Základní principy mechaniky — jiné matematicky ekvivalentní formulace zákonů mechaniky

• **Diferenciální principy** — určují chování mechanické soustavy (trajektorii) lokálně v okolí daného bodu

1) **Princip virtuální práce** (Bernoulli 1708—1717) — statická rovnováha systému N částic:

<u>Statická rovnováha</u> (rovnovážná konfigurace) soustavy částic nastává pokud $\vec{X}(t) = \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0 = \begin{pmatrix} X_{0,1} \\ \vdots \\ X_{0,3N} \end{pmatrix}$ $\forall t$ konst. jsou souřadnice všech částic konstantní.

$$\Rightarrow \dot{\vec{X}}(t) = 0,\ \ddot{\vec{X}}(t) = 0\ \forall t \overset{2NZ}{\Rightarrow} \boxed{\vec{F}(\vec{X}_0, 0, t) = 0\ \forall t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{F}(\vec{X}_0, 0, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{uvažujeme pouze síly nezávislé na čase}$$

$$\Leftarrow\ \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0,\ \dot{\vec{X}}(t_0) = 0,\ m_i \ddot{X}_i(t_0) = F_i(\vec{X}_0, 0) = 0\ \forall i \in \widehat{3N} \Rightarrow m_i \dddot{X}_i(t_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} F_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0, 0)\underbrace{\dot{x}_j(t_0)}_{=0} + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j}(\vec{x}_0, 0)\underbrace{\ddot{x}_j(t_0)}_{=0} = 0$$

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(t_0) + \dot{\vec{X}}(t_0)(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\ddot{\vec{X}}(t_0)(t - t_0)^2 + \ldots = \vec{X}_0 \qquad \vdots$$

a) volných (2NZ)

$$0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \iff 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{X}\quad \forall\, \delta\vec{X} \in \mathbb{R}^{3N}$$

$\uparrow$ výslednice sil

(stačilo by pro lib. bázi $\mathbb{R}^{3N}$)
stačí libovolně malé — <u>infinitezimální</u>

Vektor $\delta\vec{X} = \vec{X} - \vec{X}_0$ je (virtuální) posunutí z rovnovážné polohy $\vec{X}_0$ do bodu $\vec{X}$

Pozn. práce $A = \int_\gamma \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ je integrál z diferenciální formy $\underset{\text{nemusí být exaktní}}{đ}A(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) \cdot \underbrace{d\vec{x}}_{\text{musí být malé (infinitezimální)}}$ po křivce γ (kdy $d\vec{x} = \gamma'(\ell)\, d\ell$)

<u>Virtuální práce</u> $\delta A(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}, 0) \cdot \delta\vec{X} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i$
je práce sil při virtuálních posunutích

Princip virtuální práce:
$\vec{X}_0$ je rovnovážná konfigurace $\iff \delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{X}_0, 0) \cdot \delta\vec{X} = 0\ \ \forall \delta\vec{X}$

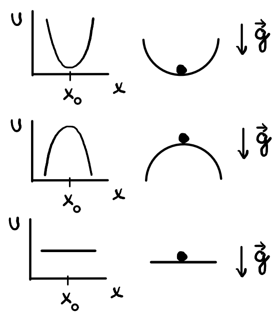
Pozn. Variace funkce $f = f(\vec{x}, t)$ (izochronní $\delta t = 0$)

$$f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i}_{=\delta f} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\delta x_i \delta x_j}_{=\delta^2 f} + \ldots = f(\vec{x}, t) + \delta f(\vec{x}, t) + \tfrac{1}{2}\delta^2 f(\vec{x}, t) + \ldots$$

$\delta f = \textit{lineární část}\, [f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) - f(\vec{x}, t)]$

Jsou—li všechny síly konzervativní
$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial \vec{x}}$ pak
$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{X} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{X}} \cdot \delta\vec{X} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i = -\delta U$$
a rovnovážné polohy $\vec{X}_0$ jsou stacionární body $\delta U(\vec{x}_0) = 0$ potenciální energie.

