou resp. plastickou podle toho zda vymizí resp. zůstane po tom co přestanou působit síly které ji vyvolaly. Skutečná deformace je vždy částečně plastická. Dále uvažujeme pouze elastické deformace, při kterých napětí nepřekročí mez úměrnosti A< mez pružnosti, průtažnosti B, pevnosti C – klasická teorie pružnosti



Změna vzájemné polohy dvou (infinitezimálně) blízkých bodů tělesa A a B



$$X_i'+dX_i'-(x_i+dx_i)=u_i+du_i \doteq u_i+\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{\text{tenzor}}dx_k = u_i+\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)}_{\text{antisymetrická část } \varphi_{ik}=\varepsilon_{ijk}\varphi_j}dx_k+\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)}_{\text{symetrická část = tenzor malých deformací } e_{ik}}dx_k = \overset{\text{translace A,B}}{u_i}+\overbrace{(\varphi\times dx)_i}^{\text{rotace B kolem A}}+\underbrace{e_{ik}dx_k}_{\text{deformace, změna vzdálenosti A,B}}$$

vektor posunutí $\vec{u}(x)$ $\quad du_i=\left.\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right|_x dx_k$

$\varphi_{ik}dx_k=\varepsilon_{ijk}\varphi_j dx_k=(\varphi\times dx)_i$ otočení $\qquad du_i=e_{ik}dx_k$

Zkoumáním změny kvadrátu vzdálenosti

$$d\vec{r}'^2=(d\vec{r}+d\vec{u})^2=d\vec{r}^2+2d\vec{r}\cdot d\vec{u}+d\vec{u}^2=d\vec{r}^2+2dx_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j+\underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}_{\text{„moc malé"}}dx_i dx_j=d\vec{r}^2+\underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)}_{2\epsilon_{ij}}dx_i dx_j=d\vec{r}^2+2\epsilon_{ij}dx_i dx_j$$

získáme

tenzor deformací: $\epsilon_{ij}=\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{e_{ij}\text{ tenzor malých deformací}}+\frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$

jsou-li změny vzdáleností malé (vzhledem k makroskopickým rozměrům), pak jsou malé i parciální derivace $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ a kvadratický člen lze zanedbat

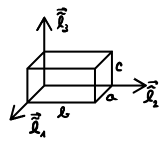
Význam složek

1) diagonální, nechť $(d\vec{r})_\epsilon=\begin{pmatrix}dx_1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad d\vec{r}'^2=dx_1^2+2\epsilon_{11}dx_1^2 \Rightarrow |d\vec{r}'|=\sqrt{1+2\epsilon_{11}}|d\vec{r}|\approx(1+\epsilon_{11})|d\vec{r}|$ $\quad \epsilon_{11}=\frac{|d\vec{r}'|-|d\vec{r}|}{|d\vec{r}|}$ relativní prodloužení ve směru 1. osy

2) nediagonální – smyková deformace, zkosení $d\vec{r}$ vůči souřadnicovým osám

Tenzor deformace je symetrický a tedy diagonalizovatelný v ON bázi – hlavní směry deformace (hlavní osy)

$\tilde{\epsilon}=\mathrm{diag}(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ a hlavní prodloužení (hlavní hodnoty)



objem malého kvádru

v hlavních osách $V'=a'b'c'=(1+\tilde{\epsilon}_{11})a(1+\tilde{\epsilon}_{22})b(1+\tilde{\epsilon}_{33})c=abc\,[1+\underbrace{(\tilde{\epsilon}_{11}+\tilde{\epsilon}_{22}+\tilde{\epsilon}_{33})}_{\text{stopa tenzoru (nezávisí na bázi) }\mathrm{Tr}(\epsilon)}+\underbrace{\tilde{\epsilon}_{11}\tilde{\epsilon}_{22}+\tilde{\epsilon}_{11}\tilde{\epsilon}_{33}+\tilde{\epsilon}_{22}\tilde{\epsilon}_{33}+\tilde{\epsilon}_{11}\tilde{\epsilon}_{22}\tilde{\epsilon}_{33}}_{\doteq 0}]\doteq V[1+\mathrm{Tr}(\epsilon)]$

pro malé deformace $\mathrm{Tr}(\epsilon) = \mathrm{Tr}(e)$

relativní změna objemu (kubická dilatace) $\vartheta=\mathrm{Tr}(e)=\frac{V'-V}{V}$ invariant tenzoru e

