1 Grupy, transformace, diferenciální operátory a identity

Grupou nazýváme uspořádanou dvojici $(G, \circ)$, kde G je neprázdná množina a $\circ : G \times G \to G$ zobrazení (operace nazývaná součin) takové, že platí:

1. $\forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$ asociativita
2. $\exists e \in G\ \forall g \in G \quad e \circ g = g \circ e = g$ jednotka
3. $\forall g \in G\ \exists_1 g^{-1} \in G \quad g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ inverzní prvek

Je-li operace součin v grupě $(G, \circ)$ zřejmá z kontextu, její značku vynecháváme a mluvíme prostě o grupě G. Grupa G se nazývá **abelovská** (komutativní), je-li komutativní její součin. Podmnožinu $H \subset G$ grupy $(G, \circ)$ nazýváme **podgrupou**, je-li $(H, \circ|_{H\times H})$ grupou, tj. pokud H obsahuje jednotku a je uzavřená vůči součinu a inverzi.

Jsou-li $(G, \circ)$ a $(H, *)$ grupy, pak zobrazení $f : G \to H$ nazýváme **homomorfizmem grup**, pokud pro všechny $g_1, g_2 \in G$ paltí $f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) * f(g_2)$. Označmě $GL(V)$ grupu všech lineárních regulárních operátorů na vektorovém prostoru V s operací skládání zobrazení. Homomorfizmus grup $\rho : G \to GL(V)$ nazýváme **reprezentací grupy** G na vektorovém prostoru V. Dimenzí reprezentace ρ nazýváme dimenzi V.

Homomorfizmus grup $f : G \to G$, který je bijekcí (tj. prostý a na) nazýváme **automorfizmem grupy** G a množinu všech automorfizmů grupy G značíme $Aut(G)$. Buď $\varphi : H \to Aut(G)$ homomorfizmus grup, pak **semidirektním (polopřímým) součinem grup** $(G, \circ)$ a $(H, *)$ je grupa $(G\times H, \bullet_\varphi)$ značená $H \rtimes G$ s operací definovanou předpisem $(g_1, h_1)\bullet_\varphi(g_2, h_2) = (g_1 \circ \varphi(h_1)g_2, h_1 * h_2)$. Je-li homomorfizmus φ triviální tj. $\varphi(h) = e_G, \forall h \in H$ nazýváme součin grup G a H **direktním (přímým)** a značíme $G \times H$.

Transformací množiny M rozumíme bijekci (vzájemně jednoznačné zobrazení) množiny M na sebe samu. Množina všech transformací množiny M tvoří grupu. Je-li množina vybavena nějakou strukturou (topologií/algebraickými operacemi) pak se obvykle zajímáme o takové transformace (homeomorfismy/automorfismy), které tuto strukturu zachovávají. Takové transformace budeme nazývat **symetriemi**. Množina všech symetrii opět tvoří grupu.

Například reálný vektorový prostor V dimenze $n \in \mathbb{N}$ má lineární strukturu (sčítání vektorů a násobení vektoru číslem) a proto po jeho transformacích vyžadujeme linearitu. Symetriemi vektorového prostoru jsou tedy regulární lineární operátory (grupa $GL(n)$). Je-li na V navíc definován skalární součin $\langle ., . \rangle$, požadujeme i jeho zachování a symetriemi $(V, \langle ., . \rangle)$ budou jen ortogonální operátory (grupa $O(n)$). Všechny lineární transformace $(V, \langle ., . \rangle)$, které byly symetriemi samotného vektorového prostoru V, pak občas zkráceně nazýváme transformace $(V, \langle ., . \rangle)$. [1] [2]

Symetrií objektu tedy nazýváme transformaci, která nemění vlastnosti tohoto objektu a naopak objekt nazveme **invariantním** vzhledem k transformaci, pokud je tato transformace jeho symetrií. Například symetrií S podmnožiny $N \subset M$ bude transformace M splňující $S(N) = \{S(m)\,|m \in M\} = N$ a tedy podmnožina N bude invariantní vzhledem k S. Množina všech symetrií daného objektu opět tvoří grupu.

[1] Jiným příkladem může být fázový prostor uzavřeného systému. Ten má strukturu symplektické variety (Γ, ω), což je hladká varieta Γ vybavená symplektickou formou ω (uzavřenou nedegenerovanou diferenciální formou stupně 2) reprezentovanou Poissonovou závorkou $\{., .\}$. Jeho transformacemi jsou hladké difeomorfismy a symetriemi jsou pouze ty z nich, které zachovávají symplektickou formu ω (Poissonovou závorku) tedy kanonické transformace. Požadavek na to aby transformace byly hladké difeomorfismy (hladké bijekce, jejichž inverze je také hladká) plyne ze struktury hladké variety.

[2] Na vektorový prostor V se skalárním součinem lze pohlížet jako na hladkou varietu. Ze skalárního součinu můžeme totiž postupně naindukovat normu, metriku i topologii na V. Po jeho transformacích bychom tak měli požadovat hladkost, ta již však na prostorech konečné dimenze automaticky plyne z linearity.

Neboť zobrazení $f : A \to B$ je podle definice podmnožinou $f \subset A \times B$ kartézského součinu množin A, B splňující, že každý prvek z A má nejvýše jeden obraz v B, můžeme jeho symetrii definovat jako jako transformaci $A \times B$ vůči které je tato podmnožina f invariantní. Pro funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak dostáváme, že její symetrie jsou symetrie jejího grafu jako podmnožiny v $\mathbb{R}^2$.

V konkrétních případech se můžeme omezit jen na některé typy symetrii. Například ze symetrií funkce f můžeme uvažovat pouze ty, které odpovídají transformacím $S : Dom(f) \subset A \to Dom(f)$ jejího definičního oboru zachovávajícím její hodnotu $f(S(x)) = f(x),\ \forall x \in Dom(f)$. Tento typ symetrií jsme užívali pro Lagrangeovy funkce v teorému Noetherové a dále na něj budeme narážet v případě skalárních polí.

Pro rovnice (algebraické, goniometrické či diferenciální) nebo systémy rovnic jsou symetrie definovány jako takové transformace definičního oboru, které každé řešení zobrazují na řešení.

Transformace prostoru o kterých jsme se dosud zmínili označujeme jako **aktivní** tedy takové, které "hýbou" s body daného prostoru. Definujeme-li na našem prostoru soustavu souřadnic (například na vektorovém prostoru V_n lineární souřadnice definované souřadnicovým izomorfismem $(.)_{\mathcal{E}} : V_n \to \mathbb{R}^n$ daným volbou báze $\mathcal{E}$ ve V_n) můžeme zkoumat přechody mezi různými volbami těchto soustav souřadnic (odpovídajícími různým volbám báze $\mathcal{E}$ ve V_n), které nazýváme **pasivní** transformace.

Aktivní transformace - otočení	$\longleftarrow$ rotace o úhel φ $\longrightarrow$	Pasivní transformace - otočení
vektoru $\vec{v}$ proti směru hodin	$\vec{v}\,' = \mathbb{A}(\varphi)\vec{v}$	souřadnic o φ po směru hodin
$(\vec{v}\,')_{\mathcal{E}} = {}^{\mathcal{E}}\mathbb{A}(\varphi)^{\mathcal{E}}(\vec{v})_{\mathcal{E}}$	$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$	$(\vec{v})_{\mathcal{E}'} = {}^{\mathcal{E}}\mathrm{Id}^{\mathcal{E}'}(\vec{v})_{\mathcal{E}}$
složky nového $\vec{v}\,'$ a starého		složky téhož vektoru $\vec{v}$
vektoru $\vec{v}$ v téže bázi $\mathcal{E}$		v nové $\mathcal{E}$ a staré bázi $\mathcal{E}$

Pasivní transformace tedy představují jen změnu popisu objektů při změně systémů souřadnic a nemohou tak již z principu měnit jejich vlastnosti (například délky vektorů), mohou však měnit vzorce podle kterých se tyto vlastnosti počítají ze souřadnic. Naproti tomu aktivní transformace mohou měnit vlastnosti objektů avšak vzorce, pomocí nichž tyto vlastnosti počítáme ze souřadnic, nemění, neboť popisují změnu objektů vzhledem k pevně zvolené soustavě souřadnic.

