U8.4 Lorentzova transformace potenciálů a polí

Odvoďte transformační vztahy pro potenciály $\varphi(\vec r,t)$, $\vec A(\vec r,t)$ a pole $\vec E(\vec r,t)$, $\vec B(\vec r,t)$ při speciální Lorentzově transformaci:

$x' = \gamma(x - Ut)$ $\quad t' = \gamma(t - \frac{Ux}{c^2})$ $\quad y' = y$ $\quad z' = z$

• Čtyřpotenciál $(A^\mu) = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec A\right)$ transformuje se jako čtyřvektor $A'^\mu = \alpha^\mu{}_\nu A^\nu$ kde

$$(\alpha^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \beta = \frac{U}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

tedy
$$\begin{pmatrix} \frac{\varphi'}{c} \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{c} \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$\varphi' = \gamma(\varphi - c\beta A_x)$$
$$A'_x = \gamma\left(A_x - \frac{\beta}{c}\varphi\right)$$
$$A'_y = A_y$$
$$A'_z = A_z$$

ale pozor jde o vektorové pole proto $A'^\mu(x') = \alpha^\mu{}_\nu A^\nu(x)$

tedy výsledek ve správných souřadnicích (čárkované) je $\boxed{A'^\mu(x'^\rho) = \alpha^\mu{}_\nu A^\nu\left((\alpha^{-1})^\sigma{}_\rho x'^\rho\right)}$

• Tenzor elektromagnetického pole $F_{\mu\nu} := \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ $\quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ antisymetrický

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\vec E^T}{c} \\ \frac{\vec E}{c} & \begin{matrix} 0 & -B_z & B_y \\ B_z & 0 & -B_x \\ -B_y & B_x & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

transformace $\boxed{F'^{\mu\nu} = \alpha^\mu{}_\rho \alpha^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}} = \alpha^\mu{}_\rho F^{\rho\sigma} (\alpha^T)_\sigma{}^\nu$

maticově $\boxed{F' = \alpha F \alpha^T}$

všimněme $F'^T = (F\alpha^T)^T\alpha^T = \alpha F^T \alpha^T = -\alpha F \alpha^T = -F'$
stačí tedy zkoumat jen horní část

složky transformovaného $F'^{\mu\nu} = \alpha^\mu{}_\rho \alpha^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}$ napočítáme díky tvaru matic α a $F^{\mu\nu}$:

$$F'^{00} = \alpha^0{}_\rho \alpha^0{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \alpha^0{}_0\alpha^0{}_0 \underbrace{F^{00}}_{0} + \alpha^0{}_0\alpha^0{}_1 F^{01} + \alpha^0{}_1\alpha^0{}_0 \underbrace{F^{10}}_{-F^{01}} + \alpha^0{}_1\alpha^0{}_1 \underbrace{F^{11}}_{0} = 0$$

diagonální členy F jsou nuly, dále je vynechám

$$F'^{01} = \alpha^0{}_\rho \alpha^1{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \alpha^0{}_0\alpha^1{}_1 F^{01} + \alpha^0{}_1\alpha^1{}_0 F^{10} = \gamma^2 F^{01} + (-\beta\gamma)^2 F^{10} = \gamma^2(1-\beta^2)F^{01} = F^{01} \qquad E'_x = E_x$$

$$F'^{02} = \alpha^0{}_\rho \alpha^2{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \alpha^0{}_0\alpha^2{}_2 F^{02} + \alpha^0{}_1\alpha^2{}_2 F^{12} = \gamma F^{02} - \beta\gamma F^{12} \qquad E'_y = (E_y - c\beta B_z)\gamma$$

$$F'^{03} = \alpha^0{}_\rho \alpha^3{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \alpha^0{}_0\alpha^3{}_3 F^{03} + \alpha^0{}_1\alpha^3{}_3 F^{13} = \gamma F^{03} - \beta\gamma F^{13} \qquad E'_z = \gamma(E_z + c\beta B_y)$$

$$F'^{12} = \alpha^1{}_\rho \alpha^2{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \alpha^1{}_0\alpha^2{}_2 F^{02} + \alpha^1{}_1\alpha^2{}_2 F^{12} = -\beta\gamma F^{02} + \gamma F^{12} \quad \text{tj. } -B'_z = +\beta\gamma\frac{E_y}{c} - \gamma B_z \qquad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}E_y\right)$$

$$F'^{13} = \alpha^1{}_\rho \alpha^3{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \alpha^1{}_0\alpha^3{}_3 F^{03} + \alpha^1{}_1\alpha^3{}_3 F^{13} = -\beta\gamma F^{03} + \gamma F^{13} \qquad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c}E_z\right)$$

$$F'^{23} = \alpha^2{}_\rho \alpha^3{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \alpha^2{}_2\alpha^3{}_3 F^{23} = F^{23} \qquad B'_x = B_x$$