Tenzor malých deformací lze rozdělit na čistě objemovou a čistě smykovou část $e_{ij}=\overbrace{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(e)\delta_{ij}}^{e_{ij}^{(o)}}+\underbrace{\overbrace{\left(e_{ij}-\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(e)\delta_{ij}\right)}^{\text{deviátor}}}_{e_{ij}^{(s)}}$

Rovnice kompatibility deformací – požadavek aby spojité těleso po deformaci zůstalo spojité

$$\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm}\frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_m\partial x_m}=0 \quad \forall j,l=1,2,3$$

– lze je odvodit za předpokladu, že $u_i(x)$ jsou třídy C^3 z $2e_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$

Hookeův zákon – experimentálně zjištěný vztah mezi napětím a deformacemi v pružném tělese (pevné skup.)

Předpokládejme, že tenzor napětí $\sigma_{ij}(e,\vec{r},t)$ v daném bodě a čase závisí již jen na deformaci. Pro malé deformace e ho můžeme aproximovat Taylorovým rozvojem $\sigma_{ij}(e,\vec{r},t)=\underbrace{\sigma_{ij}(0,\vec{r},t)}_{\text{není deformace }0\text{, není napětí}}+\underbrace{\left.\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial e_{kl}}\right|_{e=0}}_{C_{ijkl}}e_{kl}+\underbrace{\sigma(|e|^2)}_{\text{moc malé}}\doteq C_{ijkl}e_{kl}$

$$\boxed{\sigma_{ij}=C_{ijkl}e_{kl}}$$

složky tenzorů musíme brát ve stejných souřadnicích před deformací proto se musíme omezit na malé deformace, aby se složky sigma, dosud počítané v místě po deformaci, od požadovaných téměř nelišily

Tenzor elastických koeficientů je tenzorové pole 4. řádu které má díky vedlejším $C_{ijkl}=C_{jikl}$, $C_{ijkl}=C_{ijlk}$ (81→54→36) a hlavní symetrii $C_{ijkl}=C_{klij}$ (36→21) jen 21 nezávislých složek z 81

$$C_{ijkl}(\vec{r},t)=\left.\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial e_{kl}}\right|_{e=0}(\vec{r},t)$$

Pozn. hustota energie pružné (elastické) deformace $dw=\sigma_{ij}de_{ij}$ $\quad \sigma_{ij}=\frac{\partial w}{\partial e_{ij}}$ $\quad C_{ijkl}=\frac{\partial^2 w}{\partial e_{kl}\partial e_{ij}}$

pro homogenní izotropní kontinuum nesmí C_{ijkl} záviset na volbě směrů tj. jde o izotropní tenzor a proto

$$C_{ijkl}=a\delta_{ij}\delta_{kl}+b\delta_{ik}\delta_{jl}+c\delta_{il}\delta_{jk} \qquad C_{ijkl}=C_{jikl}\Rightarrow b=c \Rightarrow C_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$$

Lamého koeficienty λ,μ

Hookeův zákon

$$\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}e_{kk}+\mu(e_{ij}+e_{ji})=\lambda\delta_{ij}\overbrace{\mathrm{Tr}(e)}^{\vartheta\text{ kubická dilatace}}+2\mu e_{ij}=\lambda\vartheta\delta_{ij}+2\mu e_{ij}$$

tenzorově $\sigma=\lambda\vartheta\hat{1}+2\mu e$ — modul pružnosti ve smyku

směry hlavních os tenzoru napětí a tenzoru deformace jsou stejné

$$e_{ij}=-\frac{\lambda\vartheta}{2\mu}\delta_{ij}+\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}=\frac{3p\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\delta_{ij}+\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}$$

$$\mathrm{Tr}(\sigma)=\sigma_{ii}=\lambda\vartheta\delta_{ii}+2\mu e_{ii}=(3\lambda+2\mu)\vartheta=-3p \Rightarrow \mathrm{Tr}(e)=\vartheta=\frac{-3p}{3\lambda+2\mu}$$