Cvičení 1.1 *Uveďte příklady abelovských grup se kterými jste se již setkali. Specifikujte jaká je v nich operace, jednotka a inverzní prvek.*

Cvičení 1.2 *Dokažte, že následující množiny tvoří grupu vzhledem k operaci součinu matic*

$$GL(n) = \{\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n} \,|\det \mathbb{A} \neq 0\}$$

$$SL(n) = \{\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n} \,|\det \mathbb{A} = 1\}$$

$$O(n) = \left\{\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n} \,\middle|\, \mathbb{A}^T\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbb{1}_n\right\}$$

$$SO(n) = \left\{\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n} \,\middle|\, \mathbb{A}^T\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbb{1}_n,\ \det\mathbb{A} = 1\right\}$$

$$Sp(2s) = \left\{\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2s,2s} \,\middle|\, \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A} = \mathbb{J}\right\}, \quad \mathbb{J} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{1}_s \\ -\mathbb{1}_s & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Cvičení 1.3 *Spočtěte determinant pro libovolný prvek grup $O(n)$ a $Sp(2s)$.*

Cvičení 1.4 *Jaký je vzájemný vztah grup z cvičení 1.2?*

Cvičení 1.5 *Určete, jak vypadá inverzní element v grupách $O(n)$ a $Sp(2s)$.*

Cvičení 1.6 *Jaký geometrický význam mají prvky grupy $O(n)$, $SL(n)$ a $SO(n)$ pokud je interpretujeme jako aktivní/pasivní transformace euklidovského prostoru E^n? Jaké operace zachovávají v případě $n = 3$?*

Cvičení 1.7 *Zapište definiční vztah pro prvky grupy $O(n)$ pomocí prvků matice a Einsteinovy sumace.*

Cvičení 1.8 *Spočtěte $\varepsilon_{ijk}\delta_{jk}$ a ukažte, že stejný výsledek dostanete pro libovolný výraz typu $A_{ij}S_{ij}$ kde $S_{ij} = S_{ji}$ je symetrické a $A_{ij} = -A_{ji}$ antisymetrické.*

Cvičení 1.9 *Pomocí Einsteinova sumačního pravidla dokažte následující identity pro skalární pole $\varphi(\vec{x})$ a vektorová pole $\vec{A}(\vec{x})$, $\vec{B}(\vec{x})$*

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = 0$$

$$\mathrm{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{B}$$

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

Cvičení 1.10 *Dokažte, že pro sféricky symetrické skalární pole $\varphi = \varphi(r)$, kde $r = |\vec{r}\,| = \sqrt{\sum x_l^2}$ platí*

$$\Delta\varphi(r) = \varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\varphi(r)) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)$$

Cvičení 1.11 *Dokažte identity pro skalární $\varphi(\vec{x})$ a vektorová pole $\vec{A}(\vec{x})$, $\vec{B}(\vec{x})$*

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

$$\mathrm{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \mathrm{grad})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \mathrm{grad})\vec{B} + \vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A}$$

$$\mathrm{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{A} \cdot \mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{rot}(\varphi\vec{A}) = \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{A} + \mathrm{grad}\,\varphi \times \vec{A}$$

Cvičení 1.12 *Dokažte identity platné pro skalární pole $\varphi(\vec{x})$ a $\psi(\vec{x})$*

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$$

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \psi\Delta\varphi$$

Cvičení 1.13 *Dokažte identity ve kterých $r = |\vec{r}\,|$, $\vec{p}$ je konstantní vektor a $\varphi(r)$ skalární pole*

$$\mathrm{grad}\,\varphi(r) = \varphi'(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\mathrm{grad}(\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{p}$$

$$\mathrm{div}\,\frac{\vec{p}}{r} = -\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

2 Tenzory

Tenzor T typu $\binom{p}{q}$ (kontravariantní řádu $p \in \mathbb{N}_0$ a kovariantní řádu $q \in \mathbb{N}_0$) na reálném vektorovém prostoru V dimenze $n \in \mathbb{N}$ má vzhledem k bázi $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ tohoto prostoru n^{p+q} složek $T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \in \mathbb{R}$, které se při změně báze $\vec{\tilde{e}}_j = \vec{e}_i S^i_{\ j}$ dané maticí přechodu $\mathbb{S} \in GL(n)$ transformují podle vztahu

$$\widetilde{T}^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = (\mathbb{S}^{-1})^{i_1}_{\ \ k_1} \dots (\mathbb{S}^{-1})^{i_p}_{\ \ k_p} T^{k_1,\dots,k_p}_{l_1,\dots,l_q} S^{l_1}_{\ \ j_1} \dots S^{l_q}_{\ \ j_q}.$$

Tenzorová hustota $\mathcal{T}$ váhy $\lambda \in \mathbb{Z}$ typu $\binom{p}{q}$ na V má stejný počet složek jako tenzor T, které se ale při změně báze transformují podle vztahu

$$\widetilde{\mathcal{T}}^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = (\det \mathbb{S})^{\lambda} (\mathbb{S}^{-1})^{i_1}_{\ \ k_1} \dots (\mathbb{S}^{-1})^{i_p}_{\ \ k_p} \mathcal{T}^{k_1,\dots,k_p}_{l_1,\dots,l_q} S^{l_1}_{\ \ j_1} \dots S^{l_q}_{\ \ j_q}.$$

Tenzor resp. tenzorová hustota se nazývá **invariantní** vzhledem k zvolené grupě transformací, pokud se při těchto transformacích nemění jeho složky. **Řádem tenzoru** typu $\binom{p}{q}$ nazýváme číslo $p + q$. Indexy které jsou nahoře se nazývají **kontravariantní** a indexy dole **kovariantní**. Tenzor je **symetrický (antisymetrický)** ve dvou indexech stejného typu, pokud se při jejich prohození jeho složky nezmění (změní znaménko). Je-li tenzor typu $\binom{p}{0}$ nebo $\binom{0}{q}$ symetrický (antisymetrický) vzhledem ke všem dvojicím indexů, nazývá se **úplně symetrický (úplně antisymetrický)**. Nedegenerovaná bilineární symetrická forma $g \in T^0_2(V)$ nazývaná **(pseudo)metrický tenzor** umožňuje kanonicky ztotožnit prvky V a jeho duálního prostoru $V^{\#}$ což odpovídá **snižování** $T^{i}_{.jk} = g_{jl} T^{il}_{..k}$ **a zvedání** $T^{il}_{..k} = g^{lj} T^{i}_{.jk}$ **indexů**. Kde (g^{ij}) jsou prvky inverzní matice k matici (g_{ij}). Při zvedání a snižování indexů je nutné udržovat stejné vzájemné pořadí indexů i mezi indexy horními a dolními. K vyznačení pořadí indexů se užívá tečka. **Kontrakcí (zúžením) tenzoru** T nazýváme tenzor jehož složky vznikly ze složek $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}$ tenzoru T vysčítáním přes dvojici stejných indexů, z nichž jeden index je horní a druhý dolní. Kontrakce v indexech i_k a j_l odpovídá násobení složek tenzoru Koroneckerovým $\delta^{j_l}_{i_k}$ a provedení Einsteinovy sumace.

Cvičení 2.1 *Podle hodnot veličin* **A, B** *v bazích $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_3)$ a $\widetilde{\mathcal{E}} = (\vec{\tilde{e}}_1, \dots, \vec{\tilde{e}}_3)$ určete, zda se jedná o vektory nebo kovektory.*

veličina	báze ε	báze $\tilde{\varepsilon}$
A	$(1, 2, 3)$	$(2, 0, -1)$
B	$(4, 5, 6)$	$(15, 5, -2)$

$$\vec{\tilde{e}}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$
$$\vec{\tilde{e}}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$
$$\vec{\tilde{e}}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$$

Cvičení 2.2 *Nechť složky veličiny* **C** *v bázi $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_3)$ mají hodnoty $(1, 1, 1)$ a v bázi $\widetilde{\mathcal{E}}$ z předchozího cvičení mají rovněž hodnoty $(1, 1, 1)$. Je veličina* **C** *kovariantní nebo kontravariantní vektor?*

Cvičení 2.3 *Uvažujme veličinu T definovanou na V_n, jejíž složky jsou vzhledem k libovolné bázi V_n rovny součinům $u^i v^j$ složek vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$. Jak se tato veličina transformuje při změně báze $\vec{\tilde{e}}_j = \vec{e}_i S^i_{\ j}$, $\mathbb{S} \in GL(n)$? O jaký typ veličiny se jedná? Zapište vztah mezi T a $\vec{u}, \vec{v}$ a) pomocí matic b) pomocí tenzorových operací.*

Cvičení 2.4 *Jak vypadají složky tenzorů $\underleftarrow{\alpha} \otimes \vec{v}$, $\vec{v} \otimes \underleftarrow{\alpha}$, $\hat{1} \otimes \vec{v}$, $\vec{v} \otimes \hat{1}$ v bázi $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.*

Cvičení 2.5 *Zapište pomocí matic vztahy pro transformace složek pro všechny typy tenzorů 2. řádu na V_n.*

Cvičení 2.6 *Nechť $\mathbb{F} \in GL(n)$ je matice přechodu od ortonormální báze $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ k obecně neortonormální bázi $\widetilde{\mathcal{E}} = (\vec{\tilde{e}}_1, \dots, \vec{\tilde{e}}_n)$. Ukažte, že skalární součin $\vec{a} \cdot \vec{b}$ má v bázi $\widetilde{\mathcal{E}}$ tvar $\vec{a} \cdot \vec{b} = a^i b^j g_{ij}$, kde $g_{ij} := F^k_{\ i} F^k_{\ j}$ je Gramova matice souboru $(\vec{\tilde{e}}_1, \dots, \vec{\tilde{e}}_n)$.*

