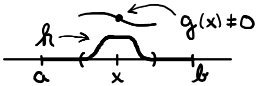
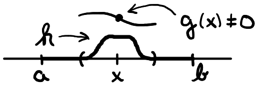
Základní lemma variačního počtu: Buď $g \in C\langle a,b\rangle$ pokud $\forall h \in C^{(n)}_{(0,0)}\langle a,b\rangle$ platí $\int_a^b g(x)\cdot h(x)\,dx = 0$ pak $g(x)=0$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$.

Základni lemma variačniho počtu: Buď $g \in C\langle a,b\rangle$ pokud $\forall h \in C^{(n)}_{(0,0)}\langle a,b\rangle$ platí $\int_a^b g(x)\cdot h(x)\,dx = 0$ pak $g(x) = 0 \ \forall x \in \langle a,b\rangle$.

Dk. sporem 

Základni lemma variačniho počtu: Buď $g \in C\langle a,b\rangle$ pokud $\forall h \in C^{(n)}_{(0,0)}\langle a,b\rangle$ platí $\int_a^b g(x)\cdot h(x)\,dx = 0$ pak $g(x)=0 \ \forall x \in \langle a,b\rangle$.

Dk. sporem

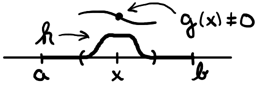


Dále speciálni případ funkcionálu:

Buď $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ třídy $C^{(2)}$ pak funkcionál $J: C^{(1)}\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $J(\varphi) := \int_a^b F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\,dx$ je diferencovatelný na $C^{(1)}\langle a,b\rangle$.

Základní lemma variačního počtu: Buď $g \in C\langle a,b\rangle$ pokud $\forall h \in C^{(n)}_{(0,0)}\langle a,b\rangle$ platí $\int_a^b g(x)\cdot h(x)\,dx = 0$ pak $g(x) = 0 \ \forall x \in \langle a,b\rangle$.

Dk. sporem

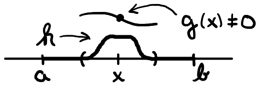


Dále speciální případ funkcionálu:

Buď $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ třídy $C^{(2)}$ pak funkcionál $J: C^{(1)}\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $J(\varphi) := \int_a^b F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\,dx$ je diferencovatelný na $C^{(1)}\langle a,b\rangle$.

$$\delta J(\varphi)[\delta\varphi] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} J(\varphi+\varepsilon\delta\varphi) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(x,\varphi+\varepsilon\delta\varphi,\varphi'+\varepsilon\delta\varphi')\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi'\,dx =$$

Základni lemma variačního počtu: Buď $g \in C\langle a,b\rangle$ pokud $\forall h \in C^{(n)}_{(0,0)}\langle a,b\rangle$ platí $\int_a^b g(x)\cdot h(x)\,dx = 0$ pak $g(x)=0 \ \forall x \in \langle a,b\rangle$.

Dk. sporem 

Dále speciálni případ funkcionálu:

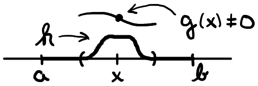
Buď $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ třídy $C^{(2)}$ pak funkcionál $J: C^{(1)}\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $J(\varphi) := \int_a^b F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\,dx$ je diferencovatelný na $C^{(1)}\langle a,b\rangle$.

$$\delta J(\varphi)[\delta\varphi] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} J(\varphi+\varepsilon\delta\varphi) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(x,\varphi+\varepsilon\delta\varphi,\varphi'+\varepsilon\delta\varphi')\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi'\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\delta\varphi\,dx = \int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial\varphi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\right]\delta\varphi\,dx + \left[\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right]_a^b$$

Základni lemma variačniho počtu: Buď $g \in C\langle a,b\rangle$ pokud $\forall h \in C^{(n)}_{(0,0)}\langle a,b\rangle$ platí $\int_a^b g(x)\cdot h(x)\,dx = 0$ pak $g(x)=0 \ \forall x \in \langle a,b\rangle$.

Dk. sporem



Dále speciálni připad funkcionálu:

Buď $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ třídy $C^{(2)}$ pak funkcionál $J: C^{(1)}\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $J(\varphi) := \int_a^b F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\,dx$ je diferencovatelný na $C^{(1)}\langle a,b\rangle$.

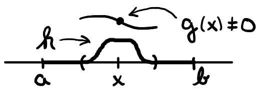
$$\delta J(\varphi)[\delta\varphi] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} J(\varphi+\varepsilon\delta\varphi) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(x,\varphi+\varepsilon\delta\varphi,\varphi'+\varepsilon\delta\varphi')\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi'\,dx =$$

$$\boxed{\delta\int_a^b F\,dx = \int_a^b \delta F\,dx}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\delta\varphi\,dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial\varphi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\right]\delta\varphi\,dx + \left[\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right]_a^b$$

Základní lemma variačního počtu: Buď $g \in C\langle a,b\rangle$ pokud $\forall h \in C^{(n)}_{(0,0)}\langle a,b\rangle$ platí $\int_a^b g(x)\cdot h(x)\,dx = 0$ pak $g(x)=0$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$.

Dk. sporem



Dále speciální případ funkcionálu:

Buď $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ třídy $C^{(2)}$ pak funkcionál $J: C^{(1)}\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $J(\varphi) := \int_a^b F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\,dx$ je diferencovatelný na $C^{(1)}\langle a,b\rangle$.

$$\delta J(\varphi)[\delta\varphi] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} J(\varphi+\varepsilon\delta\varphi) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(x,\varphi+\varepsilon\delta\varphi,\varphi'+\varepsilon\delta\varphi')\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi'\,dx =$$

$$\boxed{\delta\int_a^b F\,dx = \int_a^b \delta F\,dx}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\delta\varphi\,dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial\varphi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\right]\delta\varphi\,dx + \left[\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right]_a^b$$

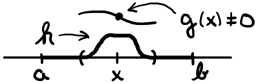
Křivka $\varphi \in C^{(1)}_{(A,B)}\langle a,b\rangle$ je extremálou funkcionálu $J\Big|_{C^{(1)}_{(A,B)}\langle a,b\rangle} \iff \boxed{\frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi(x),\varphi'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi(x),\varphi'(x))\right) = 0}$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$

Eulerova rovnice pro funkcionál J

ODR 2. řádu s okrajovými podmínkami $\varphi(a)=A$, $\varphi(b)=B$

Základní lemma variačního počtu: Buď $g \in C\langle a,b\rangle$ pokud $\forall h \in C^{(n)}_{(0,0)}\langle a,b\rangle$ platí $\int_a^b g(x)\cdot h(x)\,dx = 0$ pak $g(x)=0\ \forall x \in \langle a,b\rangle$.

