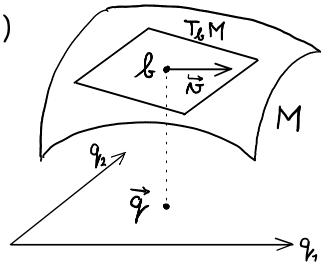
Pozorovatelné veličiny (polohy, rychlosti, hybnosti, momenty, síly, energie ...)
jsou funkce $2s+1$ proměnných $\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t$ na tzv.
rozšířeném rychlostním fázovém prostoru $\underbrace{TM}_{\text{tečný bandl}} \times \mathbb{R}$ kde $TM = \bigcup_{b \in M} \underbrace{T_b M}_{\substack{\text{tečný prostor k } M \\ \text{v bodě } b}}$



Kinetická energie v obecných souřadnicích

$$\hat{T}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = T(\dot{\hat{\vec{X}}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{\hat{X}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} \overbrace{m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l}}^{T_{kl}(\vec{q},t)} \dot{q}_k \dot{q}_l +$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}}_{\beta_k(\vec{q},t)}\dot{q}_k + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l}}_{\beta_l(\vec{q},t)}\dot{q}_l + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}}_{\alpha(\vec{q},t)} = \underbrace{\frac{1}{2}T_{kl}(\vec{q},t)\dot{q}_k\dot{q}_l}_{\text{P.D.}} + \beta_k(\vec{q},t)\dot{q}_k + \alpha(\vec{q},t)$$

- pokud jsou všechny vazby skleronomní pak $\hat{T}(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2}T_{kl}(\vec{q})\dot{q}_k\dot{q}_l$ je homogenní stupně 2 v rychlostech

Obecná síla $Q_j = \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} + Q_j^{(nep)}$

Obecná (kanonická) hybnost $p_j = p_j(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$
(nemusí mít rozměr hybnosti)

Pozn. LR2D: $\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) = Q_j^{(nep)} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} \iff \dot{p}_j = Q_j$

Př. $L = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 - e(\varphi - \dot{x}_i A_i)$ $\quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j + eA_j \neq m\dot{x}_j$

Obecná energie $\quad E = E(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \hat{L}$
(má rozměr energie)

$$E = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \hat{L} = \underbrace{\frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j}_{=2\hat{T}} - \underbrace{\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j}_{=0} - (\hat{T} - \hat{U}) = \hat{T} + \hat{U}$$

Pokud je $\hat{T}$ homogenní fce. 2. stupně v rychlostech $\dot{\vec{q}}$ (všecny vazby jsou skleronomní) a $\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \ \forall j \in \hat{s}$ pak E je celková mechanická energie soustavy.

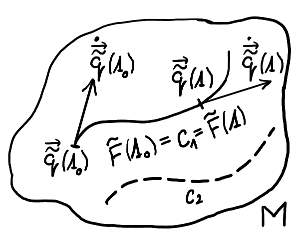
Integrály pohybu (zákony zachování) — jsou 1. integrály pohyb. rovnic, fce. konstantní podél trajektorie

Funkce $F(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ je integrálem pohybu pro systém popsaný pohybovými rovnicemi $\vec{R}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\ddot{\vec{q}},t) = 0$, pokud pro každé jejich řešení $\vec{q} = \vec{q}(t)$ (tzv. trajektorii) $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $\tilde{F}(t) = F(\vec{q}(t),\dot{\vec{q}}(t),t) = c \ \ \forall t$.

Funkce $F = F(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ je I. P. $\iff$ $0 = \left.\frac{\hat{d}F}{dt}\right|_{\vec{R}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\ddot{\vec{q}},t)=0} = \left.\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\right)\right|_{\vec{R}=0}$

$\Rightarrow \ddot{q}_i = G_i(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$

ověřit, že F je I. P. znamená řešit LR2D
jako lineární algebraické rovnice pro $\ddot{\vec{q}}$ a toto řešení dosadit do $\frac{\hat{d}F}{dt} = 0$



Dále budeme předpokládat, že na soustavu nepůsobí žádné nepotenciální síly tj. $Q_j^{(nep)} = 0$, pak lze některé integrály pohybu nalézt na základě chybějících proměnných v předpisu Lagrangeovy funkce:

1) čas t $\qquad \hat{L} = \hat{L}(\vec{q},\dot{\vec{q}})$ tj. $\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad$ obecná energie $E = E(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = konst.$ je I. P.