Cvičení 2.7 *Ukažte, že prvky matice g_{ij} definující skalární součin v obecné bázi lze považovat za složky kovariantního (tzv. metrického) tenzoru.*

Cvičení 2.8 *Ukažte že $\gamma = \det(g_{ij})$, kde (g_{ij}) je matice definující skalární součin v obecné bázi, je skalární hustota stupně 2.*

Cvičení 2.9 *Definujme veličinu T, jejíž složky jsou v libovolné bázi vektorového prostoru V_n dány předpisem $T^i_j = \delta^i_j$, ukažte že jde o $GL(n)$–invariantní tenzor typu $\binom{1}{1}$ tzv. jednotkový tenzor.*

Cvičení 2.10 *Definujme veličinu T, jejíž složky jsou v libovolné ortonormální bázi vektorového prostoru V_n dány předpisem $T_{ij} = \delta_{ij}$. Ukažte, že se při ortogonálních transformacích chová, jako invariantní tenzor typu $\binom{0}{2}$. Jak by vypadaly její složky v libovolné bázi, kdyby tenzorem skutečně byla?*

Cvičení 2.11 *Definujme tenzor T typu $\binom{0}{3}$ tak, že jeho složky jsou v libovolné pravotočivé ortonormální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ dány předpisem $T_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$, jak budou vypadat složky v libovolné bázi? (takové veličině někteří autoři říkají Levi–Civitův tenzor).*

Cvičení 2.12 *Zjistěte jakého typu je veličina, jejíž složky jsou v libovolné bázi $T^{ijk} = \varepsilon^{ijk} \equiv \varepsilon_{ijk}$.*

Cvičení 2.13 *Rozložte tenzor $(F_{ij}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ na symetrickou F^S a antisymetrickou část F^A. Pro symetrickou část najděte polární bázi, tj. bázi ve které je F^S diagonální a najděte složky F^A a F vzhledem k této bázi.*

Cvičení 2.14 *Kolik nezávislých složek má tenzor 2. řádu typu $\binom{p}{0}$ na prostorech V_n, V_3 a V_4 je-li a) úplně antisymetrický b) úplně symetrický?*

Cvičení 2.15 *Proveďte kontrakci (úžení) tenzoru $T \in T^1_1(V_3)$ jehož složky jsou v dané bázi $\mathcal{E}$ $\mathbb{T} = (T^i_j) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{smallmatrix}\right)$. Závisí výsledek na zadané bázi $\mathcal{E}$?*

Cvičení 2.16 *Pomocí (pseudo) metrického tenzoru $g = (g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ snižte indexy u vektoru $\mathbf{X}$ a kontravariantního tenzoru druhého řádu $\mathbf{F}$. Indexy μ, ν jdou od 0 do 3.*

Cvičení 2.17 *Ukažte, že jediné $GL(n)$–invariantní tenzory lichého řádu jsou nulové tenzory.*

Cvičení 2.18 *Ukažte, že při ortogonálních transformacích se složky vektorů a kovektorů transformují stejně.*

Cvičení 2.19 *Jak se transformuje duální báze duálního vektorového prostoru?*

Cvičení 2.20 *Kolik nezávislých složek má tenzor řádu typu $\binom{p}{0}$ na prostoru V_n, je-li a) úplně antisymetrický b) úplně symetrický?*

Cvičení 2.21 *Ukažte že totálně antisymetrické Levi–Civitovy symboly v dimenzi n $\varepsilon_{i_1,i_2,\dots i_n} \in \{-1, 0, 1\}$, $\varepsilon_{1,2,\dots,n} = 1$, lze chápat jako složky $GL(n)$–invariantní kovariantní tenzorové hustoty váhy -1 nebo invariantní kontravariantní tenzorové hustoty váhy +1. Použijte definici determinantu matice. (Levi-Civitovy tenzorové hustoty*

Cvičení 2.22 *Ukažte, že pro pro libovolný tenzor T typu $\binom{1}{1}$ představují koeficienty charakteristického polynomu $\det(S - \lambda\hat{1}) = -\lambda^3 + \vartheta_1\lambda^2 - \vartheta_2\lambda + \vartheta_3 = 0$ $GL(n)$–invariatní veličiny:*
$\vartheta_1 = \delta^i_j T^j_i = T^i_i = Tr(T)$
$\vartheta_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmk} T^i_l T^j_m) = \frac{1}{2}(T^i_i T^j_j - T^i_j T^j_i)$
$\vartheta_3 = \frac{1}{3!}(\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmn} T^i_l T^j_m T^k_n) = \frac{1}{3!}(\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk}\det(T)) = \det(T).$

3 Afinní prostor, Tenzorová pole, Galileiho transformace

Soustava afinních (přímočarých) souřadnic $\langle o, \mathcal{E}\rangle$ v afinním prostoru A_n dimenze $n \in \mathbb{N}$ je dána volbou počátku $o \in A_n$ a báze $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ zaměření $\vec{A}_n$. Souřadnice bodu $b \in A_n$ v této soustavě jsou $x^i(b) = \underleftarrow{e}^{\,i}(b - o)$.

Tenzorové pole T **typu** $\binom{p}{q}$ na afinním prostoru A_n je zobrazení $T : A \to T^p_q(\vec{A}_n)$, které každému bodu A_n přiřadí tenzor typu $\binom{p}{q}$ definovaný na jeho zaměření $\vec{A}$. Složky tenzorového pole se při transformaci souřadnic afinního prostoru $x^i = \hat{x}^i(\widetilde{x}), \forall i \in \hat{n}$ transformují podle vztahu

$$\widetilde{T}^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}(\widetilde{x}) = (\mathbb{S}^{-1})^{i_1}_{\ \ k_1} \dots (\mathbb{S}^{-1})^{i_p}_{\ \ k_p} T^{k_1,\dots,k_p}_{l_1,\dots,l_q}(x) \mathbb{S}^{l_1}_{\ \ j_1} \dots \mathbb{S}^{l_q}_{\ \ j_q}, \qquad \text{kde } \mathbb{S}^i_j = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial \widetilde{x}^j}$$

jsou prvky Jacobiho matice. Transformace souřadnic představuje **symetrii tenzorového pole** T pokud platí $\widetilde{T}^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}(\widetilde{x}) = T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}(\widetilde{x})$ tj. jeho složky jsou před i po transformaci stejné funkce.

Afinní prostor (A_n, g) se skalárním součinem $g(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ nazýváme **eukleidovský** a značíme E_n. Soustavu afinních souřadnic $\langle o, \mathcal{E}\rangle$ v eukleidovského afinním prostoru E_n nazýváme **kartézskou soustavou souřadnic** (KSS) pokud je báze $\mathcal{E}$ ortonormální. V KSS jsou kovariantní a kontravariantní složky stejné (při $O(3)$ transformacích mezi KSS se transformují stejně) a proto v KSS píšeme indexy pouze dolu. KSS pevně spojená se vztažným (tuhým hmotným tělesem) a hodinami (metodou měření času) tvoří **vztažnou soustavu** (VS) vzhledem ke které definujeme fyzikální veličiny týkající se pohybujících se těles (polohový vektor, okamžitá rychlost a okamžité zrychlení, kinetická energie, hybnost, moment hybnosti, ...). Je tedy třeba rozlišovat přechody mezi souřadnicemi ať už kartézskými nebo obecnými v rámci jedné vztažné soustavy, měnícími jen matematický popis bez hlubšího fyzikálního obsahu (viz. zimní semestr) od přechodů mezi vztažnými soustavami (Galileiho princip relativity).