Při obecném směru rychlosti $\vec U$ dostaneme

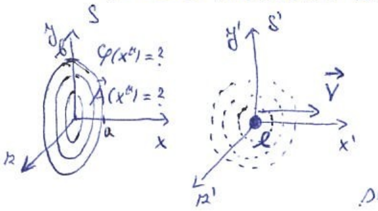
$$\vec E'_\parallel = \vec E_\parallel \qquad \vec E'_\perp = \gamma(\vec E_\perp + \vec U \times \vec B)$$
$$\vec B'_\parallel = \vec B \qquad \vec B'_\perp = \gamma\left(\vec B_\perp - \frac{\vec U}{c^2} \times \vec E\right)$$

. $\vec E_\parallel$ a $\vec E_\perp$ jsou složky $\vec E$ rovnoběžné s $\vec U$ resp. kolmé k $\vec U$. Inverzní transformaci dostaneme záměnou čárek a $\vec U' = -\vec U$.

Pokud bude v soustavě S pouze el. pole ($\vec B = 0$) tak v S' bude i pole magnetické:
$\vec E'_\parallel = \vec E_\parallel \quad \vec E'_\perp = \gamma\vec E_\perp \quad \vec B'_\parallel = \vec B_\parallel = 0 \quad \vec B'_\perp = -\gamma\frac{\vec U}{c^2}\times\vec E$

8.50

Vypočtěte potenciály elmag pole buzeného ve vakuu ~~potenciálem~~ bodovým nábojem e pohybujícím se (v dané inerciální soustavě S) rovnoměrně přímočaře rychlostí $\vec V$. Jaký tvar mají ekvipotenciální plochy?



určíme $\varphi'(\vec r',t') = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$

$\vec A'(\vec r',t') = 0$ … není zde magnetické pole

Lorentzova transformace
$x' = \gamma(x - Vt) \quad y' = y \quad z' = z$
$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)$

sestavíme čtyřpotenciál $A'^\mu(\vec r',t') = \left(\frac{\varphi'}{c}, \vec A'\right) = \left(\frac{\varphi'}{c}, 0\right)$

transformace čtyřpotenciálu
$A^\mu = (\alpha^{-1})^\mu{}_\nu A'^\nu$

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{c} \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\varphi'}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\frac{\varphi'}{c} \\ \beta\gamma\frac{\varphi'}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} &\varphi = \gamma\varphi' \\ &A_x = \beta\gamma\frac{\varphi'}{c} = \frac{\beta}{c}\varphi \\ &A_y = 0 \\ &A_z = 0 \end{aligned}$$

nesmíme zapomínat, že jde o funkce $\vec r, t$ a tedy musíme transformovat i proměnné tj.

$$A^\mu(x^\rho) = (\alpha^{-1})^\mu{}_\nu A'^\nu(x'^\sigma) = (\alpha^{-1})^\mu{}_\nu A'^\nu(\alpha^\sigma{}_\rho x^\rho)$$

tedy: $\underline{\varphi(\vec r,t) = \gamma\varphi'(\vec r',t') = \frac{\gamma e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'} = \frac{\gamma e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\gamma^2(x-Vt)^2+y^2+z^2}}}$

$\underline{A_x(\vec r,t) = \frac{\beta}{c}\varphi(\vec r,t)}$

Tvar ekvipotenciálních ploch (v S' kulové plochy s poloměrem $\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\varphi'}$)

$$\underset{\text{const.}}{\text{const}} = \varphi(\vec r,t) = \frac{\gamma e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\gamma^2(x-Vt)^2+y^2+z^2}}$$

$$\gamma^2(x-Vt)^2 + y^2 + z^2 = \frac{\gamma^2 e^2}{(4\pi\varepsilon_0\varphi)^2} \qquad \frac{(x-Vt)^2}{\frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0\varphi)^2}} + \frac{y^2}{\left(\frac{e\gamma}{4\pi\varepsilon_0\varphi}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{e\gamma}{4\pi\varepsilon_0\varphi}\right)^2} = 1$$

rotační elipsoidy s posunutým počátkem