Dk. sporem



Dále speciální případ funkcionálu:

Buď $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ třídy $C^{(2)}$ pak funkcionál $J: C^{(1)}\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $J(\varphi) := \int_a^b F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\,dx$ je diferencovatelný na $C^{(1)}\langle a,b\rangle$.

$$\delta J(\varphi)[\delta\varphi] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} J(\varphi+\varepsilon\delta\varphi) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(x,\varphi+\varepsilon\delta\varphi,\varphi'+\varepsilon\delta\varphi')\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi'\,dx =$$

$$\boxed{\delta\int_a^b F\,dx = \int_a^b \delta F\,dx}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\delta\varphi\,dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial\varphi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\right]\delta\varphi\,dx + \left[\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right]_a^b$$

Křivka $\varphi \in C^{(1)}_{(A,B)}\langle a,b\rangle$ je extremálou funkcionálu $J\big|_{C^{(1)}_{(A,B)}\langle a,b\rangle} \iff \boxed{\frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi(x),\varphi'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi(x),\varphi'(x))\right) = 0}\ \forall x \in \langle a,b\rangle$

Eulerova rovnice pro funkcionál J

ODR 2. řádu s okrajovými podmínkami $\varphi(a)=A$, $\varphi(b)=B$

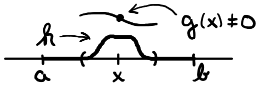
Zobecnění:

$\vec{\varphi}: \langle a,b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^s \in C^{(1)}$ $\quad \vec{\varphi}(a)=\vec{A}$ $\quad \vec{\varphi}(b)=\vec{B}$

$F: \mathbb{R}^{2s+1} \to \mathbb{R} \in C^{(2)}$ $\quad J(\vec{\varphi}) = \int_a^b F(x,\vec{\varphi}(x),\vec{\varphi}'(x))\,dx$ $\qquad \delta J(\vec{\varphi}) = 0 \wedge \delta\vec{\varphi}(a) = 0 = \delta\vec{\varphi}(b) \iff \forall i \in \hat{s}\ \frac{\partial F}{\partial\varphi_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_i'}\right) = 0\ \forall x \in \langle a,b\rangle$

Základní lemma variačního počtu: Buď $g \in C\langle a,b\rangle$ pokud $\forall h \in C^{(n)}_{(0,0)}\langle a,b\rangle$ platí $\int_a^b g(x)\cdot h(x)\,dx = 0$ pak $g(x)=0 \;\; \forall x \in \langle a,b\rangle$.

Dk. sporem



Dále speciální případ funkcionálu:

Buď $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ třídy $C^{(2)}$ pak funkcionál $J: C^{(1)}\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $J(\varphi) := \int_a^b F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\,dx$ je diferencovatelný na $C^{(1)}\langle a,b\rangle$.

$$\delta J(\varphi)[\delta\varphi] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} J(\varphi+\varepsilon\delta\varphi) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(x,\varphi+\varepsilon\delta\varphi,\varphi'+\varepsilon\delta\varphi')\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi'\,dx =$$

$$\boxed{\delta\int_a^b F\,dx = \int_a^b \delta F\,dx}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\delta\varphi\,dx = \int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial\varphi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\right]\delta\varphi\,dx + \left[\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right]_a^b$$

Křivka $\varphi \in C^{(1)}_{(A,B)}\langle a,b\rangle$ je extremálou funkcionálu $J\big|_{C^{(1)}_{(A,B)}\langle a,b\rangle} \iff \boxed{\frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi(x),\varphi'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi(x),\varphi'(x))\right) = 0} \;\; \forall x \in \langle a,b\rangle$

Eulerova rovnice pro funkcionál J

ODR 2. řádu s okrajovými podmínkami $\varphi(a)=A$, $\varphi(b)=B$

Zobecnění:

$\vec{\varphi}: \langle a,b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^s \in C^{(1)} \quad \vec{\varphi}(a)=\vec{A} \quad \vec{\varphi}(b)=\vec{B}$

$F: \mathbb{R}^{2s+1} \to \mathbb{R} \in C^{(2)} \quad J(\vec{\varphi}) = \int_a^b F(x,\vec{\varphi}(x),\vec{\varphi}'(x))\,dx \qquad \delta J(\vec{\varphi}) = 0 \wedge \delta\vec{\varphi}(a) = 0 = \delta\vec{\varphi}(b) \iff \forall i \in \hat{s} \;\; \frac{\partial F}{\partial\varphi_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_i'}\right) = 0 \;\; \forall x \in \langle a,b\rangle$

Je-li $\vec{\varphi}$ minimála (maximála) funkcionálu $J\big|_{C^{(1)}_{(A,B)}\langle a,b\rangle}$ pak $\delta^2 J(\vec{\varphi}) \geq 0$ (≤ 0) a matice $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi_i'\partial\varphi_j'}\right)$ je PSD (NSD)

- **Integrální principy**
  - jsou globální vyšetřují trajektorii v intervalu $<t_1,t_2>$ jako celek
  - jdou zobecnit na nemechanické úlohy (elmag. pole, kvantová mechanika)

- **Integrální principy** – jsou globální vyšetřují trajektorii v intervalu <t1,t2> jako celek
  – jdou zobecnit na nemechanické úlohy (elmag. pole, kvantová mechanika)

Fermatův pricnip (1662) – světlo se z bodu A do bodu B šíří po "časově" nejkratší dráze

- **Integrální principy** – jsou globální vyšetřují trajektorii v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ jako celek
  – jdou zobecnit na nemechanické úlohy (elmag. pole, kvantová mechanika)

Fermatův pricnip (1662) – světlo se z bodu A do bodu B šíří po "časově" nejkratší dráze tj. po dráze která extremalizuje funkcionál

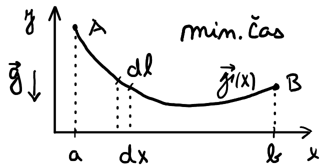
index lomu $n = n(\vec{x})$

rychlost světla c

$$T(\vec{y}) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v} = \frac{1}{c}\int_A^B n(\vec{x})\,dl$$

- **Integrální principy** – jsou globální vyšetřují trajektorii v intervalu <t1,t2> jako celek
  – jdou zobecnit na nemechanické úlohy (elmag. pole, kvantová mechanika)

Fermatův pricnip (1662) – světlo se z bodu A do bodu B šíří po "časově" nejkratší dráze tj. po dráze která extremalizuje funkcionál