Galileiho transformace je transformace souřadnic mezi KSS $\langle o, \mathcal{E}\rangle, t$ a $\langle \tilde{o}(t) = o + \vec{W}t + \vec{x}_0, \widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\mathbb{S}\rangle, \tilde{t} = t - t_0$ v eukleidovském afinním prostoru A, kde $\vec{W}, \vec{x}_0 \in \vec{A}$ a $\mathbb{S} \in SO(3)$, reprezentujícími inerciální VS.[3]

Cvičení 3.1 *Jak se transformují afinní souřadnice $x^i(b)$ bodu $b \in A$ v afinním prostoru při přechodu od jedné soustavy souřadnic $\langle o, (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)\rangle$ k druhé $\langle \widetilde{o}, (\vec{\widetilde{e}}_1, \dots, \vec{\widetilde{e}}_n)\rangle$?*

Cvičení 3.2 *Odvoďte inverzní vztah k $\tilde{x}^j(b) = (\mathbb{S}^{-1})^j_i(x^i(b) - x^i(\tilde{o}))$ t.j. $x^i(b)$ jako funkci $\tilde{x}^i(b)$ a $\tilde{x}^i(o)$.*

Cvičení 3.3 *Ukažte, že obecné hybnosti $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ se při změně obecných souřadnic $q^i = \hat{q}^i(Q, t)$, $\forall i \in \hat{s}$ transformují jako složky kovektoru.*

Cvičení 3.4 *Ukažte, že pro libovolné tenzorové pole $T_{ij}(x)$ na E_n se jeho divergence $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$ při ortogonálních transformacích souřadnic (přechodech mezi KSS) transformuje jako vektorové pole.*

Cvičení 3.5 *Ukažte, že pro libovolné vektorové pole $\vec{F}(x)$ na E_n se veličina* $\operatorname{rot} \vec{F}(x)$ *při vlastních ortogonálních transformacích souřadnic (přechodech mezi pravotočivými KSS) transformuje jako vektorové pole.*

Cvičení 3.6 *Transformujte intenzitu elektrického pole $\vec{E}(x)$ buzeného bodovým nábojem Q umístěným v počátku KSS $\langle o, \mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\rangle$ do*
a) KSS $\langle \tilde{o} = o + \vec{a}, \widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\rangle$ jejíž počátek je posunut o $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$

[3] Někdy se bere $\mathbb{S} \in O(3)$ a někdy se připouští i změna směru chodu času $\tilde{t} = -t$.

b) KSS $\langle \tilde{o} = o, \widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\mathbb{S}\rangle$, kde $\mathbb{S} \in SO(3)$
c) [Dcv.] KSS jejíž osy jsou natočeny okolo 3. osy o úhel $\frac{\pi}{6}$.
Která z transformací představuje symetrii vektorového pole $\vec{E}(x)$?

Cvičení 3.7 *Složte Galileiho transformace souřadnic dané pomocí prvků $(\mathbb{S}, W, x_0)$ a $(\mathbb{S}', W', x_0')$, kde $\mathbb{S}, \mathbb{S}' \in O(3)$ a $W, W', x_0, x_0' \in \mathbb{R}^3$ tj. zapište výsledek jako $(\mathbb{S}'', W'', x_0'')$.*

Cvičení 3.8 *Zapište Galileiho transformaci $\widetilde{x} = \mathbb{S}^T(x - Wt - x_0)$, $\tilde{t} = t$ souřadnic (pasivní) pomocí matic – maticová reprezentace Galileiho grupy. S využitím tohoto zápisu složte dvě po sobě jdoucí Galieliho transformace.*

Cvičení 3.9 *Ukažte, že jediný jednočásticový galieovsky invariantní systém je pouze volná částice.*

Cvičení 3.10 *Jak se transformuje kinetická energie volné částice při transformaci souřadnic $x_i = \widetilde{x}_i + w_i t, \forall i = 1, 2, 3$, kde w_i jsou konstanty je-li tato transformace a) změnou souřadnic v rámci jedné vztažné soustavy b) přechodem mezi vztažnými soustavami?*

Cvičení 3.11 *Najděte transformační vztah pro celkový moment hybnosti $\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$ soustavy N hm. bodů při přechodu od inerciální VS $\langle o, \mathcal{E}\rangle$ k VS $\langle o'(t), \mathcal{E}' = \mathcal{E}\rangle$ která se vůči ní pohybuje a to tak, že je*

a) neinerciální

b) inerciální tj. $\vec{r}(o') = \vec{W}t + \vec{a}_0$, kde $W, a_0 \in \mathbb{R}^3$ jsou konstanty. Ukažte, že v tomto případě pro izolovanou soustavu platí $\vec{L}' = konst.$

c) soustava hmotného středu tj. $\vec{x}(o') = \vec{R}$. Ukažte, že druhá věta impulsová má v soustavě hmotného středu stejný tvar jako v soustavě inerciální $\dot{\vec{L}} = \vec{N}^{(e)}$.

Cvičení 3.12 *Ukažte že pro libovolné skalární pole $U(x)$ na E_n se veličina* grad U *transformuje při ortogonálních transformacích jako vektorové pole.*

Cvičení 3.13 *Ukažte, že pro libovolné vektorové pole $\vec{F}(x)$ na E_n se veličina* div $\vec{F}$ *transformuje při ortogonálních transformacích souřadnic jako skalární pole.*

Cvičení 3.14 *Transformujte skalární pole $\phi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{GM}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$ popisující gravitační potenciál hmotného bodu hmotnosti M v počátku KSS $\langle o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\rangle$ do KSS $\langle \tilde{o}, (\vec{\tilde{e}}_1 = \vec{e}_1, \vec{\tilde{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2 + \vec{e}_3), \vec{\tilde{e}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2 - \vec{e}_3))\rangle$ jejíž počátek $\tilde{o}$ má v původní soustavě souřadnice $x(\tilde{o}) = (a_1, a_2, 0)$.*

Cvičení 3.15 *Transformujte složky vektorového pole $E_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx_i}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}$ popisující intenzitu elektrického pole buzeného nábojem Q umístěným v počátku KSS $\langle o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\rangle$ do KSS $\langle \tilde{o} = o, (\vec{\tilde{e}}_1 = \vec{e}_2, \vec{\tilde{e}}_2 = -\vec{e}_1, \vec{\tilde{e}}_3 = \vec{e}_3)\rangle$.*

Cvičení 3.16 *Transformace skalárního pole. Zapište funkce popisující skalární elektrický potenciál soustavy dvou elektronů vzdálených od sebe na délku l ve vztažné soustavě:*
a) $\langle o, \mathcal{E}\rangle$, kde o je bod ležící ve středu úsečky spojující elektrony a $\mathcal{E}$ je ortonormální báze, že $\vec{e}_1$ směřuje ve směru spojnice obou elektronů a $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ jsou na ní kolmé?
b) $\langle \tilde{o}, \widetilde{\mathcal{E}}\rangle$, kde $\tilde{o}$ je bod ležící ve vrcholu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona je tvořena úsečkou spojující elektrony a $\widetilde{\mathcal{E}}$ ortonormální báze taková, že $\vec{\tilde{e}}_1, \vec{\tilde{e}}_2$ směřují ve směru jednotlivých elektronů a $\vec{\tilde{e}}_3$ je na ně kolmá?
Uvědomte si, že ač funkce φ a $\widetilde{\varphi}$ mají různý tvar, popisují stejné elektrické pole!

Cvičení 3.17 *Převeďte Newtonovy rovnice pro jeden hmotný bod do obecných souřadnic. Pro které volby obecných souřadnic budou mít v případě volného bezsilového hmotného bodu tyto rovnice stejný tvar jako v kartézských souřadnicích tj. které z transformací budou jejich symetriemi v případě nulového silového pole?*

Cvičení 3.18 *Určete jaká omezení plynou pro síly působící v uzavřené dvoučásticové soustavě z požadavku galieovské invariance.*

Cvičení 3.19 *Dokažte, že centrální izotropní síly $\vec{F}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)\vec{r}$ jsou potenciální.*

4 Rotace, Tuhé těleso

Uvažujme vzájemný rotační pohyb dvou vztažných soustav reprezentovaných kartézskými soustavami souřadnic $\langle o, \mathcal{E}\rangle$ a $\langle o, \widetilde{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}\mathbb{S}(t)\rangle$ se společným počátkem, kde $t \mapsto \mathbb{S}(t) \in SO(3)$ je spojitě diferencovatelné zobrazení, z pohledu VS $\langle o, \mathcal{E}\rangle$. **Pseudovektor $\vec{\Omega}$ úhlové rychlosti** rotace VS $\langle o, \widetilde{\mathcal{E}}(t)\rangle$ vzhledem k VS $\langle o, \mathcal{E}\rangle$ definujeme pomocí **tenzoru úhlové rychlosti** ω, jehož složky vzhledem k bázi $\widetilde{\mathcal{E}}$ jsou dány předpisem $\widetilde{\omega}_{ij} = -(\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})_{ij}$. V pravotočivé (ortonormální) bázi $\widetilde{\mathcal{E}}$ budou složky pseudovektoru $\vec{\Omega}$ rovny $\widetilde{\Omega}_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\widetilde{\omega}_{jk} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})_{jk}$.

Abychom popsali pohyb tuhého tělesa vzhledem k inerciální (laboratorní) VS $\langle o, \mathcal{E}\rangle$ spojíme s ním tzv. **tělesovou** VS $\langle \tilde{o}(t), \widetilde{\mathcal{E}}(t)\rangle$, jejíž počátek $\tilde{o}(t) = o + \vec{R}(t)$ bude ležet v jeho hmotném středu a jejíž osy budou nehybné vzhledem k tělesu. Translační pohyb tuhého tělesa je pak dán výslednicí vnějších sil $\vec{F}^{(e)}$ působících na těleso a 1. větou impulzovou v laboratorní soustavě $\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}$, kde M je celková hmotnost tělesa.