Př. nechť působí pouze normálové napětí $\sigma_{11}\neq 0$ $\quad \mathrm{Tr}(\sigma)=\sigma_{11}=-3p$ $\quad e_{11}=\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{11}$ $\quad e_{22}=e_{33}=-\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{11}$

Youngův modul pružnosti v tahu $E=\frac{\sigma_{11}}{e_{11}}=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ $\quad$ Poissonova konstanta $\sigma=\left|\frac{e_{22}}{e_{11}}\right|=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ $\quad$ podélné prodloužení a příčné zkrácení

Př. pro všestranný izotropní tlak $\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=-p$ $\quad -p\mathbb{I}=\lambda\vartheta\mathbb{I}+2\mu\frac{\vartheta}{3}\mathbb{I}$ definujeme modul stlačitelnosti $K=-\frac{p}{\vartheta}=\lambda+\frac{2}{3}\mu$

Lamého rovnice – pro homogenní izotropní pružné kontinuum $\sigma_{ij}=\lambda\mathrm{Tr}(e)\delta_{ij}+2\mu e_{ij}=\lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

$x_i(t)=x_i(0)+u_i(x(0),t)$

$$a_i=\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=\vec{f}+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u})+\mu\Delta\vec{u}}$$

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=\lambda\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_k}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j\partial x_i}\right)=\left[\lambda\nabla(\nabla\cdot\vec{u})+\mu(\Delta\vec{u}+\nabla(\nabla\cdot\vec{u}))\right]_i$$

Při zkoumání statiky a pomalých deformací můžeme předpokládat, že deformace probíhá izotermicky. Při rychlých deformacích (vlnění) se teplota jednotlivých elementů kontinua nestihá vyrovnat a považujeme jespíše za tepelně izolované a pohyb kontinua za adiabatický. Koeficient lambda tak musíme nahradit jeho adiabatickou verzí $\lambda\to\lambda_{ad}$

Speciální Teorie Relativity

Bradley 1727—aberace světla stálic, Huygens—vlnová teorie, Pojednání o světle 1687, Fresnel—1821 světlo jako příčné vlnění éteru
Fizeau 1851—strhávání éteru proudící vodou—závisí na indexu lomu (disperze—na frekvenci světla)—různé étery pro různé frekvence
Maxwell 1864—světlo je elmag. vlnění o rychlosti $c \doteq 3.10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, rychlost Země vzhledem k Slunci **30 km/s**, rychlost Slunce v galaxii **300 km/s**
klidová soustava éteru = Newtonův absolutní prostor, Michelsonův—Morleyův experiment 1887—měření rychlosti Země vůči éteru
Maxwellovy rovnice—nejsou invariatní vůči Galileiho tr., Voight 1887—invariance vlnové rovnice $\Delta\psi - \frac{1}{c}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$ $\;x' = x - vt$ $\;t' = t - \frac{v}{c^2}t$ $\;y' = \frac{y}{\gamma}$ $\;z' = \frac{z}{\gamma}$
Lorentz—1887 potvrzení existence elmag. vln, 1892—elektronová teorie—kontrakce délek a dilatace času při pohybu vůči éteru $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ krát
—linearizovaná verze Lorentz tr. bez gama faktoru, květen 1904—Lorentzova tr. invariance Maxwellek (Einsten nečet)
Larmor 1898—Lorentzova tr. (Lorentz nečetl)
Poincaré—1898 synchronizace hodin pomocí telegrafních signálů, 1900 vliv pohybu hodin vůči éteru na synchronizaci, pravý a zdánlivý čas
—1902 kniha Věda a hypotéza předpovídá opuštění éteru a absolutního času
—1905 spojil souřadnice a čas do čtyřvektoru, ukázal, že Lorentz. tr. tvoří grupu, jsou natočení v E_4 a zachovávají interval, skládání rychlostí
Einstein (14. 3. 1879)—úředník na patentovém úřadě v Bernu (u nádraží, proto příklady s vlaky)
—30. 6. 1905 K elektrodynamice pohybujících se těles (30 stránek, žádné citace)—Lorentz. tr. ze dvou základních postulátů, kontrakce délek, dilatace času, skládání rychlostí, relativita současnosti, invariance Maxwellek, ZZQ, příčný Dopplerův jev, aberace, pohyb. rce. nabité č...
—další 3 články: Nové určení rozměrů molekul (Dizertace), Fotoefekt (Nobelovka), K teorii Brownova pohybu (návrh na Nobelovku)