$$\frac{\hat{d}E}{dt} = \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \hat{L}\right) = \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j - \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial \hat{L}}{\partial t}\right] = \dot{q}_j\underbrace{\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j}\right]}_{\text{LR2D} \ = \ Q_j^{(nep)}} - \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} = \underbrace{\dot{q}_j Q_j^{(nep)}}_{\substack{\text{výkon sil} \\ \text{nepotenciálních}}} - \underbrace{\frac{\partial \hat{L}}{\partial t}}_{=0} = 0$$

Pozn. Obecná energie holonomní soustavy se skleronomními vazbami a konzervativními silami je konstatní.

2) **cyklická souřadnice** q_k, $k\in\hat s$ tj. $\frac{\partial\hat L}{\partial q_k}=0 \longrightarrow$ obeacná hybnost $p_k = p_k(\vec q,\dot{\vec q},t)=konst.$ je I. P.

je souřadnice, na které Lagr. fce. $\hat L$ nezávisí

$$\frac{\hat d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial \hat L}{\partial \dot q_k}\right)}_{p_k} - \underbrace{\frac{\partial\hat L}{\partial q_k}}_{=0} = Q_k^{(nep)} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\hat d p_k}{dt}=0 \quad \text{tj.} \quad \dot p_k = 0$$

Pozn. 3) $\frac{\partial\hat L}{\partial\dot q_k}=0 \Rightarrow \frac{\partial \hat L}{\partial q_k} = Q_k^{(nep)}=0$ nenastává

Teorém Noetherové (1915) "Ke každé jednoparametrické grupě tranosformací konfiguračního prostoru které ponechávají Lagrangeovu funkci invariantní (symetrie Lagr. fce.) existuje integrál pohybu."

Jednoparametrická grupa transformací M je spojitý homomorfizmus grup $\phi:(\mathbb R,+)\to(\mathrm{Dif}(M),\circ)$

$$\phi:\varepsilon\to\phi^\varepsilon \qquad \phi^0=Id \qquad \phi^{\varepsilon+\delta}=\phi^\varepsilon\circ\phi^\delta \qquad (\phi^\varepsilon)^{-1}=\phi^{-\varepsilon}$$

Transformace (aktivní) $\phi^\varepsilon\in \mathrm{Dif}(M)$ je zde bijekce $\phi^\varepsilon: M\to M$ taková, že ϕ^ε a $(\phi^\varepsilon)^{-1}$ jsou třídy $C^{(1)}$.

Znění, které dokážeme:

Transformace (aktivní)

$$q'_j = q'_j(\vec q,\varepsilon)=\phi^\varepsilon_j(\vec q) \quad \text{fce. třídy } C^{(2)},\ \det\left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_j}\right)\neq0$$

$$q'_j(\vec q,0)=q_j \qquad \forall j\in\hat s$$

$$\dot q'_j = \dot q'_j(\vec q,\dot{\vec q},\varepsilon) = \phi^\varepsilon_{*j}(\vec q,\dot{\vec q}) = \frac{\hat d q'_j}{dt} = \frac{\partial q'_j}{\partial q_k}\dot q_k$$

Invariance Lagrangeovy funkce $\forall\vec q\ \forall\dot{\vec q}\ \forall t\ \forall\varepsilon$

$$L'(\vec q,\dot{\vec q},t,\varepsilon) := L(\vec q\,'(\vec q,\varepsilon),\dot{\vec q}\,'(\vec q,\dot{\vec q},\varepsilon),t) = L(\vec q,\dot{\vec q},t)$$

$$\Downarrow$$

Veličina $I(\vec q,\dot{\vec q},t)=\sum_{k=1}^{\hat s}\frac{\partial L}{\partial\dot q_k}\left(\frac{\partial q'_k}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ je I. P.

