Klasifikace veličin vzhledem k transformacím souřadnic (změnám báze v $\vec{E}$) $\dim \vec{E} = n \in \mathbb{N}$

Veličiny jsou prvky $\vec E$ resp. nějaké struktury (tzv. tensorové algebry) vybudované na $\vec E$, zde je budeme charakterizovat podle toho kolik mají složek (souřadnic) a jak se tyto souřadnice mění při změnách báze $B = (\vec e_1, \dots, \vec e_n) \to \tilde B = (\tilde{\vec e}_1, \dots, \tilde{\vec e}_n)$ kde $\boxed{\tilde{\vec e}_j = \vec e_i S^i{}_j}$ $\mathbb{S} = (S^i{}_j) \in GL(n, \mathbb R)$ matice přechodu od B k $\tilde B$

1) **skaláry** (invarianty) $s \in \mathbb R$ $\tilde s = s$ ve fyzice veličiny charakterizované pouze velikostí (a jednotkou) např: teplota, hmotnost, náboj, energie, práce, ...

2) **vektory** $\vec v \in \vec E$ ($\vec v \in \mathbb R^n$)   ve fyzice veličiny charakterizované velikostí a směrem
např: síla, rychlost, zrychlení, hybnost, intenzita ele. pole, ...

$\boxed{\tilde v^k = (S^{-1})^k{}_i v^i}$

• **kontravariantní**

transformace $\vec v = v^i \vec e_i = \tilde v^j \tilde{\vec e}_j = \tilde v^j \vec e_i S^i{}_j \Rightarrow v^i = S^i{}_j \tilde v^j \quad / (S^{-1})^k{}_i$

$(S^{-1})^k{}_i v^i = \underbrace{(S^{-1} S)^k{}_j}_{(\mathbb 1)^k{}_j = \delta^k_j} \tilde v^j = \tilde v^k$

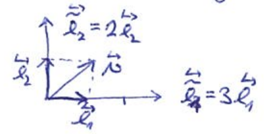
lineární funkcionál $\alpha \in \vec E^* = \{ \Phi : \vec E \to \mathbb R \mid \Phi \text{ je lineární} \}$
duální vektorový prostor k $\vec E$ s duální bází $B^* = (e^1, \dots, e^n)$ k bázi $B = (\vec e_1, \dots, \vec e_n)$

souřadnice α v bázi B^*
$\alpha = \alpha_i e^i$ $\alpha(\vec e_j) = \alpha_i e^i(\vec e_j) = \alpha_i \delta^i_j = \alpha_j$ $e^i(\vec e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ souřadnicové funkcionály v bázi B

souřadnice α v bázi $\tilde B^*$
$\tilde\alpha_j = \alpha(\tilde{\vec e}_j) = \alpha(\vec e_i S^i{}_j) = \alpha(\vec e_i) S^i{}_j = \alpha_i S^i{}_j$

$\boxed{\tilde\alpha_j = \alpha_i S^i{}_j}$

• **kovariantní** (kovektory)

Př: 

$\mathbb S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\mathbb S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac13 & 0 \\ 0 & \frac12 \end{pmatrix}$ $\tilde v^1 = \frac13 v^1$ $\tilde v^2 = \frac12 v^2$

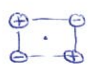
3) **tensory**

Př: tensor 2. řádu T definujeme pomocí jeho složek v libovolné bázi $T^{ij} := v^i u^j$ kde $\vec v, \vec u \in \vec E$ (kontravariantní) pak
$$\boxed{\tilde T^{ij} = \tilde v^i \tilde u^j = (S^{-1})^i{}_k v^k (S^{-1})^j{}_l u^l = (S^{-1})^i{}_k (S^{-1})^j{}_l v^k u^l = (S^{-1})^i{}_k (S^{-1})^j{}_l T^{kl}}$$

lze reprezentovat maticově
$$\tilde T^{ij} = (S^{-1})^i{}_k T^{kl} (S^{-1})^j{}_l = (\mathbb S^{-1}\mathbb T)^{il} (S^{-1})^j{}_l = (S^{-1})^j{}_l ((\mathbb S^{-1}\mathbb T)^T)^{li} = (\mathbb S^{-1}(\mathbb S^{-1}\mathbb T)^T)^{ji}$$
$$= (\mathbb S^{-1}\mathbb T(\mathbb S^{-1})^T)^{ij} \quad \text{tedy} \quad \tilde{\mathbb T} = \mathbb S^{-1}\mathbb T(\mathbb S^{-1})^T$$

tensor 2. řádu (kovariantní) $\tilde K_{ij} = K_{kl} S^k{}_i S^l{}_j$ maticově $\tilde{\mathbb K} = \mathbb S^T \mathbb K \mathbb S$