STR je formulována pro jednu částici ve vnějším elmag. poli, není kompatibilní s gravitací (vznik OTR)
Principy STR

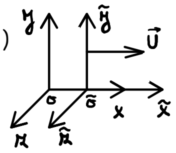
1. NZ: Existuje inerciální VS, vůči které se každý volný (bezsilový) hm. bod pohybuje rovnoměrně přímočaře.
volný hm. bod — hm. bod na který nepůsobí žádné skutečné (pravé) síly
Vztažná Soustava (VS) — tuhé těleso + soustava synchronizovaných hodin + kartézská soustava souřadnic

Princip speciální relativity: Všechny fyzikální děje probíhají ve všech inerciálních VS podle stejných zákonů.
- Fyzikální zákony lze formulovat ve tvaru, který je ve všech inerciálních VS stejný (tzv. kovariantní tvar).
- Experimentálním zkoumáním fyzikálních dějů nelze inerciální VS navzájem rozlišit.

Princip konstantní rychlosti světla: Ve vákuu se světlo šíří vůči všem inerciálním VS rovnoměrně přímočaře konečnou rychlostí $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (nezávislou na rychlosti zdroje nebo pozorovatele)

Speciální Lorentzova tr. = tr. mezi inerciálními VS s rovnoběžnými osami a vzájemnou rychlostí ve směru osy x

Předpoklady: Tr. mezi inerciálními VS jsou difeomorfizmy třídy C^2
$\tilde{t} = \varphi_0(t, x)$ (tj. bijekce, které jsou spolu se svojí inverzí třídy C^2)
$\tilde{x}_i = \varphi_i(t, x)$ $\quad i = 1,2,3$
$\tilde{x}_i(\varphi_0(t,x)) = \varphi_i(t,x)$ $\;/\frac{d}{dt}\;/\frac{d}{dt}$
+ Inercialita VS volné hm. body $\frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\tilde{x}_i}{d\tilde{t}^2} = 0$
$\Rightarrow$ transformace je afinní zobrazení $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \mathbb{A}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$



počátky zvolíme tak aby v časech $t = 0 = \tilde{t}$ splývaly $\sigma = \tilde{\sigma}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \mathbb{A}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$
z izotropie prostoru a rovnocennosti směrů y, z $\;\mathbb{R}\begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \mathbb{A}\mathbb{R}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&c\varphi&s\varphi \\ 0&0&-s\varphi&c\varphi \end{pmatrix}$

$$\tilde{x} = \gamma(x - ut) \qquad u = |\vec{u}|$$
$$\tilde{t} = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$
$$\tilde{y} = y \quad \tilde{z} = z$$
Lorentzův faktor

Pozn: Požadujeme—li navíc, aby události současné v jedné soustavě byly současné i v druhé soustavě dostaneme Galileiho tr.

Hermann Minkowski (učil na polytechnice v Curychu, kde v roce 1900 studoval Einstein)—všiml si symetrie Lorentzovy tr. vzhledem k x a t a toho, že interval obsahuje prostorové i časové souřadnice a spojil (1908—1909) prostor a čas v jediné 4 rozměrné kontinuum—Minkowského prostoročas. Tj. z postulátů STR plyne nová geometrická struktura světa spojená s kvadrátem intervalu, ze které plynou relativistické jevy.

Značení: Einsteinova sumace probíhá přes dvojici indexů, z nichž jeden je nahoře a druhý dole, řecké indexy od 0 do 3 latinské od 1 do 3

Minkowského prostoročas — pseudoeukleidovský afinní prostor $E_{1,3} \cong (\mathbb{R}^4, g_{\mu\nu})$ $\qquad$ (pseudo) **metrický tenzor**
body prostoročasu (světobody) reprezentují události charakterizované časem a polohou — **čtyřvektor polohy** x^μ

$g \in T^0_2(\vec{\mathbb{R}}^4)$ $\qquad g = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu})$ v ON bázi