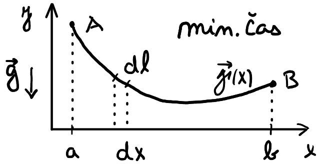
index lomu $n = n(\vec{x})$

rychlost světla c

$$T(\vec{y}) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v} = \frac{1}{c}\int_A^B n(\vec{x})\,dl = \frac{1}{c}\int_a^b n(\vec{y}(x))\cdot|\vec{y}'(x)|\,dx$$

• **Integrální principy** – jsou globální vyšetřují trajektorii v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ jako celek
– jdou zobecnit na nemechanické úlohy (elmag. pole, kvantová mechanika)

Fermatův pricnip (1662) – světlo se z bodu A do bodu B šíří po "časově" nejkratší dráze tj. po dráze která extremalizuje funkcionál



index lomu $n = n(\vec{x})$
rychlost světla c

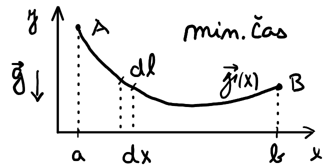
$$T(\vec{y}) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v} = \frac{1}{c}\int_A^B n(\vec{x})\,dl = \frac{1}{c}\int_a^b n(\vec{y}(x))\cdot|\vec{y}\,'(x)|\,dx$$

Brachistochrona (Johann Bernouli 1696)

$$T(\vec{y}) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v(y)} = \int_a^b \frac{|\vec{y}\,'(x)|\,dx}{\sqrt{2gy}} = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

- **Integrální principy** – jsou globální vyšetřují trajektorii v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ jako celek
  – jdou zobecnit na nemechanické úlohy (elmag. pole, kvantová mechanika)

Fermatův pricnip (1662) – světlo se z bodu A do bodu B šíří po "časově" nejkratší dráze tj. po dráze která extremalizuje funkcionál



index lomu $n = n(\vec{x})$

rychlost světla c

$$T(\vec{y}) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v} = \frac{1}{c}\int_A^B n(\vec{x})\, dl = \frac{1}{c}\int_a^b n(\vec{y}(x)) \cdot |\vec{y}\,'(x)|\, dx$$

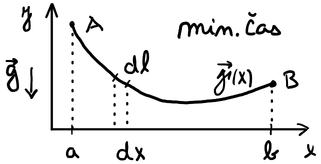
Brachistochrona (Johann Bernouli 1696)

$$T(\vec{y}) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v(y)} = \int_a^b \frac{|\vec{y}\,'(x)|\, dx}{\sqrt{2gy}} = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\, dx$$

Maupertuis (1744) hypotéza: Každý děj v přírodě probíhá tak, že určitá veličina (tzv. akce) je minimální.

- **Integrální principy** – jsou globální vyšetřují trajektorii v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ jako celek
  – jdou zobecnit na nemechanické úlohy (elmag. pole, kvantová mechanika)

Fermatův pricnip (1662) – světlo se z bodu A do bodu B šíří po "časově" nejkratší dráze tj. po dráze která extremalizuje funkcionál



index lomu $n = n(\vec{x})$

rychlost světla c

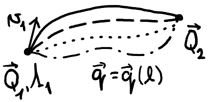
$$T(\vec{y}) = \int_A^B d\lambda = \int_A^B \frac{dl}{v} = \frac{1}{c}\int_A^B n(\vec{x})\, dl = \frac{1}{c}\int_a^b n(\vec{y}(x)) \cdot |\vec{y}'(x)|\, dx$$

Brachistochrona (Johann Bernouli 1696)

$$T(\vec{y}) = \int_A^B d\lambda = \int_A^B \frac{dl}{v(y)} = \int_a^b \frac{|\vec{y}'(x)|\, dx}{\sqrt{2gy}} = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\, dx$$

Maupertuis (1744) hypotéza: Každý děj v přírodě probíhá tak, že určitá veličina (tzv. akce) je minimální.

$\boxed{\text{Princip nejmenší akce}}$ – Lagrange (1760) pro konzervativní soustavy

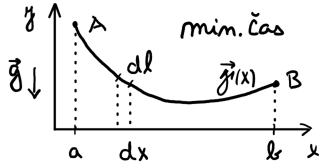


$$E = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + U(\vec{q}) \Rightarrow v(\vec{q}) \Rightarrow \vec{q} = \vec{q}(\lambda)$$

$$S_0 = \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2} 2T\, d\lambda$$

- **Integrální principy** – jsou globální vyšetřují trajektorii v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ jako celek
  – jdou zobecnit na nemechanické úlohy (elmag. pole, kvantová mechanika)

Fermatův pricnip (1662) – světlo se z bodu A do bodu B šíří po "časově" nejkratší dráze tj. po dráze která extremalizuje funkcionál



index lomu $n = n(\vec{x})$
rychlost světla c

$$T(\vec{y}) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v} = \frac{1}{c}\int_A^B n(\vec{x})\,dl = \frac{1}{c}\int_a^b n(\vec{y}(x))\cdot|\vec{y}'(x)|\,dx$$

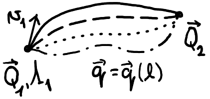
Brachistochrona (Johann Bernouli 1696)

$$T(\vec{y}) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v(y)} = \int_a^b \frac{|\vec{y}'(x)|\,dx}{\sqrt{2gy}} = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

Maupertuis (1744) hypotéza: Každý děj v přírodě probíhá tak, že určitá veličina (tzv. akce) je minimální.

$\boxed{\text{Princip nejmenší akce}}$

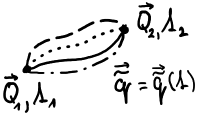
– Lagrange (1760) pro konzervativní soustavy



$E = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + U(\vec{q})$
$\Rightarrow v(\vec{q}) \Rightarrow \dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(t)$

$$S_0 = \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2} 2T\,dt$$

– Hamilton (1834) pro nekonzervativní soustavy



$T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$
$U(\vec{q}, t)$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} T - U\,dt$$