Def. Tensorem typu $\binom{p}{q}$ tj. kontravariantním řádu $p \in \mathbb N_0$ a kovariantním řádu $q \in \mathbb N_0$ nazýváme veličinu T reprezentovanou (v bázi B) n^{p+q} reálnými čísly $T^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q}$ které se při změně báze $B \to \tilde B$ transformují vztahem
$$\tilde T^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q} = (S^{-1})^{i_1}{}_{k_1} \dots (S^{-1})^{i_p}{}_{k_p} T^{k_1, \dots, k_p}_{l_1, \dots, l_q} S^{l_1}{}_{j_1} \dots S^{l_q}{}_{j_q}$$
řád tensoru $= p + q$

ve fyzice například
• tensor momentu setrvačnosti $I_{jk} = \int_{V'} \rho (x'^2_l \delta_{jk} - x'_j x'_k) \, dV'$ $L_j = I_{jk}\omega_k$ $T = \frac12 I_{jk}\omega_j\omega_k$
• elektrický kvadrupólový moment $Q_{jk} = \int_V (3x'_j x'_k - \delta_{jk} r'^2) \rho_{\text{náboje}} \, dV$ 
• tensor mechanického napětí
• tensor elektromagnetického pole $F^{\mu\nu}$, tensor energie a hybnosti

Pozn: skalár = tensor nultého řádu   vektor = tensor prvního řádu

4) **tensorová hustota** typu $\binom{p}{q}$ váhy $r \in \mathbb Z$
$$\tilde\tau^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q} = (\det \mathbb S)^r (S^{-1})^{i_1}{}_{k_1} \dots (S^{-1})^{i_p}{}_{k_p} \tau^{k_1, \dots, k_p}_{l_1, \dots, l_q} S^{l_1}{}_{j_1} \dots S^{l_q}{}_{j_q}$$

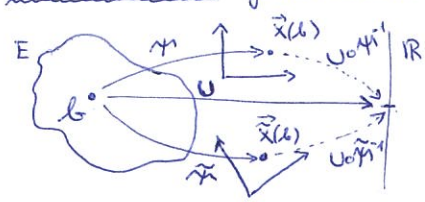
Invariantní tensor

Buď $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ podgrupa, pak tensor T nazýváme G-invariantní, pokud se jeho složky nemění při změně báze $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j$ $\forall S \in G$ (tj. $\tilde{T}^{i,j,\dots}_{a,b,\dots} = T^{i,j,\dots}_{a,b,\dots}$).

Př: $GL(n)$-invariantní tensory
- skaláry
- nulový vektor
- tensor typu $\binom{1}{1}$ $\quad T^i_j := \delta^i_j$

Pozn: Grupa transformací vůči nimž se charakterizují veličiny závisí na teorii
v mechanice – ortogonální transformace $O(3)$
v STR – Lorentzovy transformace $O(1,3)$ $\qquad$ v OTR – obecné lineární transf. $GL(4)$

Skalární pole je zobrazení $U: E \to \mathbb{R}$, $U = U(b)$ $\qquad$ v souřadnicích $U: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $U = U(\vec{x}(b))$ $\quad$ (obvykle alespoň třídy $C^{(1)}$)



transformace $\boxed{\tilde{U}(\tilde{\vec{x}}(b)) = U(\vec{x}(b))}$ $\longrightarrow$ $\tilde{U}(\tilde{\vec{x}}) = U(\vec{x}) = U(S(\tilde{\vec{x}} - \tilde{\vec{x}}(\sigma)))$

