8.45 Najděte dva různé vektorové potenciály, které popisují konstantní homogenní magnetické pole $\vec B = (0,0,B)$. Ukažte, že tyto vektorové potenciály spolu souvisí kalibrační transformací.

vektorový potenciál $\vec A$
a skalární potenciál φ
zavádíme tak abychom
splnili II. sérii Maxwellových rovnic.

$$\operatorname{div} \vec B = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec E + \frac{\partial \vec B}{\partial t} = 0.$$

$$\vec B = \operatorname{rot} \vec A$$
$$\vec E = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec A}{\partial t}$$

potenciály nejsou určeny jednoznačně

kalibrační transformace
$$\tilde{\vec A} = \vec A + \operatorname{grad} \Lambda(\vec r, t)$$
$$\tilde\varphi = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$
$\Lambda = \Lambda(\vec r, t)$

nemění pole $\vec E, \vec B$

přechod od dvojice potenciálů $(\vec A, \varphi)$ k dvojici $(\tilde{\vec A}, \tilde\varphi)$ která popisuje stejné elmag pole $\vec E, \vec B$

1) najdeme $\vec A$ k zadanému $\vec B$

$\operatorname{rot} \vec A = \vec B$ ve složkách

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 0 \rightarrow A_2 = \int \frac{\partial A_3}{\partial y} dz + \tilde A_2(x,y)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = 0 \rightarrow A_1 = \int \frac{\partial A_3}{\partial x} dz + \tilde A_1(x,y)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = B \rightarrow \cancel{\int \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_3}{\partial y} dz} + \frac{\partial \tilde A_2}{\partial x} - \cancel{\int \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_3}{\partial x} dz} - \frac{\partial \tilde A_1}{\partial y} = B \rightarrow \frac{\partial \tilde A_1}{\partial y} = \frac{\partial \tilde A_2}{\partial x} - B$$

$$\tilde A_1 = \int \left(\frac{\partial \tilde A_2}{\partial x} - B\right) dy + \tilde{\tilde A}_1(x)$$

celkem dostáváme

$$\vec A = \begin{pmatrix} \int \frac{\partial A_3}{\partial x} dz + \int \frac{\partial \tilde A_2}{\partial x} dy - B \cdot y + \tilde{\tilde A}_1(x) \\ \int \frac{\partial A_3}{\partial y} dz + \tilde A_2(x,y) \\ A_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

různé kalibrace dostaneme volbou funkcí $\tilde{\tilde A}_1(x)$, $\tilde A_2(x,y)$ a $A_3(x,y,z)$

	$\tilde{\tilde A}_1(x)$	$\tilde A_2(x,y)$	$A_3(x,y,z)$	
1	0	$\frac{1}{2}Bx$	0	$\vec A = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$
2	0	0	0	$\tilde{\vec A} = (-By, 0, 0)$

2)

Parciální diferenciální rovnice pro vektorové pole A řešíme následovně. Začneme hledáním A_3. Vyjádříme její z-tovou derivaci pomocí y-derivace dosud neznáme fce A_3 a integrujeme přes z. Při integraci přičítáme místo integrační konstanty funkci A_2 s vlnkou, která je funkcí všech proměnných hledané fce A_2 kromě té (z) přes kterou jsme integrovali, protože taková vlnkovaná funkce je pro parciální derivaci podle z konstantní. V dalším již za A_2 do rovnic dosazujeme její nalezený tvar. Obdobně postupujeme ve druhé rovnici s funkcí A_1. Pa dosazení za A_1 a A_2 do třetí rovnice dostaneme vztah pro jejich vlnkované verze, které již závisí pouze na x a y. Celkové řešení je pak dáno volbou tří funkcí funkci A~~1, A~2 a A_3.

Najdeme kalibrační transformaci. Začneme řešením třetí rovnice, odkud plyne, že Lambda nezávisí na z. Poté z druhé rovnice integrací získáme tvar Lambda, který dosadíme do první rovnice a odtud zjistíme, že funkce f(x) je konstantní, a vzhledem k tomu, že fce Lambda lišící se o konstantu vedou na stejnou kalibrační transformaci, můžeme tuto konstantu f volit nulovou.

Nyní najdeme funkci $\Lambda(x,y,z,t)$

$$\operatorname{grad} \Lambda = \tilde{\vec A} - \vec A = (-\tfrac{1}{2}By, -\tfrac{1}{2}Bx, 0)$$

pole je z funkcí $\tilde{\tilde A}_1, \tilde A_2, A_3$ získáno lineárními operacemi a proto

$$\Lambda = \int 0 \, dz + \int -\tfrac{1}{2}Bx \, dy + \int 0 \, dx = -\tfrac{1}{2}Bxy$$

Na cvičení raději 2, řešit explicitně:

$\operatorname{grad} \Lambda = \tilde{\vec A} - \vec A$ ve složkách

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = -By - (-\tfrac{1}{2}By) = -\tfrac{1}{2}By \rightarrow \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \int -\tfrac{1}{2}B \, dy + \frac{d}{dx} f = -\tfrac{1}{2}By \Rightarrow \frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow f \text{ const.}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0 - \tfrac{1}{2}Bx \rightarrow \Lambda(x,y) = \int -\tfrac{1}{2}Bx \, dy + f(x) = -\tfrac{1}{2}Bxy + f(x)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0 \Rightarrow \Lambda = \Lambda(x,y)$$

celkem $\underline{\Lambda = -\frac{1}{2}Bxy}$

(8.46) Určete složky vektorových potenciálů z předchozích případů v sférických a cylindrických souřadnicích

$x = r \sin\theta \cos\varphi$
$y = r \sin\theta \sin\varphi$
$z = r \cos\theta$

$$\vec e_r = \frac{\frac{\partial \vec r}{\partial r}}{\|\ \|} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \vec e_\theta = \frac{\frac{\partial \vec r}{\partial \theta}}{\|-\|} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}\frac{1}{r} \qquad \vec e_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec r}{\partial \varphi}}{\|-\|} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{r\sin\theta}$$

$$\vec A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}By \\ \frac{1}{2}Bx \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}Br\sin\theta\sin\varphi \\ \frac{1}{2}Br\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}Br\sin\theta \end{pmatrix}$$

cylindrické
$x = R\cos\varphi$
$y = R\sin\varphi$
$z = z$

$$\vec e_R = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec e_\varphi = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

transformační matice $\tilde{\vec e}_i = S^j{}_i \vec e_j$

$\tilde v^i = (S^{-1})^i{}_j v^j$ kde $S^{-1} = S^T$ ON souřadnice

$$\begin{pmatrix} A_R \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}BR\sin\varphi \\ \frac{1}{2}BR\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}BR \\ 0 \end{pmatrix}$$