Z ústřední rce. Lagrangeovy odvodíme Hamiltonův princip

budeme předpokládat, že virtuálni posunutí jsou diferencovatelné funkce času $\delta\vec{q} = \delta\vec{q}(t) \in C^{(1)}_{(0,0)}\langle t_1, t_2\rangle$ tvoří tedy variace křivky $\vec{q}(t) \in C^{(1)}\langle t_1, t_2\rangle$

s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$

Z ústřední rce. Lagrangeovy odvodíme Hamiltonův princip

budeme předpokládat, že virtuální posunutí jsou diferencovatelné funkce času $\delta\vec{q} = \delta\vec{q}(t) \in C^{(1)}_{(0,0)}\langle t_1, t_2\rangle$ tvoří tedy variace křivky $\vec{q}(t) \in C^{(1)}\langle t_1, t_2\rangle$ s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} \hat{L}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_j^{(nep)}\delta q_j\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\hat{L} + Q_j^{(nep)}\delta q_j\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right)dt = \left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Z ústřední rce. Lagrangeovy odvodíme Hamiltonův princip

budeme předpokládat, že virtuální posunutí jsou diferencovatelné funkce času $\delta\vec{q} = \delta\vec{q}(t) \in C^{(1)}_{(0,0)}\langle t_1, t_2\rangle$ tvoří tedy variace křivky $\vec{q}(t) \in C^{(1)}\langle t_1, t_2\rangle$ s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\hat{L}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_j^{(nep)}\delta q_j\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\hat{L} + Q_j^{(nep)}\delta q_j\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right)dt = \left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Hamiltonův princip: Pohyb holonomní soustavy s potenciálními silami v časovém intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ se děje po křivce (trajektorii) na které akce nabývá stacionární hodnoty vzhledem k (izochronním $\delta t = 0$) variacím s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$.

$$\boxed{S[\vec{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)\,dt}$$

Z ústřední rce. Lagrangeovy odvodíme Hamiltonův princip

budeme předpokládat, že virtuální posunutí jsou diferencovatelné funkce času $\delta\vec{q} = \delta\vec{q}(t) \in C^{(1)}_{(0,0)}\langle t_1, t_2\rangle$ tvoří tedy variace křivky $\vec{q}(t) \in C^{(1)}\langle t_1, t_2\rangle$ s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\hat{L}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_j^{(nep)}\delta q_j\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\hat{L} + Q_j^{(nep)}\delta q_j\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right)dt = \left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Hamiltonův princip: Pohyb holonomní soustavy s potenciálními silami v časovém intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ se děje po křivce (trajektorii) na které akce

$$\boxed{S[\vec{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)\,dt}$$

nabývá stacionární hodnoty vzhledem k (izochronním $\delta t = 0$) variacím s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$.

$$\delta S[\vec{q}(t)] = 0 \wedge \delta\vec{q}(t)\Big|_{t_1,t_2} = 0 \iff \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{(\vec{q}(t),\dot{\vec{q}}(t),t)} = 0 \quad \forall i \in \hat{s}$$

Eulerovy–Lagrangeovy rce. pro funkcionál S

O.D.R. 2. řádu pro $\vec{q}(t) = ?$

s okrajovými podmínkami $\vec{q}(t_1) = \vec{Q}_1 \quad \vec{q}(t_2) = \vec{Q}_2$

Z ústřední rce. Lagrangeovy odvodíme Hamiltonův princip

budeme předpokládat, že virtuální posunutí jsou diferencovatelné funkce času $\delta\vec{q} = \delta\vec{q}(t) \in C^{(1)}_{(0,0)}\langle t_1, t_2\rangle$ tvoří tedy variace křivky $\vec{q}(t) \in C^{(1)}\langle t_1, t_2\rangle$ s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\hat{L}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_j^{(nep)}\delta q_j\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\hat{L} + Q_j^{(nep)}\delta q_j\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right)dt = \left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Hamiltonův princip: Pohyb holonomní soustavy s potenciálními silami v časovém intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ se děje po křivce (trajektorii) na které akce

$$\boxed{S[\vec{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)\,dt}$$

nabývá stacionární hodnoty vzhledem k (izochronním $\delta t = 0$) variacím s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$.

$$\delta S[\vec{q}(t)] = 0 \wedge \delta\vec{q}(t)\Big|_{t_1, t_2} = 0 \iff \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)} = 0 \quad \forall i \in \hat{s}$$

Eulerovy–Lagrangeovy rce. pro funkcionál S

O.D.R. 2. řádu pro $\vec{q}(t) = ?$

s okrajovými podmínkami $\vec{q}(t_1) = \vec{Q}_1 \quad \vec{q}(t_2) = \vec{Q}_2$

- Akce je funkcionál $S : C^{(1)}_{(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)}\langle t_1, t_2\rangle \to \mathbb{R}$ a neboť $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right)$ je PD, je trajektorie zpravidla její minimála.

Z ústřední rce. Lagrangeovy odvodíme Hamiltonův princip

budeme předpokládat, že virtuální posunutí jsou diferencovatelné funkce času $\delta\vec{q} = \delta\vec{q}(t) \in C^{(1)}_{(0,0)}\langle t_1, t_2\rangle$ tvoří tedy variace křivky $\vec{q}(t) \in C^{(1)}\langle t_1, t_2\rangle$ s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\hat{L}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_j^{(nep)}\delta q_j\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\hat{L} + Q_j^{(nep)}\delta q_j\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right)dt = \left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Hamiltonův princip: Pohyb holonomní soustavy s potenciálními silami v časovém intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ se děje po křivce (trajektorii) na které akce

$$\boxed{S[\vec{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)\,dt}$$

nabývá stacionární hodnoty vzhledem k (izochronním $\delta t = 0$) variacím s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$.

$$\delta S[\vec{q}(t)] = 0 \wedge \delta\vec{q}(t)\Big|_{t_1, t_2} = 0 \iff \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)} = 0 \quad \forall i \in \hat{s}$$

Eulerovy–Lagrangeovy rce. pro funkcionál S

O.D.R. 2. řádu pro $\vec{q}(t) = ?$

s okrajovými podmínkami $\vec{q}(t_1) = \vec{Q}_1$ $\vec{q}(t_2) = \vec{Q}_2$

- Akce je funkcionál $S : C^{(1)}_{(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)}\langle t_1, t_2\rangle \to \mathbb{R}$ a neboť $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right)$ je PD, je trajektorie zpravidla její minimála.
- Hamiltonův princip nezávisí na volbě obecných souřadnic $\Rightarrow$ LR2D mají stejný tvar ve všech obecných s.