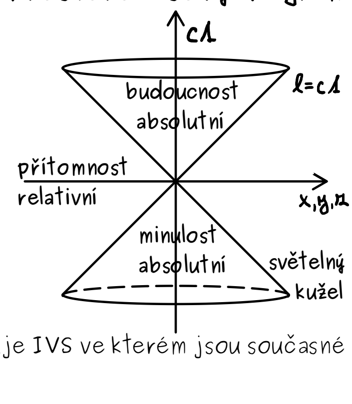
kontravariantní složky $(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

snižování indexů $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$
zvedání indexů $x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$

$(x_\mu) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ kovariantní složky

Pozn: obecně jde pouze o souřadnice světobodu v afinním prostoru, čtyřvektory jsou ze zaměření, proto bychom správně měli říkat čtyřvektor posunutí z počátku do světobodu o souřadnicích (ct, x, y, z)

Prostoročasový diagram

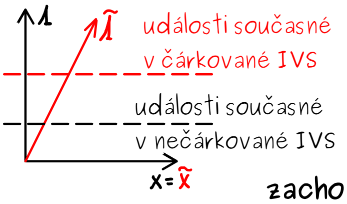


prostoročasový interval Δs —prostoročasová odlehlost dvou událostí
—obdoba vzdálenosti v eukleidovském prostoru, definuje geometrii Minkowského prostoročasu

$$(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu = \Delta x_\nu \Delta x^\nu = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 = (c\Delta t, -\Delta x, -\Delta y, -\Delta z)\begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

—časupodobný $(\Delta s)^2 > 0$ kauzálně související události, lze nají IVS ve které jsou soumístné
—světelný $(\Delta s)^2 = 0$ spojuje události spočívající ve vyslání a přijetí světelného paprsku
—prostorupodobný $(\Delta s)^2 < 0$ události, které nemohou být kauzálně spojeny, protože pro ně existuje IVS ve kterém jsou současné

Pozn: Galileiho tr. na $\mathbb{R}^2(\lambda,x)$



$\tilde{x}=x-w\lambda$
$\tilde{\lambda}=\lambda$

osa $\tilde{\lambda}$ je dána rovnicí $0=x-w\lambda$

zachovává $\Delta\lambda$ a Δx

Lorentzovy tr. na $\mathbb{R}^2(\lambda,x)$

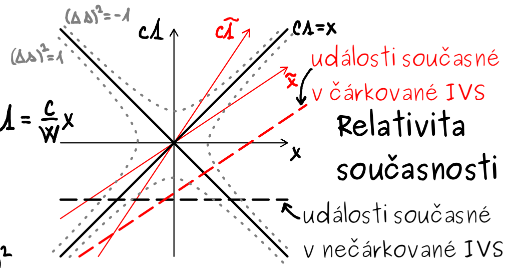
osa $\tilde{x}^0=c\tilde{\lambda}$ je dána rovnicí

$0=\tilde{x}=\gamma(x-w\lambda)=\gamma(x-\frac{w}{c}c\lambda)\Rightarrow c\lambda=\frac{c}{w}x$

osa $\tilde{x}^1=\tilde{x}$ je dána rovnicí

$0=c\tilde{\lambda}=\gamma(c\lambda-\frac{w}{c}x)\Rightarrow c\lambda=\frac{w}{c}x$

zachovává $(\Delta s)^2=c(\Delta\lambda)^2-(\Delta x)^2$



Lorentzova grupa $O(1,3)$ – symetrie zaměření Minkowského prostoročasu $E_{1,3}$

Lorentzovy transformace – regulární lineární zobrazení zachovávající metrický tenzor $(g_{\mu\nu})=g=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ (v ON. bázi)

$\tilde{x}^\mu=A^\mu{}_\nu x^\nu$ tj. $A=S^{-1}$

splňující relace ortogonality

$g_{\mu\nu}=g_{\rho\sigma}A^\rho{}_\mu A^\sigma{}_\nu \qquad g=A^T g A$

$\forall\mu,\nu=0,1,2,3$

Pasivní: $\underset{\text{invariance}}{g_{\mu\nu}=\tilde{g}_{\mu\nu}}=\underset{\text{transformace}}{g_{\rho\sigma}S^\rho{}_\mu S^\sigma{}_\nu}\quad /A^\mu{}_\lambda A^\nu{}_\eta \qquad \boxed{g_{\lambda\eta}=g_{\mu\nu}A^\mu{}_\lambda A^\nu{}_\eta}$