Vektorové pole (kontravariantní) je zobrazení $\vec{F}: E \to \vec{E}$, $\vec{F} = \vec{F}(b)$ $\qquad$ v souřadnicích $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}(b))$

transformace $\boxed{\tilde{F}^i(\tilde{\vec{x}}(b)) = (S^{-1})^i_j F^j(\vec{x}(b))}$ $\longrightarrow$ $\tilde{\vec{F}}(\tilde{\vec{x}}) = S^{-1}\vec{F}(\vec{x}) = S^{-1}\vec{F}(S(\tilde{\vec{x}} - \tilde{\vec{x}}(\sigma)))$

obdobně pro tensorová pole

V mechanice používáme Euklidovský afinní prostor (nad $\mathbb{R}$) tj. afinní prostor se skalárním součinem na $\vec{E}$

Skalárním součinem na $\vec{E}$ nazýváme bilineární zobrazení $g: \vec{E} \times \vec{E} \to \mathbb{R}$ které je
- symetrické $\quad g(\vec{u},\vec{v}) = g(\vec{v},\vec{u})$ $\forall \vec{u},\vec{v} \in \vec{E}$
- positivně definitní $\quad g(\vec{v},\vec{v}) > 0$ $\forall \vec{v} \neq \vec{o}$

$$\forall \vec{u},\vec{v} \in \vec{E} \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = g(\vec{u},\vec{v}) = g(u^i\vec{e}_i, v^j\vec{e}_j) = u^i v^j \underbrace{g(\vec{e}_i,\vec{e}_j)}_{g_{ij}} = g_{ij}u^i v^j = \vec{u}^T \mathbb{g}\, \vec{v} = (\dots)\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$$

↑ v bázi B

g_{ij} … Gramova matice $\mathbb{g} = (g_{ij})$ … tensor typu $\binom{0}{2}$

Je-li báze B ortonormální tak $g(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ tj. $\mathbb{g} = \mathbb{1}$.

Def: Soustava souřadnic $\langle \sigma, \underbrace{(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)}_{B} \rangle$ se nazývá kartézská, je-li báze B ortonormální.

Ortogonální transformace (přechody mezi ortonormálními bázemi) $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j$

- pasivní – nechávají invariantní metrický tensor (nemění vzorec podle kterého se počítá skalární součin)

  v O.N. bázi $\boxed{\delta_{ij} = \tilde{g}_{ij} \overset{!}{=} g_{kl} S^k_i S^l_j = \delta_{kl} S^k_i S^l_j = S^k_i S^k_j}$

- aktivní $\quad g(\tilde{\vec{u}},\tilde{\vec{v}}) = g(\vec{u},\vec{v})$ – zachovávají hodnotu skalárního součinu (délky a úhly)

  $\tilde{\vec{u}} = S\vec{u}$ $\qquad \tilde{\vec{u}}^T \mathbb{g}\, \tilde{\vec{v}} = (S\vec{u})^T \mathbb{g} (S\vec{v}) = \vec{u}^T S^T \mathbb{g} S \vec{v} = \vec{u}^T \mathbb{g}\, \vec{v}$ $\forall \vec{u},\vec{v}$ $\Rightarrow$ $S^T \mathbb{g} S = \mathbb{g}$

$S \in O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A^T A = A A^T = \mathbb{1}\}$ ortogonální grupa $\qquad$ v O.N. bázi ($\mathbb{g} = \mathbb{1}$) $\boxed{S^T S = \mathbb{1}}$ $\boxed{S^{-1} = S^T}$

transformace kovariantní $\tilde{\alpha}_j = \alpha_i S^i_j \Rightarrow \tilde{\vec{\alpha}}^T = \vec{\alpha}^T S \Rightarrow \tilde{\vec{\alpha}} = S^T \vec{\alpha}$

kontravariantní $\tilde{v}^i = (S^{-1})^i_j v^j \Rightarrow \tilde{\vec{v}} = S^{-1}\vec{v} \Rightarrow \tilde{\vec{v}} = S^T \vec{v}$

} jsou při ortogonálních transformacích stejné – vektory a kovektory jsou

proto v mechanice nerozlišitelné a tedy od teď (až do STR) budeme psát indexy dolů $\boxed{\tilde{v}_i = S_{ji} v_j}$ $S \in O$