Z ústřední rce. Lagrangeovy odvodíme Hamiltonův princip

budeme předpokládat, že virtuální posunutí jsou diferencovatelné funkce času $\delta\vec{q} = \delta\vec{q}(t) \in C^{(1)}_{(0,0)}\langle t_1, t_2\rangle$ tvoří tedy variace křivky $\vec{q}(t) \in C^{(1)}\langle t_1, t_2\rangle$ s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\hat{L}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_j^{(nep)}\delta q_j\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\hat{L} + Q_j^{(nep)}\delta q_j\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right)dt = \left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Hamiltonův princip: Pohyb holonomní soustavy s potenciálními silami v časovém intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ se děje po křivce (trajektorii) na které akce

$$\boxed{S[\vec{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)\,dt}$$

nabývá stacionární hodnoty vzhledem k (izochronním $\delta t = 0$) variacím s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$.

$$\delta S[\vec{q}(t)] = 0 \wedge \delta\vec{q}(t)\Big|_{t_1, t_2} = 0 \iff \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)} = 0 \quad \forall i \in \hat{s}$$

Eulerovy–Lagrangeovy rce. pro funkcionál S
O.D.R. 2. řádu pro $\vec{q}(t) = ?$
s okrajovými podmínkami $\vec{q}(t_1) = \vec{Q}_1 \quad \vec{q}(t_2) = \vec{Q}_2$

- Akce je funkcionál $S: C^{(1)}_{(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)}\langle t_1, t_2\rangle \to \mathbb{R}$ a neboť $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right)$ je PD, je trajektorie zpravidla její minimála.
- Hamiltonův princip nezávisí na volbě obecných souřadnic $\Rightarrow$ LR2D mají stejný tvar ve všech obecných s.
- Nejednoznačnost Lagrangeiánu $\quad L' = L + \frac{\hat{d}\,h(\vec{q}, t)}{dt} \quad S' = \int_{t_1}^{t_2} L'\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt + \left[h(\vec{q}(t_2), t_2) - h(\vec{q}(t_1), t_1)\right] = S + K \Rightarrow \delta S' = \delta S$

Z ústřední rce. Lagrangeovy odvodíme Hamiltonův princip

budeme předpokládat, že virtuální posunutí jsou diferencovatelné funkce času $\delta\vec{q} = \delta\vec{q}(t) \in C^{(1)}_{(0,0)}\langle t_1, t_2\rangle$ tvoří tedy variace křivky $\vec{q}(t) \in C^{(1)}\langle t_1, t_2\rangle$ s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\hat{L}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_j^{(nep)}\delta q_j\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\hat{L} + Q_j^{(nep)}\delta q_j\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right)dt = \left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Hamiltonův princip: Pohyb holonomní soustavy s potenciálními silami v časovém intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ se děje po křivce (trajektorii) na které akce

$$\boxed{S[\vec{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)\,dt}$$

nabývá stacionární hodnoty vzhledem k (izochronním $\delta t = 0$) variacím s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$.

$$\delta S[\vec{q}(t)] = 0 \wedge \delta\vec{q}(t)\Big|_{t_1,t_2} = 0 \iff \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{(\vec{q}(t),\dot{\vec{q}}(t),t)} = 0 \quad \forall i \in \hat{s}$$

Eulerovy–Lagrangeovy rce. pro funkcionál S

O.D.R. 2. řádu pro $\vec{q}(t) = ?$

s okrajovými podmínkami $\vec{q}(t_1) = \vec{Q}_1$ $\vec{q}(t_2) = \vec{Q}_2$

- Akce je funkcionál $S: C^{(1)}_{(\vec{Q}_1,\vec{Q}_2)}\langle t_1, t_2\rangle \to \mathbb{R}$ a neboť $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right)$ je PD, je trajektorie zpravidla její minimála.
- Hamiltonův princip nezávisí na volbě obecných souřadnic $\Rightarrow$ LR2D mají stejný tvar ve všech obecných s.
- Nejednoznačnost Lagrangeiánu $L' = L + \frac{d\,h(\vec{q},t)}{dt}$ $\quad S' = \int_{t_1}^{t_2} L'\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt + \left[h(\vec{q}(t_2), t_2) - h(\vec{q}(t_1), t_1)\right] = S + K \Rightarrow \delta S' = \delta S$
- Lze zobecnit mimo mechaniku – potřeba najít příslušnou Lagrangeovu funkci (pomocí principů symetrie)

Routhova funkce – vyloučení cyklické souřadnice Q $\boxed{L,\ s+1,\ \vec{q}, Q} \rightarrow \boxed{R,\ s,\ \vec{q}}$

Routhova funkce – vyloučení cyklické souřadnice Q $\quad \boxed{L,\ s+1,\ \vec{q}, Q} \rightarrow \boxed{R,\ s,\ \vec{q}}$

nechť $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{Q}, t)$ $\quad \dfrac{\partial L}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{Q}, t) = \text{konst}$ (rovnice pro Q) $\quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = \hat{\dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, t)$

Routhova funkce – vyloučení cyklické souřadnice Q $\quad \boxed{L,\ s+1,\ \vec{q}, Q} \rightarrow \boxed{R,\ s,\ \vec{q}}$

nechť $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{Q}, t)$ $\quad \frac{\partial L}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{Q}, t) = konst$ (rovnice pro Q) $\Rightarrow \dot{Q} = \hat{Q}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, t)$

do zbylých s rovnic $\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ \forall i \in \hat{s}$ dosadíme za $\dot{Q}$ a $\ddot{Q}$ tyto rovnice pro neznámé $\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}$

Routhova funkce – vyloučení cyklické souřadnice Q $\boxed{L,\ s+1,\ \vec{q}, Q} \rightarrow \boxed{R,\ s,\ \vec{q}}$

nechť $L = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},\dot{Q},t)$ $\quad \frac{\partial L}{\partial Q}=0 \Rightarrow P=\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\dot{Q},t)=\text{konst}$ (rovnice pro Q) $\Rightarrow \dot{Q}=\dot{\hat{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t)$

do zbylých s rovnic $\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\ \forall i\in\hat{s}$ dosadíme za $\dot{Q}$ a $\ddot{Q}$ tyto rovnice pro neznámé $\vec{q},\dot{\vec{q}},\ddot{\vec{q}}$ lze získat

z Routhovy funkce $R(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t)=\hat{L}-P\dot{\hat{Q}}=L(\vec{q},\dot{\vec{q}},\dot{\hat{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t),t)-P\dot{\hat{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t)$ (někdy $R=P\dot{\hat{Q}}-\hat{L}$)

která převezme roli Lagrangeovy funkce pro nový systém o s stupních volnosti

Routhova funkce – vyloučení cyklické souřadnice Q $\boxed{L, s+1, \vec{q}, Q} \to \boxed{R, s, \vec{q}}$

nechť $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{Q}, t)$ $\frac{\partial L}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{Q}, t) = konst$ (rovnice pro Q) $\Rightarrow \dot{Q} = \hat{\dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, t)$

do zbylých s rovnic $\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ \forall i \in \hat{s}$ dosadíme za $\dot{Q}$ a $\ddot{Q}$ tyto rovnice pro neznámé $\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}$ lze získat

z Routhovy funkce $R(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, t) = \hat{L} - P\hat{\dot{Q}} = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \hat{\dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, t), t) - P\hat{\dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, t)$ (někdy $R = P\hat{\dot{Q}} - \hat{L}$)

která převezme roli Lagrangeovy funkce pro nový systém o s stupních volnosti

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i}\right) = \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i}\right) = \left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{\dot{Q} = \hat{\dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, t)}$$