Typ polohy	$U(\vec{x}_0)$	např.
• stabilní	minimum	$\delta^2 U(\vec{X}_0) > 0$
• labilní	maximum	$\delta^2 U(\vec{X}_0) < 0$
• indiferentní	ostatní	"$(\delta^2 U = 0)$"



b) vázaných — podrobených holonomním skleronomním vazbám $f_k(\vec{x}) = 0\ \forall k \in \hat{r}$

(LR1D) $0 = \underset{\text{vtištěné síly (akční)}}{\vec{F}(\vec{x}_0, 0)} + \underset{\text{vazbové síly (reakční)}}{\vec{R}(\vec{x}_0, 0)} = \vec{F} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k \iff 0 = (\vec{F} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k) \cdot \delta\vec{X}\ \ \forall \delta\vec{X} \in \mathbb{R}^{3N}$

$f_k(\vec{x}_0) = 0\ \forall k \in \hat{r}$ $\qquad f_k(\vec{x}_0) = 0\ \forall k \in \hat{r}$

Rozložíme posunutí a síly do směru tečného a normálového ke konf. pr. M v bodě $\vec{x}_0$
$\delta\vec{x} = \delta\vec{x}^T + \delta\vec{x}^N \quad \vec{F} = \vec{F}^T + \vec{F}^N$

$$\iff 0 = (\vec{F}^T + \vec{F}^N + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k) \cdot (\delta\vec{x}^T + \delta\vec{x}^N) = \underbrace{(\vec{F}^T + \vec{F}^N)}_{\vec{F}} \cdot \delta\vec{x}^T + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \underbrace{\nabla f_k \cdot \delta\vec{x}^T}_{=0} + \underbrace{\vec{F}^T \cdot \delta\vec{x}^N}_{=0} + \underbrace{(\vec{F}^N + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k)}_{=0} \cdot \delta\vec{x}^N = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{X}^T$$

$f_k(\vec{X}_0) = 0\ \forall k \in \hat{r}$ $\qquad \forall \delta\vec{X}^T \in \mathbb{R}^{3N}$

zvolíme $-\lambda_k$ jako složky $\vec{F}^N$ v bázi $(\nabla f_1, \ldots, \nabla f_r)$ normálového prostoru k M v bodě $\vec{x}_0$

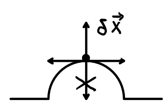
$\delta\vec{x}^T \cdot \nabla f_k(\vec{x}_0) = 0\ \ \forall k \in \hat{r}$

Princip virtuální práce

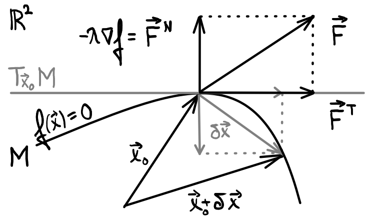
$$\boxed{\begin{array}{ll} \delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{X} = 0 & \forall \delta\vec{X} \in \mathbb{R}^{3N} \\ f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \hat{r} & \delta\vec{X} \cdot \nabla f_k(\vec{x}_0) = 0 \end{array}}$$

Soustava částic je v rovnovážné konfiguraci $\vec{x}_0 \in M \subset \mathbb{R}^{3N} \iff$ virtuální práce vtištěných sil je rovna nule $\delta A(\vec{x}_0) = 0 \iff$ práce vtištěných sil při virtuálních posunutích ve shodě s vazbami je nulová.

Pozn. uvažovali jsme pouze udržující vazby a jim odpovídající vratná posunutí ($\forall \delta\vec{X}\ \exists -\delta\vec{X}$)
pro neudržující vazby a nevratná posunutí je třeba princip modifikovat $\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{X} \leq 0$



Posunutí ve shodě s vazbou $f(\vec{x})=0$ $\quad \underbrace{f(\vec{x}_0+\delta\vec{x})}_{=0} = \underbrace{f(\vec{x}_0)}_{\doteq 0} + \underbrace{\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{x}}}_{\nabla f(\vec{x}_0)}\cdot \underbrace{\delta\vec{x}}_{\text{malé posunutí (infinitezimální)}} + \underbrace{O(|\delta\vec{x}|^2)}_{\doteq 0}$



Virtuální posunutí – myšlené okamžité infinitezimánlní posunutí ve shodě s vazbou