Aktivní: zachovávají interval

$\tilde{x}=Ax \quad \forall x\in \vec{E}_{1,3} \quad (\Delta s)^2=g(x,x)=x^T g x=(\Delta\tilde{s})^2=g(\tilde{x},\tilde{x})=\tilde{x}^T g\tilde{x}=(Ax)^T g(Ax)=x^T A^T g A x$

Pseudo-ortogonální grupa $O(1,3)=\{A\in\mathbb{R}^{4,4}\mid A^T g A=g=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)\}$ je podgrupa $GL(4)$ (součin matic, $\mathbb{1}_4$)

$A,B\in O(1,3) \quad (AB)^T g(AB)=B^T A^T g AB=B^T g B=g \Rightarrow (AB)\in O(1,3)$ inverzní prvek $A^T g=gA^{-1} \quad A^{-1}=g^{-1}A^T g=gA^T g$

Struktura $O(1,3)$ má čtyři komponenty souvislosti (maximální souvislé podmnožiny)

$\det g=\det A^T\det g\det A=\det g(\det A)^2\Rightarrow(\det A)^2=1 <$
- $\det A=1$ vlastní Lorentzovy tr. – podgrupa $SO(1,3)$
- $\det A=-1$ nevlastní Lorentzovy tr.

$1=g_{00}=g_{\mu\nu}A^\mu{}_0 A^\nu{}_0=(A^0{}_0)^2-\sum_{i=1}^3(A^i{}_0)^2\Rightarrow(A^0{}_0)^2=1+\sum_{i=1}^3(A^i{}_0)^2\geq 1 <$
- $A^0{}_0\geq 1$ ortochronní L. tr. – podgrupa $O^+(1,3)$
- $A^0{}_0\leq -1$ neortochronní L. tr. (mění směr času)

Vlastní ortochronní Lorentzova grupa $SO^+(1,3)=SO(1,3)\cap O^+(1,3)$ je komponenta souvislosti obsahující jenotku – je to normální podgrupa $O(1,3)$ tj. levé $AG=\{AB\mid B\in G\}$ a pravé $GA=\{BA\mid B\in G\}$ třídy rozkladu grupy $O(1,3)$ podle podgrupy $G=SO^+(1,3)$ jsou stejné $AG=GA \ \forall A\in O(1,3)$ a mn. všech levých tříd spolu s operací $(AG)\circ(BG)=(AB)G$ tvoří grupu nazývanou faktorgrupa

$O(1,3)/_{SO^+(1,3)}\cong\{\mathbb{1},P,T,PT\}$ Kleinova grupa

$O(1,3)=\overbrace{SO^+(1,3)\cup PSO^+(1,3)}^{O^+(1,3)}\cup T\,SO^+(1,3)\cup PT\,SO^+(1,3)$

inverze

$P=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ prostorová

$T=\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ časová

$PT=\mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1)$ prostoročasová

Struktura $SO^+(1,3)$ – podgrupy

Relace ortogonality $g_{\mu\nu}=g_{\rho\sigma}A^\rho{}_\mu A^\sigma{}_\nu$ představují (díky symetrii $\mu\leftrightarrow\nu$) 10 nezávislých rovnic pro 16 neznámých $A^\rho{}_\sigma$ (relace ortogonality pro 4 sloupce matice A tj. 4+3+2+1=10 rovnic)

– jejich řešení závisí na 16–10=6 parametrech a $SO^+(1,3)$ je 16-dim. varieta v $\mathbb{R}^{16}\cong\mathbb{R}^{4,4}$

– 3 parametry odpovídají podgrupě prostorových rotací $A=\left(\begin{array}{c|c}1&\vec{o}^T\\\hline\vec{o}&B\end{array}\right)$ kde $B\in SO(3)$ $\quad\vec{o}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