Routhova funkce – vyloučení cyklické souřadnice Q $\boxed{L,\ s+1,\ \vec{q}, Q} \rightarrow \boxed{R,\ s,\ \vec{q}}$

nechť $L = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},\dot{Q},t)$ $\quad \frac{\partial L}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\dot{Q},t) = \text{konst}$ (rovnice pro Q) $\Rightarrow \dot{Q} = \hat{\dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t)$

do zbylých s rovnic $\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ \forall i \in \hat{s}$ dosadíme za $\dot{Q}$ a $\ddot{Q}$ tyto rovnice pro neznámé $\vec{q},\dot{\vec{q}},\ddot{\vec{q}}$ lze získat

z Routhovy funkce $R(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t) = \hat{L} - P\hat{\dot{Q}} = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},\hat{\dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t),t) - P\hat{\dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t)$ (někdy $R = P\hat{\dot{Q}} - \hat{L}$)

která převezme roli Lagrangeovy funkce pro nový systém o s stupních volnosti

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i}\right) = \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i}\right) = \left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{\dot{Q} = \hat{\dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t)}$$

Jacobiho princip – pro konzervativní soustavy (skleronomní holonomní vazby a konzervativní síly)

$L(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2}T_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i\dot{q}_j - U(\vec{q})$ $\quad T$ je P.D. kvadratická forma v $\dot{\vec{q}}$ $\quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = T + U = \text{konst}$

Routhova funkce – vyloučení cyklické souřadnice Q $\boxed{L,\ s+1,\ \vec{q},Q} \to \boxed{R,\ s,\ \vec{q}}$

nechť $L = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},\dot{Q},t)$ $\quad \frac{\partial L}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\dot{Q},t) = konst$ (rovnice pro Q) $\Rightarrow \dot{Q} = \hat{\dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t)$

do zbylých s rovnic $\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ \forall i \in \hat{s}$ dosadíme za $\dot{Q}$ a $\ddot{Q}$ tyto rovnice pro neznámé $\vec{q},\dot{\vec{q}},\ddot{\vec{q}}$ lze získat

z Routhovy funkce $R(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t) = \hat{L} - P\hat{\dot{Q}} = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},\hat{\dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t),t) - P\hat{\dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t)$ (někdy $R = P\hat{\dot{Q}} - \hat{L}$)

která převezme roli Lagrangeovy funkce pro nový systém o s stupních volnosti

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i}\right) = \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i}\right) = \left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{\dot{Q} = \hat{\dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t)}$$

Jacobiho princip – pro konzervativní soustavy (skleronomní holonomní vazby a konzervativní síly)

$L(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2}T_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i\dot{q}_j - U(\vec{q})$ $\quad T$ je P.D. kvadratická forma v $\dot{\vec{q}}$ $\quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = T + U = konst$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t),\dot{\vec{q}}(t))\,dt = \left|\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\text{substituce: změna parametrizace}} \\ t = t(\tau) & \vec{q}(\tau) = \vec{q}(t(\tau)) \\ dt = t'd\tau & \vec{q}\,' = \frac{d\vec{q}}{d\tau} = \dot{\vec{q}}\,t' \end{array}\right| = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(\vec{q},\frac{\vec{q}\,'}{t'}\right)t'\,d\tau$$

„nový" variační princip pro $s+1$ křivek $\vec{q}(\tau), t(\tau)$ s funkcí $\hat{L}(\vec{q},\vec{q}\,',t') = L\left(\vec{q},\frac{\vec{q}\,'}{t'}\right)t'$ kde čas t je cyklickou souřadnicí, kterou vyloučíme pomocí Routhovy funkce

Routhova funkce – vyloučení cyklické souřadnice Q $\boxed{L,\ s+1,\ \vec{q},Q} \to \boxed{R,\ s,\ \vec{q}}$

nechť $L = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},\dot{Q},t)$ $\quad \frac{\partial L}{\partial Q}=0 \Rightarrow P=\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\dot{Q},t)=\text{konst}$ (rovnice pro Q) $\Rightarrow \dot{Q}=\hat{\dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t)$

do zbylých s rovnic $\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\ \forall i\in\hat{s}$ dosadíme za $\dot{Q}$ a $\ddot{Q}$ tyto rovnice pro neznámé $\vec{q},\dot{\vec{q}},\ddot{\vec{q}}$ lze získat

z Routhovy funkce $R(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t)=\hat{L}-P\hat{\dot{Q}} = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},\hat{\dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t),t)-P\hat{\dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t)$ (někdy $R=P\hat{\dot{Q}}-\hat{L}$)

která převezme roli Lagrangeovy funkce pro nový systém o s stupních volnosti

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial R}{\partial q_i}=\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i}-P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_i}-P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i}\right)=\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i}-P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i}-P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i}\right)=\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{\dot{Q}=\hat{\dot{Q}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},P,t)}$$

Jacobiho princip – pro konzervativní soustavy (skleronomní holonomní vazby a konzervativní síly)

$L(\vec{q},\dot{\vec{q}})=\frac{1}{2}T_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i\dot{q}_j-U(\vec{q})$ $\quad T$ je P.D. kvadratická forma v $\dot{\vec{q}}$ $\quad \frac{\partial L}{\partial t}=0 \Rightarrow E=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L=T+U=\text{konst}$

substituce: změna parametrizace

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(\vec{q}(t),\dot{\vec{q}}(t))\,dt = \left/\ \begin{matrix} t=t(\tau) & \vec{q}(\tau)=\vec{q}(t(\tau)) \\ dt=t'd\tau & \vec{q}\,'=\frac{d\vec{q}}{d\tau}=\dot{\vec{q}}t' \end{matrix}\ \right/ = \int_{\tau_1}^{\tau_2}L\left(\vec{q},\frac{\vec{q}\,'}{t'}\right)t'\,d\tau$$