Jsou–li všechny vtištěné síly konzervativní $\vec{F}(\vec{x})=-\nabla U(\vec{x})$ pak $0=\delta A=(-\nabla U+\lambda_k\nabla f_k)\cdot\delta\vec{x} = -\delta(U-\underbrace{\lambda_k f_k}_{\text{"potenciální energie vazebných sil"}}) = -\delta\tilde{U}$

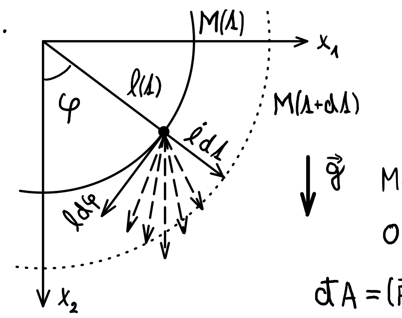
a úloha se redukuje na hledání vázaného extrému funkce $U(\vec{x})$ vzhledem k varietě M

t. j. $\delta\tilde{U}(\vec{x}_0)=0$ $\quad f_k(\vec{x}_0)=0$ $\forall k\in\hat{n}$ $\quad \delta^2\tilde{U}(\vec{x}_0)/_{T_{\vec{x}_0}M}$ >0 stabilní, <0 labilní, $=0$ indiferentní

Infinitezimální posunutí holonomní soustavy s rheonomními vazbami $f_k(\vec{x},t)=0$ $\forall k\in\hat{n}$ $\quad \vec{x}=\vec{X}(\vec{q},t)$

- možné (reálné) $\quad 0=df_k=\frac{\partial f_k}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_k}{\partial t}dt \quad dx_i=\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}dt \quad f(\vec{x}+d\vec{x},t+dt)=f(\vec{x},t)+\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\cdot d\vec{x}+\frac{\partial f}{\partial t}dt+\dots$
- virtuální $\quad 0=\delta f_k=\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\delta x_i \quad \delta x_i=\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_j}\delta q_j \quad f(\vec{x}+\delta\vec{x},t)=f(\vec{x},t)+\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\cdot\delta\vec{x}+\dots$
- skutečné $\quad 0=d\tilde{f}_k=\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\dot{\tilde{x}}_i+\frac{\partial f_k}{\partial t}\right)dt \quad d\tilde{x}_i=\left(\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_j}\dot{\tilde{q}}_j+\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}\right)dt$ lze získat z možného posunutí dosazením trajektorie $x_i=\tilde{x}_i(t)$, $q_j=\tilde{q}_j(t)$

Př.



$f(x_1,x_2,t)=x_1^2+x_2^2-l^2(t)=0$

$x_1=l(t)\sin\varphi$, $x_2=l(t)\cos\varphi$ $\quad \vec{F}=\begin{pmatrix}0\\mg\end{pmatrix}$

Virtuální posunutí a vitruální práce

$0=\delta f=2x_1\delta x_1+2x_2\delta x_2 \qquad \delta\vec{x}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\-\sin\varphi\end{pmatrix}l\delta\varphi$

$\delta A=(\vec{F}+\lambda\nabla f)\cdot\delta\vec{x}=\vec{F}\cdot\delta\vec{x}+\underbrace{\lambda\nabla f\cdot\delta\vec{x}}_{=0 \text{ virtuální práce vazebných sil}}=0\cdot\delta x_1+(mg)\delta x_2$

Možné posunutí a práce

$0=df=2x_1dx_1+2x_2dx_2-2l\dot{l}dt \qquad d\vec{x}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\-\sin\varphi\end{pmatrix}ld\varphi+\begin{pmatrix}\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}\dot{l}dt$

$dA=(\vec{F}+\lambda\nabla f)\cdot d\vec{x}=\vec{F}\cdot d\vec{x}+\lambda\nabla f\cdot d\vec{x}=0\cdot dx_1+mg\,dx_2+2\lambda x_1dx_1+2\lambda x_2dx_2=mg\,dx_2+\overbrace{\lambda 2l\dot{l}dt}^{\text{skutečná práce}}$

výkon vazebné síly $=-\lambda\frac{\partial f}{\partial t}$

Př. pro $l=konst.$ $0=\delta A=mg\delta x_2=-mg\underbrace{\sin\varphi}_{=0}\delta\varphi \Rightarrow \varphi=0,\pi$ je rovnovážná poloha