Rozložení hmoty ve spojitém tělese objemu V popisuje **tenzor momentu setrvačnosti** I, jehož složky jsou v příslušné VS dány vztahy $I_{jk} = \int_V \rho(\delta_{jk}x_lx_l - x_jx_k)dV$, $\forall i,j = 1,2,3$. V laboratorní VS i ve VS hmotného středu jsou tyto složky závislé na čase, proto se zpravidla počítají v tělesové VS. Nediagonální prvky I se nazývají deviační momenty. Tenzor momentu setrvačnosti je symetrický ($I_{jk} = I_{kj}$) a proto lze osy tělesové VS vždy zvolit tak, že jeho matice bude diagonální $\mathbb{I} = diag(I_1, I_2, I_3)$. Takové osy nazýváme **hlavní osy setrvačnosti** a jim příslušné momenty I_j **hlavní momenty setrvačnosti**. Rotační pohyb tuhého tělesa získáme řešením **Eulerových setrvačníkových rovnic** $\tilde{I}_{ij}\dot{\widetilde{\Omega}}_j + \varepsilon_{ijk}\widetilde{\Omega}_j\tilde{I}_{kl}\widetilde{\Omega}_l = \widetilde{N}_i^{(e)}$, $\forall i = 1,2,3$, představujících přepis 2. věty impulzové $\dot{\vec{L}}' = \vec{N}'^{(e)}$ ze soustavy hmotného středu do tělesové soustavy a následným dopočítáním prvků matice $\mathbb{S}(t)$ z rovnic $\dot{\mathbb{S}}_{ij} = -\varepsilon_{jkl}\widetilde{\Omega}_k\mathbb{S}_{il}$, $\forall i = 1,2,3$.

Kinetická energie tuhého tělesa v laboratorní soustavě $T = \frac{1}{2}M\dot{R}_i^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_{jk}\widetilde{\Omega}_j\widetilde{\Omega}_k$ je součtem kinetické energie translačního pohybu hmotného středu a kinetické energie rotačního pohybu vůči hmotnému středu (kinetická energie v soustavě hmotného středu). Jde-li o rotaci kolem "pevné" osy jdoucí hmotným středem tělesa, jejíž směr je v laboratorní soustavě dán konstatním jednotkovým vektorem $\vec{n}$, pak $\vec{\Omega} = |\vec{\Omega}|\vec{n}$ a kinecká energie v soustavě hmotného středu bude $T' = \frac{1}{2}I_{jk}n_jn_k|\vec{\Omega}|^2 = \frac{1}{2}I_{\vec{n}}|\vec{\Omega}|$, kde $I_{\vec{n}}$ nazýváme **momentem setrvačnosti tělesa vzhledem k ose $\vec{n}$**.

Cvičení 4.1 *Ukažte, že $\omega_{ij} = -(\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T)_{ij}$ a $\widetilde{\omega}_{ij} = -(\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})_{ij}$ jsou složky téhož tenzoru ω úhlové rychlosti rotace VS $\langle \widetilde{o}, \widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\mathbb{S}(t)\rangle$ vzhledem k VS $\langle o, E\rangle$ a Ω_i a $\widetilde{\Omega}_i$ složky téhož pseudovektoru $\vec{\Omega}$ v bázích $\mathcal{E}$ a $\widetilde{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}\mathbb{S}(t)$, kde $t \mapsto \mathbb{S}(t) \in SO(3)$ je spojitě diferencovatelné zobrazení.*

Cvičení 4.2 *Najděte složky $\widetilde{\Omega}(t)$ pseudovektoru úhlové rychlosti $\vec{\Omega}(t)$ rotace VS $\langle o, \widetilde{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}\mathbb{S}(t)\rangle$ vzhledem k VS $\langle o, \mathcal{E}\rangle$, je-li*

$$\mathbb{S}(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 4.3 *Časová změna vektoru v rotující soustavě. Časovou změnu vektoru $\vec{y} = y_i\vec{e}_i$ vzhledem k VS $\langle o, \mathcal{E}\rangle$ definujeme předpisem $\frac{d}{dt}\vec{y} = \dot{y}_i\vec{e}_i$. Uvažujte dvě vztažné soustavy se společným počátkem $\langle o, \mathcal{E}\rangle$ a $\langle o, \widetilde{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}\mathbb{S}(t)\rangle$, $\mathbb{S}(t) \in SO(3)$. Ukažte, že časové změny vektorů vzhledem k první ze soustav lze vyjádřit pomocí vztahů $\dot{\widetilde{\vec{e}}}_i = \frac{d}{dt}\widetilde{\vec{e}}_i = \widetilde{\omega}_{ij}\widetilde{\vec{e}}_j$ pro bazické vektory a $\dot{\vec{y}} = \frac{d}{dt}\vec{y} = \frac{\widetilde{d}}{dt}\vec{y} + \vec{\Omega} \times \vec{y}$, kde $\frac{\widetilde{d}}{dt}$ značí derivaci vzhledem k VS $\langle o, \widetilde{\mathcal{E}}\rangle$. Jaké vztahy platí pro složky vektoru $\vec{y}(t) = y_i(t)\vec{e}_i = \widetilde{y}_j(t)\widetilde{\vec{e}}_j(t)$?*

Cvičení 4.4 *Určete složky tenzoru momentu setrvačnosti v hlavních osách setrvačnosti a moment setrvačnosti vůči libovolné ose jdoucí hmotným středem pro homogenní kvádr o délkách hran a, b, c.*

Cvičení 4.5 *Ukažte, že pro těleso s konstantní hustotou hmoty v homogenním tíhovém poli je moment sil vzhledem k hmotnému středu tělesa nulový.*

Cvičení 4.6 *Řešte Eulerovy setrvačníkové rovnice pro volný symetrický setrvačník. Jaké pohyby tento setrvačník může konat?*

Cvičení 4.7 *Homogenní válec s hlavními složkami momentu setrvačnosti $I_1 = I_2$, I_3 na který nepůsobí žádné síly rotuje v čase t_0 úhlovou rychlostí 10 rad/s okolo 2. osy. Okolo jaké osy a jakou rychlostí bude rotovat o 10 vteřin později?*

Cvičení 4.8 *Stabilita rotace bezsilového setrvačníku: Říkáme, že rotace je stabilní, když při malé změně $\vec{\Omega}$ od volné osy zůstává tato výchylka trvale malá. Ukažte, že stabilní je rotace kolem os s maximálním a minimálním hlavním momentem setrvačnosti, kdežto rotace kolem osy se středním momentem setrvačnosti je nestabilní, malá výchylka roste a rotace se "překlopí".*

Cvičení 4.9 *Určete velikost síly, kterou působí vyosené kolo na uložení hřídele. Vyosené kolo považujte za homogenní obruč poloměru R, která rotuje konstantní úhlovou rychlostí o velikosti $|\vec{\Omega}|$ kolem osy (hřídel) procházejí jejím středem, přičemž rovina obruče svírá s touto osou úhel ε. Hřídel je uložena (v ložisku) na obou stranách obruče ve vzdálenost a od středu obruče.*

Cvičení 4.10 *Ukažte, že derivace $\dot{\omega}_{ij}$ a $\dot{\widetilde{\omega}}_{ij}$ jsou složky téhož tenzoru v bázích $\mathcal{E}$ a $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\mathbb{S}(t)$, kde $\mathbb{S}(t) \in SO(3)$.*

Cvičení 4.11 *Určete tenzor momentu setrvačnosti pro homogenní válec.*

Cvičení 4.12 *Hlavní momenty setrvačnosti homogenního válce výšky h, poloměru r a hmotnosti m jsou $\frac{1}{12}m(3r^2+h^2)$ a $\frac{1}{2}mr^2$. Určete moment setrvačnosti vůči libovolné ose jdoucí hmotným středem válce.*

Cvičení 4.13 *Určete tenzor momentu setrvačnosti a moment setrvačnosti vzhledem k libovolné ose jdoucí středem pro homogenní krychli.*

Cvičení 4.14 *Řešte Eulerovy setrvačníkové rovnice pro volný sférický setrvačník.*

Cvičení 4.15 *Nalezněte matici otáčení $\mathbb{S}(t)$ pro homogenní kouli v na kterou nepůsobí žádné síly.*

Cvičení 4.16 *Určete pohyb bodu povrchu homogenní koule v homogenním silovém poli.*

Cvičení 4.17 *Ukažte, že pro libovolné $\widetilde{y} = (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \widetilde{y}_3) \in \mathbb{R}^3$ platí*

$$(\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})_{ij}\widetilde{y}_j = -\widetilde{\omega}_{ij}\widetilde{y}_j = (\widetilde{\Omega} \times \widetilde{y})_i, \quad (\widetilde{\omega}^2)_{ik}\widetilde{y}_k = (\widetilde{\Omega} \times (\widetilde{\Omega} \times \widetilde{y}))_i.$$