– 3 parametry odpovídají speciálním L. tr. (boostům) ve směru os – tři 1-parametrické podgrupy

$$A=\begin{pmatrix}\gamma&-\beta\gamma&0&0\\-\beta\gamma&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\mu&-\sinh\mu&0&0\\-\sinh\mu&\cosh\mu&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=A(\mu)$$

prostoročasová rotace $SO(2)$

$A(\mu_1)A(\mu_2)=A(\mu_1+\mu_2)$

Rapidita μ – v částicové fyzice pro popis pohybu (aktivní transformace)

$\mathrm{tgh}(\mu)=\beta=\frac{v}{c} \qquad \beta\to 1\Leftrightarrow\mu\to+\infty$

Pozn. Matice odpovídající boostům jsou vždy symetrické (naopak to neplatí). Složení boostů v různých směrech není boost ale boost a prostorová rotace (Thomasova precese). Všechny boosty grupu netvoří.

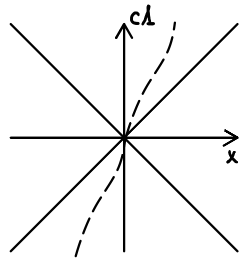
Lorentzova grupa $O(1,3)$ resp. její podgrupa $SO^+(1,3)$ hraje v STR stejnou roli, jako ortogonální grupa $O(3)$ resp. její podgrupa $SO(3)$ v nerelativistické Newtonovské mechanice – veličiny (skaláry, vektory, tenzory) se v STR klasifikují podle toho, jak se jejich složky chovají při Lorentzových transformacích.

Poincarého grupa $\mathbb{R}^4\rtimes O(1,3)$ – někdy též nehomogenní Lorentzova grupa – obdoba Galileiho grupy z MECH

– afinní transformace $\tilde{x}^\mu=A^\mu{}_\nu x^\nu+b^\mu$ Minkowského prostoročasu zachovávající interval

– 10 parametrická grupa tvořená translacemi (4), zrcadleními, boosty (3) a prostorovými rotacemi (3)

Relativistické zobecnění Newtonových pohybových rovnic



- chceme najít pohybové rovnice relativistické částice v Minkowského prostoročase, které mají stejný tvar ve všech inerciálních VS ($\Rightarrow$ kovariantní vůči Lorentzovým tr.) a pro $v \ll c$ přechází v Newtonovy rovnice.

Světočára – křivka v Minkowského prostoročase jejíž body jsou události odpovídající pohybovým stavům částice (obdoba trajektorie). Parametrizujeme ji vlastním časem částice. Uvažujeme pouze hmotné částice, které se pohybují po časupodobných světočárách. Každé dva body takové světočáry jsou spojeny časupodobným intervalem $(\Delta s)^2 = (c\Delta\tau)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 > 0$

V každém infinitezimálním časovém úseku lze považovat rychlost částice za konstantní, spojit s částicí tzv. okamžitou klidovou inerciální VS a postulovat $dt = \gamma d\tau$ pak platí: $d\tau = \frac{dt}{\gamma} = dt\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}}$ $\quad \frac{dt}{d\tau} = \gamma$

čtyřvektory

- prvky zaměření Minkowského prostoročasu – při Lorentzových tr. se transformují jako čtyřvektor polohy
  $\tilde{x}^\mu = \mathbb{A}^\mu{}_\nu x^\nu \quad \mathbb{A} \in O(1,3) \quad \mathbb{A} = \mathbb{S}^{-1} \quad \tilde{x}^\mu \vec{\tilde{e}}_\mu = x^\nu \vec{e}_\nu$ báze: $\tilde{e}_\mu = e_\nu \mathbb{S}^\nu{}_\mu \quad \forall \mu = 0,1,2,3$ kontravariantní složky $(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}$
- ke každému čtyřvektoru přísluší jeho invariant (obdoba velikosti vektoru) $x_\nu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (ct, -\vec{r})\begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} = c^2t^2 - \vec{r}^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ pro čtyřvektor polohy je to interval
- podle toho zda je tento invariant větší/menší/roven nule rozdělujeme čtyřvektory na časupodobné/prostorupodobné/světelné

Další čtyřvektory získáme derivací čtyřvektoru podle skaláru (invariantu) a násobením čtyřvektoru skalárem.