<u>Orientace vektorového prostoru</u> je zobrazení $\omega: \{B \mid B \text{ báze } \vec{E}\} \to \{+1,-1\}$ takové, že pro $\forall B, \tilde{B}$ báze platí

$\det \mathbb{S} > 0 \Rightarrow \omega(B) = \omega(\tilde{B})$ ... souhlasně orientované báze

$\det \mathbb{S} < 0 \Rightarrow \omega(B) = -\omega(\tilde{B})$ ... opačně orientované báze

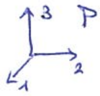
↑ matice přechodu od B k $\tilde{B}$

Báze B pro kterou je $\omega(B) = +1$ se nazývá kladně orientovaná.

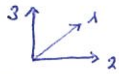
Př: vektorový součin $(\vec{a}, \vec{b}, \underbrace{\vec{a}\times\vec{b}}_{\neq 0})$ tvoří kladně orientovanou bázi

<u>Pozn.</u>: Reálný fyzikální prostor mechaniky není orientovaný, orientaci v něm volíme výběrem pravidla pravé (levé) ruky

v mechanice se orientace řeší volbou báze, která



P pravotočivá



L levotočivá

je vždy kladně orientovaná - mapovaná na standardní bázi v $\mathbb{R}^3$ která má kladnou orientaci.

<u>Pseudotenzory</u> jsou veličiny, jejichž definice závisí na orientaci, a to tak, že při změně orientace mění znaménko.

např. magnetická indukce $\vec{B}_\omega = -\vec{B}_{-\omega}$

nebo moment hybnosti, moment síly, úhlová rychlost, ...

<u>Vztažná soustava</u>
- vztažné těleso - tuhé hmotné těleso ke kterému vztahujeme pohyb zkoumaných těl
- metoda měření času - obvykle pomocí periodických jevů (hodiny)
- kartézská soustava souřadnic jejichž počátek i osy jsou pevně spojeny se vztažným tělesem

Vztažnou soustavu budeme reprezentovat soustavou kartézských souřadnic $\langle \sigma(t), \underbrace{(\vec{\ell}_1(t), \dots, \vec{\ell}_n(t))}_{\text{O.N. báze } B(t) \text{ (pravotočivá)}} \rangle$

- počátek σ lze díky homogenitě prostoru volit kdekoliv, $\sigma = \sigma(t)$ translace vůči N.A.P.
- Osy dané O.N. bází B mohou být libovolně natočené (díky izotropii prostoru); $B = B(t)$ rotace vůči Newtonovu Absolutnímu Prostoru

Transformace souřadnic mezi kartézskými vztažnými soustavami (pravotočivými)

$$\tilde{\vec{x}} = \mathbb{S}^T(t)\,(\vec{x} - \vec{x}(\sigma(t))) \qquad \tilde{x}_i = S_{ji}(t)\,[x_j - x_j(\sigma(t))] \qquad \mathbb{S}(t) \in SO(3)$$

<u>Př</u>: rychlost (absolutní vůči N.A.P.) $\vec{v}(b(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{b(t+\Delta t) - b(t)}{\Delta t}$ vyjadřuje rychlost vůči absolutnímu prostoru v praxi ale dokážeme měřit rychlost pouze vůči vztažným tělesům proto definujeme

<u>Relativní veličiny</u> - definované vůči vztažné soustavě $\langle \sigma, \underbrace{(\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_n)}_{\text{O.N. báze } B} \rangle$ (kartézské!)

- Polohový vektor $\vec{x}(b)$ $\quad x_i = (b - \sigma)\cdot \vec{\ell}_i$
- Vektor rychlosti $\vec{v}(b) = \dot{\vec{x}}(b) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(b(t+\Delta t)) - \vec{x}(b(t))}{\Delta t}$ $\quad v_i = \dot{x}_i$
- Vektor zrychlení $\vec{a}(b) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(b)$ $\quad a_i = \dot{v}_i = \ddot{x}_i$

<u>Pozn</u>: při změnách báze se transformují jako vektory, ale při změně vztažné soustavy je "transformace" složitější jde totiž o změnu vektoru, nejen jeho složek