5 Kontinuum

Síly působící na elementární objem dV kontinua dělíme na objemové a plošné. **Síly objemové** jsou vnější síly působící na celé těleso, které závisí na objemu dV zvolené části tělesa a příslušné hustotě (například hmotnostní nebo nábojové) vyjadřujeme je pomocí hustoty síly $\vec{f}$ jako $d\vec{F}^{(o)} = \vec{f}dV$. Síly plošné popisují přenos silového působení v tělese. Jsou to síly, kterými na objem dV působí sousední elementární objemy. **Plošné síly** $d\vec{F}^{(p)}(\vec{r}, t, d\vec{S})$ v daném místě $\vec{r}$ tělesa závisí na čase t a zvolené elementární ploše $d\vec{S} = \vec{n}\,dS$, kde dS je velikost této plochy a $\vec{n}$ její normála s vnější orientací (tj. mířící z objemu dV). Taylorovým rozvojem složek plošné síly podle plochy, na kterou síla působí, získáme $dF_i(\vec{r}, t, d\vec{S}) = dF_i(\vec{r}, t, \vec{0}) + \frac{\partial F_i}{\partial S_j}\big|_{d\vec{S}=\vec{0}}\, n_j dS + O(dS^2) \doteq 0 + \frac{\partial F_i}{\partial S_j}\big|_{d\vec{S}=\vec{0}}\, n_j dS$. Výraz $\sigma_{ij}(\vec{r}, t) = \frac{\partial F_i}{\partial S_j}\big|_{d\vec{S}=\vec{0}}(\vec{r}, t)$ představuje složky tenzorového pole tzv. **tenzoru napětí** v místě $\vec{r}$ a čase t. Plošnou sílu $d\vec{F}^{(p)} = \vec{T}dS$ vztaženou na velikost dS plochy $d\vec{S} = \vec{n}\,dS$, na kterou působí, nazýváme **vektorem napětí** $\vec{T}(\vec{r}, t)$. Pro vektor napětí platí $T_i = \sigma_{ij} n_j$. Diagonální složky tenzoru napětí představují normálová napětí k souřadnicovým plochám, nediagonální složky napětí smyková. Pro síly splňující 3. Newtonův zákon je tenzor napětí symetrický a tedy ve vhodně zvolené KSS v daném bodě kontinua je jemu odpovídající matice diagonální. Tenzor napětí σ lze rozdělit na čistě objemovou (tahově–tlakovou) $\sigma^{(o)} = \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}(\sigma)\hat{1}$ a čistě smykovou $\sigma^{(s)} = \sigma - \sigma^{(o)}$ část, kde $\mathrm{Tr}(\sigma) = \sum \sigma_{ii}$ je stopa tenzoru σ označovaná jako $-Np$ a $N = \mathrm{Tr}(\hat{1})$ je stopa jednotkového tenzoru $\hat{1}$.

Zkoumáme-li statiku kontinua, dosadíme do pohybových rovnic kontinua $\varrho a_i = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ nuly za zrychlení bodů kontinua a_i a dostaneme tři rovnice $0 = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ pro šest neznámých složek tenzoru napětí, které musíme doplnit o okrajové podmínky udávající rozložení napětí $\sigma_{ij} n_j\big|_{\partial V} = T_i\big|_{\partial V}$ nebo posunutí $\vec{u}$ na povrchu kontinua.

Ideální tekutina je tekutina, ve které nepůsobí smyková napětí, tj. její tenzor napětí má pouze objemovou část $\sigma = -p\hat{1}$. Mezi ideální tekutiny patří **ideální kapaliny**, které jsou dokonale nestlačitelné ($\varrho = konst.$) a **ideální plyny**, které jsou naopak dokonale stlačitelné a rozpínavé. Mechanické chování ideální tekutiny popisujeme pomocí vektorového pole rychlostí proudění tekutiny $\vec{v}(\vec{r}, t)$ a skalárních polí hustoty $\varrho(\vec{r}, t)$ a tlaku $p(\vec{r}, t)$ ideální tekutiny. Tato pole musí pro ideální tekutinu splňovat **Eulerovu hydrodynamickou rovnici** $(\nabla \cdot \vec{v})\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\varrho}(\vec{f} - \nabla p)$.

Uvažujme aktivní transformaci – posunutí bodů kontinua $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{u}$ danou vektorovým polem posunutí $\vec{u}(\vec{r})$. Dojde-li při tomto posunutí ke změně vzájemných vzdáleností bodů kontinua, nazýváme jej deformací. **Tenzorem deformace** nazýváme tenzor ϵ, jehož složky jsou $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \sum \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$. Jeho část $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)$ nazýváme **tenzorem malé deformace**. Oba tyto tenzory jsou symetrické a tedy diagonalizovatelné volbou vhodné KSS, navíc je lze rozdělit stejně jako tenzor napětí na čistě objemovou a smykovou část. Diagonální složky tenzoru deformace představují relativní prodloužení ve směru jednotlivých os, nediagonální složky představují smykové deformace. Stopa tenzoru deformací se nazývá **objemovou (kubickou) dilatací** $\vartheta = \mathrm{Tr}(\epsilon)$ a představuje relativní změnu objemu.

Pomocí tenzoru deformací popisujeme zejména tělesa pevného skupenství, kde jsou oproti jiným skupenstvím změny vzájemných poloh "sousedních" částic kontinua zpravidla malé. Požadujeme-li, aby kontinuum po deformaci zůstalo spojité, musí složky tenzoru malých deformací splňovat rovnice kompatibility $\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{kln}\frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_m \partial x_n} = 0,\ \forall j, l$, dokazatelné za předpokladu, že složky vektorového pole posunutí jsou funkce třídy C^3.

Hookeův zákon $\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$ představuje vztah mezi tenzorem malé deformace a tenzorem napětí a je dán **tenzorem elastických koeficientů**, jehož (díky symetriím jen) 21 nezávislých složek představuje konstanty (v případě nehomogenního kontinua funkce) dané konkrétním kontinuem. Pro homogenní izotropní kontinuum se počet těchto konstant redukuje na dvě: λ, μ nazývané

Lamého koeficienty a Hookeův zákon nabývá tvar $\sigma = \lambda \operatorname{Tr}(e)\hat{1} + 2\mu e$. Rozložíme-li oba tenzory na objemovou a smykovou část, můžeme Hookeův zákon přepsat ve tvaru $\sigma^{(o)} = 3Ke^{(o)}$ a $\sigma^{(e)} = 2\mu e^{(s)}$, kde $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ je tzv. modul stlačitelnosti a μ modul pružnosti ve smyku. Kromě konstant λ, μ, K se obvykle definuje ještě Youngův modul pružnosti v tahu $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ vyjadřující poměr mezi napětím a relativním prodloužením a Poissonovu konstantu $\bar{\sigma} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ vyjadřující poměr mezi příčným zkrácením a podélným prodloužením.

Cvičení 5.1 *Uvažujte část kontinua ve tvaru krychle o hraně a ve které je tenzor napětí konstantní a vzhledem k osám tvořeným hranami krychle má složky σ_{ij}. Určete normálové napětí k rovinné ploše jejíž hrany tvoří a) osy xy b) rovnoběžné stěnové úhlopříčky dvou protilehlých stěn krychle c) dvě stěnové úhlopříčky jdoucí z vrcholu ve kterém je počátek.*

Cvičení 5.2 *Spočtěte tenzor deformace a tenzor malé deformace v rovině pro vektory posunutí: a) $u = (Ax, By)$ b) $u = (By, Ax)$ c) $u = (-Ay, Ax)$.*

Cvičení 5.3 *Pro tenzory z cvičení 5.2 spočítejte objemovou (v tomto případě plošnou) dilataci ϑ a najděte jejich rozklad na čistě objemovou a čistě smykovou část.*

Cvičení 5.4 *Odvoďte rovnici kontinuity představující zákon zachování hmotnosti pro tekutiny.*

Cvičení 5.5 *Hydrostatika: Z Eulerových hydrodynamických rovnic pro ideální tekutinu odvoďte závislost tlaku na hloubce v nehybné $\vec{v}(\vec{r}, t) = 0$ ideální (tj. nestlačitelné $\varrho =$ konst. a bez vnitřního tření) kapalině v homogenním tíhovém poli o intenzitě $\vec{g}$.*

Cvičení 5.6 *Z Eulerovy hydrodynamické rovnice odvoďte Bernoulliho rovnici pro stacionární $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ nevírové $\nabla \times \vec{v} = 0$ proudění ideální kapaliny v homogenním tíhovém poli $\vec{g}$.*

Cvičení 5.7 *Najděte tenzor malých deformací pro pružné homogenní izotropní kontinuum vyplňující dutinu tvaru kvádru, které je z jedné strany kvádru o ploše S stlačováno silou $\vec{F}$ kolmou na tuto stranu. Předpokládejte, že pro kontinuum znáte modul stlačitelnosti K a modul pružnosti ve smyku μ.*