"nový" variační princip pro $s+1$ křivek $\vec{q}(\tau), t(\tau)$ s funkcí $\hat{L}(\vec{q},\vec{q}\,',t')=L\left(\vec{q},\frac{\vec{q}\,'}{t'}\right)t'$ kde čas t je cyklickou souřadnicí, kterou vyloučíme pomocí Routhovy funkce

$$p_t=\frac{\partial(Lt')}{\partial t'}=\frac{\partial L}{\partial t'}t'+L=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(-\frac{q'_k}{t'^2}\right)t'+L=-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k+L=-p_k\dot{q}_k+L=-E$$

$$R = L\lambda' - p_\lambda \cdot \lambda' = (L - p_\lambda)\lambda' = (L + p_k \dot{q}_k - L)\lambda' = p_k \dot{q}_k \lambda' = (L + E)\lambda' = (T - U + T + U)\lambda' = 2T\lambda'$$

$$R = L\lambda' - p_\lambda \cdot \lambda' = (L - p_\lambda)\lambda' = (L + p_k \dot{q}_k - L)\lambda' = p_k \dot{q}_k \lambda' = (L + E)\lambda' = (T - U + T + U)\lambda' = 2T\lambda'$$

$$S_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} R \, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} p_k \dot{q}_k \lambda' \, d\tau = \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2} p_k \, dq_k = \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2T\lambda' \, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2T}\sqrt{2T}\,\lambda' \, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - U(\vec{q}))}\,\sqrt{T_{ij}(\vec{q})\,\dot{q}_i \dot{q}_j}\,\lambda' \, d\tau =$$

$$R = L\lambda' - p_\lambda \cdot \lambda' = (L - p_\lambda)\lambda' = (L + p_k \dot{q}_k - L)\lambda' = p_k \dot{q}_k \lambda' = (L+E)\lambda' = (T - U + T + U)\lambda' = 2T\lambda'$$

$$S_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} R\, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} p_k \dot{q}_k \lambda' d\tau = \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2} p_k\, dq_k = \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2T\lambda' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2T}\sqrt{2T}\,\lambda' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - U(\vec{q}))}\sqrt{T_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i \dot{q}_j}\,\lambda' d\tau =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - U(\vec{q}))}\sqrt{T_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i \lambda' \dot{q}_j \lambda'}\, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \underbrace{\sqrt{2(E - U(\vec{q}))}\sqrt{T_{ij}(\vec{q}) q'_i q'_j}}_{F(\vec{q},\vec{q}\,')}\, d\tau \underset{q'_i d\tau = dq_i}{=} \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2} \sqrt{2(E - U(\vec{q}))}\,\underbrace{\sqrt{T_{ij}(\vec{q})\, dq_i\, dq_j}}$$

element délky dl^T v konf. pr.
s metrickým tenzorem $T_{ij}(\vec{q})$

$$R = L\lambda' - p_\lambda \cdot \lambda' = (L - p_\lambda)\lambda' = (L + p_k\dot{q}_k - L)\lambda' = p_k\dot{q}_k\lambda' = (L+E)\lambda' = (T-U+T+U)\lambda' = 2T\lambda'$$

$$S_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} R\,d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} p_k\dot{q}_k\lambda'\,d\tau = \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2} p_k\,dq_k = \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2T\lambda'\,d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{2T}\sqrt{2T}\,\lambda'\,d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{2(E-U(\vec{q}))}\sqrt{T_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i\dot{q}_j}\,\lambda'\,d\tau =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{2(E-U(\vec{q}))}\sqrt{T_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i\lambda'\dot{q}_j\lambda'}\,d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\underbrace{\sqrt{2(E-U(\vec{q}))}\sqrt{T_{ij}(\vec{q})q'_iq'_j}}_{F(\vec{q},\vec{q}')}\,d\tau \underset{q'_i d\tau = dq_i}{=} \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2}\sqrt{2(E-U(\vec{q}))}\,\underbrace{\sqrt{T_{ij}(\vec{q})\,dq_i\,dq_j}}_{}$$

element délky dl^T v konf. pr.
s metrickým tenzorem $T_{ij}(\vec{q})$

Jacobiho princip: Konzervativní soustava se mezi konfiguracemi $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$ pohybuje po křivce na které zkrácená akce

$$S_0[\vec{q}(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{2(E-U(\vec{q}))}\sqrt{T_{ij}(\vec{q})q'_iq'_j}\,d\tau = \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2}\sqrt{2(E-U(\vec{q}))}\,dl^T$$

nabývá stacionární hodnoty vzhledem k variacím s pevnými konci $\delta\vec{q}(\tau_{1,2}) = 0$.

$$R = L\lambda' - p_\lambda \cdot \lambda' = (L - p_\lambda)\lambda' = (L + p_k \dot{q}_k - L)\lambda' = p_k \dot{q}_k \lambda' = (L+E)\lambda' = (T-U+T+U)\lambda' = 2T\lambda'$$

$$S_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} R\, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} p_k \dot{q}_k \lambda' d\tau = \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2} p_k dq_k = \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2T\lambda' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2T}\sqrt{2T}\,\lambda' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E-U(\vec{q}))}\,\sqrt{T_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i \dot{q}_j}\,\lambda' d\tau =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E-U(\vec{q}))}\,\sqrt{T_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i \lambda' \dot{q}_j \lambda'}\, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \underbrace{\sqrt{2(E-U(\vec{q}))}\,\sqrt{T_{ij}(\vec{q}) q_i' q_j'}}_{F(\vec{q},\vec{q}')}\, d\tau \underset{q_i' d\tau = dq_i}{=} \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2} \sqrt{2(E-U(\vec{q}))}\,\underbrace{\sqrt{T_{ij}(\vec{q})\, dq_i\, dq_j}}$$

element délky dl^T v konf. pr. s metrickým tenzorem $T_{ij}(\vec{q})$

Jacobiho princip: Konzervativní soustava se mezi konfiguracemi $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$ pohybuje po křivce na které zkrácená akce

$$S_0[\vec{q}(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E-U(\vec{q}))}\,\sqrt{T_{ij}(\vec{q}) q_i' q_j'}\, d\tau = \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2} \sqrt{2(E-U(\vec{q}))}\, dl^T$$

nabývá stacionární hodnoty vzhledem k variacím s pevnými konci $\delta\vec{q}(\tau_{1,2}) = 0$.

Pozn. z Eulerových rovnic $\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j'}\right) = 0 \quad \forall j \in \hat{s} \Rightarrow \vec{q} = \vec{q}(\tau)$ získáme pouze tvar trajektorie (τ není čas)

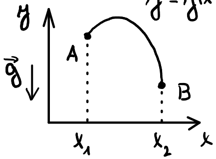
časovou parametrizaci trajektorie lze získat pomocí integrálu pohybu $E = T + U$ $\Rightarrow 1 = \sqrt{\frac{2T}{2(E-U)}}$

$$\lambda = \int_0^\lambda 1\, d\tilde{\lambda} = \int_0^\lambda \sqrt{\frac{T_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i \dot{q}_j}{2(E-U(\vec{q}))}}\, d\lambda = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\frac{T_{ij}(\vec{q}) q_i' q_j'}{2(E-U(\vec{q}))}}\, d\tau$$

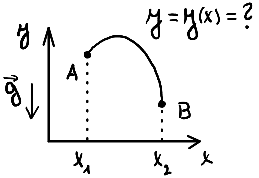
Př. tvar trajektorie šikmého vrhu $L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$ $U = mgy$ $T = \frac{1}{2} (\dot{x}, \dot{y}) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ $E = T + U = \text{konst}$