čtyřrychlost $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$ invariant $u_\mu u^\mu = \gamma(c, -\vec{v})\gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \gamma^2(c^2 - \vec{v}^2) = c^2 > 0$ časupodobný

Pozn. Všechny hmotné částice jsou "stejně čtyřrychlé" jen některé spotřebují víc rychlosti na pohyb v prostoru a některé na pohyb v čase.

čtyřhybnost $p^\mu = m_0 u^\mu = \gamma\begin{pmatrix} m_0 c \\ m_0\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc \\ \vec{p} \end{pmatrix}$ invariant $p_\mu p^\mu = m_0^2 u_\mu u^\mu = m_0^2 c^2 > 0$ časupodobný

klidová hmotnost m_0 (hmotnost v klidové VS) relativistická hmotnost $m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (setrvačný odpor vůči urychlování) relativistická hybnost $\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

čtyřzrychlení $w^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{du^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{du^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} \gamma^4 c^{-1}\vec{v}\cdot\vec{a} \\ \gamma^2\vec{a} + \gamma^4 c^{-2}(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v} \end{pmatrix}$ invariant $w_\mu w^\mu = -\gamma^4\vec{a}^2 - \gamma^6 c^{-2}(\vec{v}\cdot\vec{a})^2 < 0$ prostorupodobný

derivací invariantu čtyřrychlosti dostaneme čtyřzrychlení je "4–kolmé" na čtyřrychlost $0 = \frac{dc^2}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(u_\mu u^\mu) = \frac{du_\mu}{d\tau}u^\mu + u_\mu\frac{du^\mu}{d\tau} = w_\mu u^\mu + u_\mu w^\mu = 2w_\mu u^\mu$

Relativistické pohybové rovnice $K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dp^\mu}{dt}$ (toto není definice čtyřsíly, jen odtud určíme jak má vypadat)

čtyřsíla $(K^\mu) = \begin{pmatrix} K^0 \\ \vec{K} \end{pmatrix}$ prostorové složky čtyřsíly získáme z principu korespondence ($\frac{v}{c} \to 0$) $\gamma\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma\vec{F} = \vec{K}$

časovou složku získáme pomocí čtyřvýkonu
$$\left.\begin{aligned} u_\mu K^\mu &= \gamma c K^0 - \gamma\vec{v}\cdot\vec{K} = \gamma c K^0 - \gamma^2\vec{v}\cdot\vec{F} \\ u_\mu K^\mu &= u_\mu\frac{d(m_0 u^\mu)}{d\tau} = \frac{dm_0}{d\tau}u_\mu u^\mu + m_0 u_\mu w^\mu = c^2\frac{dm_0}{d\tau} = 0 \end{aligned}\right\} K^0 = \frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} \Rightarrow (K^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} \\ \gamma\vec{F} \end{pmatrix}$$

Relativistické pohybové rovnice $\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu \quad \mu = 0,1,2,3}$ časová složka $\gamma\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}$ prostorové složky $\gamma\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \gamma\vec{F}$

Energie $\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt} \Rightarrow E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \text{konst.}$ 0 Einstein (1905) $\boxed{E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

Kinetická energie $E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ldots\right) - m_0c^2 = \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0v^2\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \ldots$ Taylor ve $\left(\frac{v}{c}\right)$

Vztah energie a hybnosti $(p^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma m_0 c \\ \gamma m_0\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$ invariant $m_0^2c^2 = p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}\cdot\vec{p} \Rightarrow \boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4}$

Energie a čtyřhybnost fotonu s frekvencí ν $\quad E = h\nu \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad (p_f^\mu) = \frac{h\nu}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{s} \end{pmatrix} \quad |\vec{s}| = 1$ invariant $p_{f\mu} p_f^\mu = 0$

Srážky a rozpady částic – srážku považujeme za bodovou a částice mimo oblast srážky za neinteragující – splňují zákon zachování čtyřhybnosti, využíváme invarianty

Hmotnostní defekt – rozdíl mezi součtem klidových hm. jednotlivých částí soustavy (nukleonů) a klidovou hm. soustavy (atomového jádra)

Vazebná energie $B = (\sum E_{0i}) - E_0^{\text{celk}}$ <0 štěpení těžkých jader $B>0$ fúze lehkých jader ${}^2_1H$ deuteron (těžký vodík) $m_d = m_p + m_n - \frac{B}{c^2} < m_p + m_n$