Cvičení 5.8 *Kvádr výšky l, vyrobený z homogenního izotropního pružného materiálu o hustotě ϱ, stojí na jedné ze svých čtvercových podstav o hraně a v homogenním tíhovém poli intenzity $\vec{g}$. Najděte tenzor napětí, tenzor malých deformací a určete jak se změní výška kvádr vlivem působení tíhového pole. *Určete jak se bude kvádr deformovat tj. jak bude vypadat vektorové pole posunutí.*

Cvičení 5.9 *Vyjádřete Youngův modulu pružnosti v tahu $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ a Poissonovu konstantu $\bar{\sigma} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ pomocí modulu stlačitelnosti $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ a modulu pružnosti ve smyku μ.*

Cvičení 5.10 *Najděte tenzor malých deformací pro pružné homogenní izotropní kontinuum tvaru kvádru o hranách a, b, c, které je z ve směru hrany a stlačováno silou $\vec{F}$. Předpokládejte, že kvádr je vložen mezi dvě pevné stěny kolmé na hranu b a že pro kontinuum znáte modul stlačitelnosti K a modul pružnosti ve smyku μ.*

Cvičení 5.11 *Ukažte, že pro vektorové pole rychlostí proudící tekutiny $\vec{v}(\vec{r}, t)$ platí vztah $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v})$.*

Cvičení 5.12 *Odvoďte Navier–Stokesovu rovnici. Tenzor napětí neideální tekutiny má složky* $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{v} + 2\eta \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$*, kde* λ^*, η *jsou koeficienty viskozity,* η *je dynamická viskozita,* $\nu = \frac{\eta}{\varrho}$ *kinematická viskozita,* $\zeta = \lambda^* + \frac{2}{3}\eta$ *druhá viskozita.*

Cvičení 5.13 *Ukažte, že veličina definovaná předpisem* $\sigma_{ij}(x) = \frac{\partial F_i(x)}{\partial S_j}$ *se při přechodu mezi KSS transformuje jako tenzorové pole.*

Cvičení 5.14 *Ukažte, že veličina definovaná předpisem* $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$*, kde* $\vec{u}(x)$ *je vektorové pole, se při přechodu mezi KSS transformuje jako tenzor 2. řádu.*

Cvičení 5.15 *Jaké tahy a tlaky působí v místě kontinua, kde má tenzor napětí tvar* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Cvičení 5.16 *Odvoďte rovnice kompatibility pro deformace.*

Cvičení 5.17 *Ukažte, že jedinými izotropními tj. SO(3)–invariantními tenzory řádu 1,2,3 jsou tenzory jejichž složky jsou v libovolné KSS rovny* $0, A\delta_{ij}$ *a* $A\varepsilon_{ijk}$*, kde* $A \in \mathbb{R}$.

Cvičení 5.18 *Najděte obecný tvar pro složky izotropního tenzoru 4. řádu v KSS.*

6 STR, Lorentzovy transformace

Speciální Lorentzova transformace (boost) ve směru osy x, představující přechod mezi dvěma inerciálními vztažnými soustavami (IVS) s rovnoběžnými osami, z nichž IVS$'$ se pohybuje vzhledem k IVS rychlostí $\vec{V}$ ve směru osy x, je dána vztahy $x' = \gamma(x - Vt)$, $t' = \gamma(t - \frac{V}{c^2}x)$, $y' = y$, $z' = z$, kde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ je Lorentzův faktor a $\beta = \frac{V}{c}$.

Souřadnice události v Minkowského prostoročase vybaveném pseudometrickým tenzorem $(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$ zapisujeme pomocí čtyřvektoru polohy $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$. Matice boostu ve směru osy x je $\mathbb{A} = ({\alpha^\mu}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pro těleso (částici) definujeme vlastní čas τ a vlastní (klidovou) délku l_0 jako čas a délku v jeho okamžité klidové soustavě $d\tau = \frac{1}{\gamma}dt$.

Souřadnice události v Minkowského prostoročase vybaveném pseudometrickým tenzorem $(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$ zapisujeme pomocí čtyřvektoru polohy $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$. Matice boostu ve směru osy x je $\mathbb{A} = ({\alpha^\mu}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cvičení 6.1 *Odvoďte relativistický zákon skládání rovnoběžných rychlostí složením dvou speciálních Lorentzových transformací. Jsou speciální Lorentzovy transformace podél osy x záměnné – záleží na jejich pořadí?*

Cvičení 6.2 *Přesvědčte se, že Lorentzovy transformace je možno zapsat v kompaktní vektorové podobě* $\vec{r}' = \vec{r} + (\frac{\gamma-1}{V^2}\vec{V}\cdot\vec{r} - \gamma t)\vec{V}$, $t' = \gamma(t - \frac{\vec{V}\cdot\vec{r}}{c^2})$*. Návod: rozložte vektor* $\vec{r}$ *na dvě složky rovnoběžnou k* $\vec{V}$ *a kolmou k* $\vec{V}$*. Složky se pak transformují obdobně jako souřadnice x resp. y.*

Cvičení 6.3 *Najděte matici speciální Lorentzovy transformace (boostu) v libovolném směru. Jakou má tato matice vlastnost?*

Cvičení 6.4 *Odvoďte relativistický zákon skládání rychlostí pro libovolnou vzájemnou orientaci obou rychlostí. Specializujte výsledek pro případ rovnoběžných a kolmých rychlostí. Jak se vzorec zjednoduší pro $V << c$. Jaká bude velikost výsledné rychlosti?*

Cvičení 6.5 *Určete rozdíl úhlů mezi dopadajícím světelným paprskem a osou x pozorovaných ve dvou inerciálních VS, které se navzájem pohybují rychlostí o velikosti V ve směru osy x. Vysvětlete pomocí výsledku aberaci světla stálic tj. jev kdy hvězdy opisují během roku na obloze malé elipsy, kružnice nebo úsečky o úhlovém rozměru asi $41''$ v důsledku pohybu Země kolem Slunce rychlostí $V = 30km/s$.*

Cvičení 6.6 *Fizeaův pokus (1859). Fizeau měřil pomocí interferometru rychlost světla v v kapalinách tekoucích (rychlostí $\pm V$) po i proti směru šíření světla a zjistil závislost $v = \frac{c}{n} \pm V(1 - \frac{1}{n^2})$, kde n je index lomu kapaliny. Odvoďte tento empirický vztah pomocí zákona skládání rychlostí. Návod: použijte Taylorův rozvoj do prvního řádu ve $\frac{V}{c}$.*

Cvičení 6.7 *Uvažujte dvě inerciální soustavy S a S' spojené speciální Lorentzovou transformací. Určete rychlost V soustavy S' vůči soustavě S tak aby*
a) událost o souřadnicích $(ct, x, 0, 0)$ splňujících $(ct)^2 - x^2 = \Delta s^2 < 0$ v soustavě S byla v soustavě S' současná s událostí o souřadnicích $(0, 0, 0, 0)$
b) událost o souřadnicích $(ct, x, 0, 0)$ splňujících $(ct)^2 - x^2 = \Delta s^2 > 0$ v soustavě S byla v soustavě S' soumístná s událostí o souřadnicích $(0, 0, 0, 0)$.

Cvičení 6.8 *Ukažte, že fáze rovinné světelné vlny lze zapsat jako součin čtyřvektoru polohy a tzv. vlnového čtyřvektoru a pomocí transformace vlnového čtyřvektoru odvoďte Dopplerův jev pro rovinnou světelnou vlnu.*

Cvičení 6.9 *Mezon π^0 s klidovou hmotností m_0 pohybující se rychlostí v se rozpadá na dvě stejná kvanta záření gama (fotony). Určete úhel φ který budou svírat směry pohybu fotonů.*

Cvičení 6.10 *Ukažte, že v nepřítomnosti vnějšího pole se foton nemůže změnit v pár elektron – pozitron.*

Cvičení 6.11 *Na elektron, který je v laboratorní soustavě v klidu dopadá foton s energii $h\nu_0$. Najděte závislost energie fotonu po srážce na úhlu φ, který svírá směr fotonu po srážce se směrem fotonu před srážkou.*

Cvičení 6.12 *Napište Lagrangeovu a Hamiltonovu funkci pro relativistickou nabitou částici (m_0, q) v elektromagnetickém poli určeném skalárním potenciálem $\varphi(\vec{r}, t)$ a vektorovým potenciálem $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Najděte integrály pohybu v případě, že $\varphi = 0$ a $\vec{A} = (0, 0, A(x, y))$.*

Cvičení 6.13 *Pohyb nabité relativistické částice v magnetickém poli - cyklotronová frekvence. Určete jak se bude pohybovat nabitá částice v homogenním magnetickém poli intenzity $\vec{B} = konst.$ v nerelativistickém a relativistickém případě.*

Cvičení 6.14 *Relativní rychlost dvou částic v_{rel} je definována jako rychlost jedné z nich v soustavě, v níž je druhá částice v klidu. Určete kvadrát v_{rel}^2, jestliže v některé inerciální soustavě mají částice rychlosti $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$.*