Př. tvar trajektorie šikmého vrhu $L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \quad U = mgy \quad T = \frac{1}{2} (\dot{x}, \dot{y}) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad E = T + U = \text{konst}$

$y = y(x) = ?$



Př. tvar trajektorie šikmého vrhu $L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy$ $\quad U=mgy$ $\quad T=\frac{1}{2}(\dot{x},\dot{y})\begin{pmatrix}m&0\\0&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}$ $\quad E=T+U=\text{konst}$

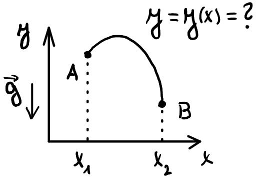


$$S_0=\int_A^B\sqrt{2(E-mgy)}\sqrt{m(dx)^2+m(dy)^2}=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2(E-mgy)}\sqrt{m(1+y'^2)}\,dx=\underbrace{\sqrt{2g}\,m}_{\text{konst.}}\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{\sqrt{\frac{E}{mg}-y}\sqrt{1+y'^2}}_{F(y,y')}\,dx$$

parametrizace $y=y(x)$ $\quad dy=y'dx$

(tj. $\tau=x$)

Př. tvar trajektorie šikmého vrhu $L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy \quad U=mgy \quad T=\frac{1}{2}(\dot{x},\dot{y})\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} \quad E=T+U=\text{konst}$



$$S_0=\int_A^B\sqrt{2(E-mgy)}\sqrt{m(dx)^2+m(dy)^2}=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2(E-mgy)}\sqrt{m(1+y'^2)}\,dx=\underbrace{\sqrt{2g}\,m}_{\text{konst.}}\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{\sqrt{\frac{E}{mg}-y}\sqrt{1+y'^2}}_{F(y,y')}\,dx$$

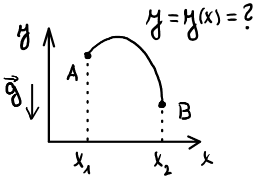
parametrizace $y=y(x) \quad dy=y'dx$

(tj. $\tau=x$)

Eulerova rce. $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$ protože $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ přejde na

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}}_{=C_1}\Big)=\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''+\frac{\partial F}{\partial x}-\left(y''\frac{\partial F}{\partial y'}+y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)=y'\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]=0$$

Př. tvar trajektorie šikmého vrhu $L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy$ $\quad U=mgy$ $\quad T=\frac{1}{2}(\dot{x},\dot{y})\begin{pmatrix}m&0\\0&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}$ $\quad E=T+U=\text{konst}$



$$S_0=\int_A^B\sqrt{2(E-mgy)}\sqrt{m(dx)^2+m(dy)^2}=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2(E-mgy)}\sqrt{m(1+y'^2)}\,dx=\underbrace{\sqrt{2g}\,m}_{\text{konst.}}\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{\sqrt{\frac{E}{mg}-y}\sqrt{1+y'^2}\,dx}_{F(y,y')}$$

parametrizace $y=y(x)$ $\quad dy=y'dx$

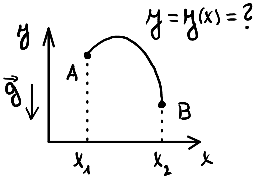
(tj. $\tau=x$)

Eulerova rce. $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$ protože $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ přejde na

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}}_{=C_1}\Big)=\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''+\frac{\partial F}{\partial x}-\left(y''\frac{\partial F}{\partial y'}+y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)=y'\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]=0$$

$$C_1=F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\qquad K=\frac{E}{mg}$$

Př. tvar trajektorie šikmého vrhu $L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy$ $U=mgy$ $T=\frac{1}{2}(\dot{x},\dot{y})\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ $E=T+U=konst$



$$S_0=\int_A^B \sqrt{2(E-mgy)}\,\sqrt{m(dx)^2+m(dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2(E-mgy)}\,\sqrt{m(1+y'^2)}\,dx = \underbrace{\sqrt{2g}\,m}_{\text{konst.}}\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{\sqrt{\frac{E}{mg}-y}\,\sqrt{1+y'^2}}_{F(y,y')}\,dx$$

parametrizace $y=y(x)$ $dy=y'dx$

(tj. $\tau=x$)

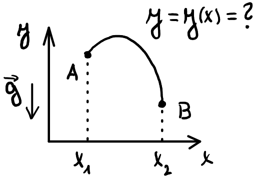
Eulerova rce. $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$ protože $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ přejde na

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}}_{=C_1}\Big)=\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''+\frac{\partial F}{\partial x}-\left(y''\frac{\partial F}{\partial y'}+y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)=y'\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]=0$$

$$C_1=F-y'\frac{\partial F}{\partial y'} \qquad K=\frac{E}{mg}$$

$$C_1=\sqrt{K-y}\,\sqrt{1+y'^2}-y'\sqrt{K-y}\,\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Př. tvar trajektorie šikmého vrhu $L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy$ $\quad U=mgy$ $\quad T=\frac{1}{2}(\dot{x},\dot{y})\begin{pmatrix}m&0\\0&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}$ $\quad E=T+U=konst$



$$S_0=\int_A^B\sqrt{2(E-mgy)}\,\sqrt{m(dx)^2+m(dy)^2}=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2(E-mgy)}\,\sqrt{m(1+y'^2)}\,dx=\underbrace{\sqrt{2g}\,m}_{\text{konst.}}\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{\sqrt{\frac{E}{mg}-y}\,\sqrt{1+y'^2}}_{F(y,y')}\,dx$$

parametrizace $y=y(x)$ $\quad dy=y'dx$

(tj. $\tau=x$)

Eulerova rce. $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$ protože $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ přejde na

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}}_{=C_1}\Big)=\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''+\frac{\partial F}{\partial x}-\left(y''\frac{\partial F}{\partial y'}+y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)=y'\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]=0$$

$$C_1=F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\qquad K=\frac{E}{mg}$$

$$C_1=\sqrt{K-y}\,\sqrt{1+y'^2}-y'\sqrt{K-y}\,\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$C_1=\frac{\sqrt{K-y}}{\sqrt{1+y'^2}}\Rightarrow y'=\frac{1}{C_1}\sqrt{K-y-C_1^2}\Rightarrow\int\frac{1}{C_1}dx=\int\frac{y'dx}{\sqrt{K-y-C_1^2}}\Rightarrow\frac{x}{C_1}=2\sqrt{K-y-C_1^2}+\frac{C_2}{C_1}\Rightarrow(x-C_2)^2=4C_1^2\left(\frac{E}{mg}-C_1^2-y\right)$$