Důkaz: invariance L $\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon\forall\vec q\forall\dot{\vec q}\forall t$

$$0=\frac{\partial L'}{\partial\varepsilon}\Big|_{(\vec q,\dot{\vec q},t,\varepsilon)} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\Big|_{(\vec q\,',\dot{\vec q}\,',t)}\cdot\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\Big|_{(\vec q,\varepsilon)} + \frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\Big|_{(\vec q\,',\dot{\vec q}\,',t)}\cdot\frac{\partial\dot q'_i}{\partial\varepsilon}\Big|_{(\vec q,\dot{\vec q},\varepsilon)} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon} + \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\right) - \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon} =$$

$$\frac{\partial\dot q'_i}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\hat dq'_i}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k}\dot q_k\right) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k}\right)\dot q_k = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\right)\dot q_k = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\right)$$

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)\right]\Bigg|_{(\vec q\,',\dot{\vec q}\,',t)}\cdot\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon} + \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\right)$$

zeslabíme požadavky z $\forall\varepsilon$ na $\varepsilon=0$ a dosadíme z LR2D

$$0=\frac{\partial L'}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)\right]\Bigg|_{(\vec q,\dot{\vec q},t)}}_{=-Q_i^{(nep)}=0\ \forall i\in\hat s}\cdot\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\right)\Bigg|_{\vec R=0} = \frac{\hat d}{dt}\left(I\right)\Big|_{\vec R=0}$$

LR2D $\vec R(\vec q,\dot{\vec q},\ddot{\vec q},t)=0 \Rightarrow$

QED.

Pozn. $L'(\vec q,\dot{\vec q},t,\varepsilon) = L'(\vec q,\dot{\vec q},t,0)+\frac{\partial L'}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon+O(\varepsilon^2)$ $\qquad 0=\frac{\partial L'}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon = lin.\,část\left[L'(\vec q,\dot{\vec q},t,\varepsilon)-L(\vec q,\dot{\vec q},t)\right]$

Infinitesimální verze teorému:

Transfromace (Taylorův rozvoj do 1. řádu v ε)

$$q'_j = q'_j(\vec q,0)+\frac{\partial q'_j}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon+O(\varepsilon^2) = q_j+Y_j\cdot\varepsilon \qquad \underbrace{Y_j=\frac{\partial q'_j}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=Y_j(\vec q)}_{\text{vektorové pole tzv. generátor transformace}}$$

$$\dot q'_j = \frac{\hat d q'_j}{dt} = \dot q_j+\dot Y_j\cdot\varepsilon \quad \text{kde} \quad \dot Y_j=\frac{\partial Y_j}{\partial q_i}\dot q_i$$

Invariance L do 1. řádu v ε $\forall\vec q\ \forall\dot{\vec q}\ \forall t$

$$\frac{\partial L'}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial q_i}Y_i+\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\dot Y_i=0$$

$$\Downarrow$$

Veličina $I(\vec q,\dot{\vec q},t)=\sum_{k=1}^{\hat s}\frac{\partial L}{\partial\dot q_k}Y_k$ je I. P.

Př. rotace kolem osy x_3

$$x'_1=x_1\cos\varepsilon-x_2\sin\varepsilon$$
$$x'_2=x_1\sin\varepsilon+x_2\cos\varepsilon$$
$$x'_3=x_3$$

$$Y_1=\left(\frac{\partial x'_1}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=(-x_1\sin\varepsilon-x_2\cos\varepsilon)_{\varepsilon=0}=-x_2$$
$$Y_2=\left(\frac{\partial x'_2}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=(x_1\cos\varepsilon-x_2\sin\varepsilon)_{\varepsilon=0}=x_1$$
$$Y_3=\left(\frac{\partial x'_3}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=0$$

Infinitesimálně

$$x'_1=x_1-x_2\varepsilon$$
$$x'_2=x_2+x_1\varepsilon$$
$$x'_3=x_3$$

$$\vec x\,'=\begin{pmatrix}1&-\varepsilon&0\\\varepsilon&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\vec x = \mathbb 1\vec x+\varepsilon\overbrace{\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}^{\mathbb A}\vec x$$

Pozn. původní transformace $\vec x\,'=\exp(\varepsilon\mathbb A)\vec x$

$$\exp(\varepsilon\mathbb A)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varepsilon^k\mathbb A^k}{k!}=\begin{pmatrix}\cos\varepsilon&-\sin\varepsilon&0\\\sin\varepsilon&\cos\varepsilon&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Pokud

$$L(\vec x\,',\dot{\vec x}\,',t)=L(\vec x,\dot{\vec x},t)\Rightarrow I=\sum_{i=1}^{\hat s}\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}Y_i = p_iY_i = p_1(-x_2)+p_2x_1+0=L_3$$

(pro infinitesimální do 1. řádu v ε)