Cvičení 6.15 *V horní vrstvě atmosféry vznikl mion pohybující se rychlostí $v = 0,99c$. Do svého rozpadu stihl urazit vzdálenost $l = 5km$ (v soustavě spojené se Zemí – SZ). a) Jakou dobu života mionu pozorujeme v soustavě SZ? b) Jakou dobu žvota měl mion ve své klidové soustavě? c) Jak silná vrstva atmosféry prošla kolem mionu v jeho klidové soustavě?*

Cvičení 6.16 *Odvoďte vzorce pro dilataci čas a kontrakci délek z invariance intervalu.*

Cvičení 6.17 *Rychlost $\vec{v}$ (v soustavě S) leží v rovině xy a s osou x svírá úhel θ, obdobně je definovaný úhel θ' pro rychlost $\vec{v}'$ v soustavě S'. Odvoďte vztah mezi θ a θ' při speciální Lorentzově transformaci $S \longrightarrow S'$. Určete $\tan\theta'$ pomocí θ.*

Cvičení 6.18 *Tyč vlastní délky l' je v klidu v soustavě S', v níž svírá úhel θ' s osou x'. Určete délku l a úhel θ (s osou x) v soustavě S. Jsou–li soustavy S a S' spojeny speciální Lorentzovou transformací ve směru osy x.*

Cvičení 6.19 *Přesvědčte se, že z transformačních vzorců pro čtyřrychlost plynou relativistické vzorce pro skládání rychlostí. Co dává transformace nultých složek?*

Cvičení 6.20 *Určete vztah mezi energií a hybností ultrarelativistické částice tj. částice, která se pohybuje rychlostí blízkou rychlosti světla.*

Cvičení 6.21 *V kosmickém záření se vyskytují protony s energií $E = 10^{10}\mathrm{GeV}$. Za jak dlouho proletí naší galaxií o průměru 10^5 světelných let z pohledu naší a jejich klidové soustavy?*

Cvičení 6.22 *Ukažte, že v Minkowského prostoročase je čtyřzrychlení kolmé na čtyřrychlost, tj. že $u_\mu w^\mu = 0$.*

7 Teorie pole

Cvičení 7.1 *Napište hustotu Lagrangeovy funkce pro strunu s konstantní lineární hustotou ϱ a pevnými konci napjatou silou T podél osy z, která může konat pouze příčné kmity v rovině xz. Najděte pohybovou rovnici struny.*

Cvičení 7.2 *Odvoďte pohybovou rovnici pro pole popsané funkcemi ψ, θ na dvourozměrném prostoročase (t, x), je-li jeho hustota Lagrangeovy funkce $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\theta_x\theta_t + \frac{\alpha}{6}\theta_x^3 + \theta_x\psi_x + \frac{1}{2}\psi^2$. Výsledné pohybové rovnice zjednodušte pomocí substituce $\varphi = \theta_x$ na tvar odpovídající Korteweg–de Vriesově rovnici popisující vlny v mělké vodě.*

Cvičení 7.3 *Odvoďte pohybovou rovnici reálného skalárního pole $\varphi = \varphi(t, \vec{x})$ v Minkowského prostoročase, je-li jeho Lagrangeova hustota $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\varphi,_\mu \varphi,^\mu - \kappa^2\varphi^2)$. (Klein–Gordon)*

Cvičení 7.4 *Najděte řešení Maxwellových rovnic v homogenním elektricky neizotropním měkkém dielektriku, kde permeabilita μ je konstanta a permitivita ε_{ij} je symetrický tenzor 2. řádu. Řešení hledejte ve tvaru rovinné vlny.*

Cvičení 7.5 *Nechť je dána elektromagnetická vlna popsaná potenciály $\vec{A} = \vec{a}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$, $\varphi = b\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$. Ukažte, že magnetické pole $\vec{B}$ je automaticky příčné, zatímco příčnost elektrického pole $\vec{E}$ vyžaduje splnění podmínky $b = \omega\frac{\vec{k}\cdot\vec{a}}{k^2}$. Ukažte, že za této podmínky bude vektor $\vec{B}$ kolmý na vektor $\vec{E}$.*

Cvičení 7.6 *Určete kalibrační transformaci, která transformuje potenciály z předchozího příkladu splňující podmínku* $b = \omega\frac{\vec{k}\cdot\vec{a}}{k^2}$ *na tvar* $\vec{A}' = \vec{a}'\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$, $\varphi' = 0$ *odpovídající coulombovské kalibraci, v níž* $\vec{a}'\cdot\vec{k} = 0$.

Cvičení 7.7 *Jaký fyzikální smysl má veličina* $\Gamma = \oint_l \vec{A}\,\mathrm{d}\,\vec{l}$. *Je tato veličina kalibračně invariantní?*

Cvičení 7.8 *Dva různé vektorové potenciály, které popisují konstantní homogenní magnetické pole* $\vec{B} = (0, 0, B)$. *Ukažte, že tyto vektorové potenciály spolu souvisí kalibrační transformací, tj. najděte funkci* $\Lambda(\vec{r}, t)$.

Cvičení 7.9 *Pomocí čtyřpotenciálu resp. tenzoru elektromagnetického pole odvoďte transformační vztahy pro skalární* φ *a vektorový* $\vec{A}$ *potenciál resp. pole* $\vec{E}$ *a* $\vec{B}$ *při speciální Lorentzově transformaci.*

Cvičení 7.10 *Najděte skalární* φ *a vektorový potenciál* $\vec{A}$ *elektromagnetického pole buzeného ve vakuu bodovým nábojem e pohybujícím se v inerciální VS rovnoměrně přímočaře rychlostí* $\vec{V}$ *ve směru osy* x. *Jaký tvar mají ekvipotenciální plochy* $\varphi = konst.$*?*

Cvičení 7.11 *Rozhodněte, zda je veličina* $A^\mu A_\mu$ *vytvořená z čtyřpotenciálu* A^μ *a) Lorentzovsky invariantní b) kalibračně invariantní.*

Cvičení 7.12 *Spočtěte tenzor energie-hybnosti pro skalární pole popsané lagrangeovou funkcí* $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\rho\psi_t^2 - \frac{1}{2}T\psi_x^2$ *na dvojrozměrném prostoročase* $\mathbb{R}^2(t, x)$ *odpovídající příčným kmitům struny. Zapište příslušné zákony zachování odpovídající zachovávajícím se Noetherovským proudům tvořícím* $\mathcal{T}$ *tj. zde nulové dvojdivergence z dvojproudů.*

Cvičení 7.13 *Z hustoty Lagrangeovy funkce pro elektromagnetické pole* $\mathcal{L}(A_\mu, A_{\mu,\nu}, x^\lambda) = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu(x^\lambda)$ *odvoďte Maxwellovy–Lorentzovy rovnice.*

Cvičení 7.14 *Odvoďte pohybové rovnice polí ve dvourozměrném prostoročase* (t, x) *ze zadaných hustot Lagrangiánu. Indexy* t, x *značí parciální derivace podle* t, x.
a) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\varphi_t^2 - \varphi_x^2) + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$ *kde* $\mu^2, \lambda > 0$.
b) sinus–Gordon $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\varphi_t^2 - \varphi_x^2) + (\cos\varphi - 1)$.

Cvičení 7.15 *Hustota energie elastické deformace probíhající pomalu (izotermické deformace) je pro izotropní homogenní pružné prostředí dána vztahem* $w = \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu\right)\vartheta^2 + 2\mu\vartheta_2$, *kde* λ, μ *jsou konstanty (Lamého koeficienty) a* $\vartheta = Tr(e) = e_{ii}$, $\vartheta_2 = \frac{1}{2}(e_{ii}e_{jj} - e_{ij}e_{ij})$ *invarianty tenzoru malých deformací* $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)$. *Napište hustotu Lagrangeovy* $\mathcal{L}$ *funkce pro izotropní homogenní pružné těleso na které nepůsobí žádné vnější síly a pomocí ní odvoďte pohybové rovnice pro vektorové pole posunutí bodů tělesa* $\vec{u}(t, \vec{r})$. *Výsledek porovnejte s Lamého rovnicí.*

Cvičení 7.16 *Určete složky vektorových potenciálů z příkladu 7.8 ve sférických a cylindrických souřadnicích.*

Cvičení 7.17 *Ukažte, že hustota Lagrangeovy funkce pro elektromagnetické pole se zdroji* $\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$ *se při kalibrační transformaci* $\widetilde{A}_\mu = A_\mu - \partial_\mu\Lambda$ *změní jen o čtyřdivergenci nějkého čtyřvektorového pole (tj. je kvazisymetrická).*

Cvičení 7.18 *Z hustoty Lagrangeovy* $\mathcal{L}(A_\mu, A_{\mu,\nu}, x^\lambda) = -\frac{1}{4\mu_0}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2m^2A_\mu A^\mu\right)$, *kde* m *je konstanta, odvoďte pohybové rovnice pole.*