2) d'Alembertův princip – dynamická rovnováha soustavy částic podrobených vazbám $f_k(\vec{x},t)=0$ $\forall k\in\hat{n}$

(LR1D) $\quad \mathbb{M}\ddot{\vec{x}}=\vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)+\vec{R}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)=\vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\nabla f_k$

$\mathbb{M}=\mathrm{diag}(m_1,\dots,m_{3N}) \qquad f_k(\vec{x},t)=0$ $\forall k\in\hat{n}$

$\underbrace{\vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)}_{\text{vtištěné síly (akční)}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\nabla f_k}_{\text{vazbové síly (reakční)}}-\underbrace{\mathbb{M}\ddot{\vec{x}}}_{\text{setrvačné síly}}=0$ ← podmínka rovnováhy sil

Zavedení setrvačné síly $\vec{I}=-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}}$ umožňuje zobecnit princip virtuální práce ze statiky.

Rovnici opět přenásobíme $\delta\vec{x}=\delta\vec{x}^T+\delta\vec{x}^N$ kde $\delta\vec{x}^T\cdot\nabla f_k=0$ $\forall k\in\hat{n}$ $\quad \delta\vec{x}^N\in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\nabla f_1,\dots,\nabla f_n)$

$\underbrace{(\vec{F}-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})}_{\text{efektivní síly}}\cdot\delta\vec{x}^T+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\underbrace{\nabla f_k\cdot\delta\vec{x}^T}_{\doteq 0}+\underbrace{(\vec{F}-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})^T\cdot\delta\vec{x}^N}_{\doteq 0}+\underbrace{\left[(\vec{F}-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})^N+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\nabla f_k\right]\cdot\delta\vec{x}^N}_{=0 \text{ volbou } \lambda_k}=0 \quad \forall\delta\vec{x}^T$

Virtuální práce efektivních sil

$\delta A_{ef}(\vec{x},\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}},t)=(\vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})\cdot\delta\vec{x}$

d'Alembertův princip (1743)

$$\boxed{\begin{aligned}&\delta A_{ef}=(\vec{F}-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})\cdot\delta\vec{x}=0 \quad \forall\delta\vec{x}\in\mathbb{R}^{3N}\\ &f_k(\vec{x},t)=0 \quad \forall k\in\hat{n} \quad \delta\vec{x}\cdot\nabla f_k=0\end{aligned}}$$

Pohyb mechanické soustavy se děje v dynamické rovnováze efektivních sil t. j. tak, že virtuální práce efektivních sil je v každém okamžiku rovna nule $\delta A_{ef}(\vec{x}(t),\dot{\vec{x}}(t),\ddot{\vec{x}}(t),t)=0$.

Pozn: výhoda – není třeba pracovat se silama ideálních holonomních vazeb např. držících pohromadě tuhé těleso složené z N hm. bodů: posunutí jsou pouze translace a rotace $\vec{x}_\alpha=\vec{r}+\vec{r}_\alpha$ $|\vec{r}_\alpha|=konst$ $\quad \delta\vec{x}_\alpha=\underbrace{\delta\vec{r}+\delta\vec{\varphi}}_{\text{jsou nezávislé}}\times\vec{r}_\alpha$

$\delta A_{ef}=\sum_{\alpha=1}^{N}(\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha)\cdot\delta\vec{x}_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{N}(\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha)\cdot(\delta\vec{r}+\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_\alpha)=\underbrace{\left[\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha\right]}_{=0}\cdot\delta\vec{r}+\underbrace{\left[\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{r}_\alpha\times(\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha)\right]}_{=0}\cdot\delta\vec{\varphi}=0 \quad \forall\delta\vec{r}\ \forall\delta\vec{\varphi}$

$0=\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha=\vec{F}-\dot{\vec{P}} \qquad 0=\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{x}_\alpha\times(\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha)-\vec{r}\times\overbrace{\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha\right)}^{=0}=\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{x}_\alpha\times\vec{F}_\alpha-\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{x}_\alpha\times m_\alpha\dot{\vec{x}}_\alpha\right)^{\cdot}=\vec{N}-\dot{\vec{L}}$