Řešitelné modely mechaniky

1) Problém dvou těles - izolovaná soustava dvou hmotných bodů

Budeme-li předpokládat, že síly kterými na sebe tyto body působí nezávisí na jejich rychlostech, pak z omezení daných Galieiho principem relativity plyne, že tyto síly jsou konzervativní.

Galileiho princip relativity - vyžaduje invarianci pohybových rovnic vzhledem k grupě Galileiho transforací.

Galileiho transformace $t_0 \in \mathbb{R}$ $\vec{V}, \vec{X}_0 \in \mathbb{R}^3$ $\mathbb{S} \in SO(3)$

$\tilde{t} = t - t_0$ $\qquad t = \tilde{t} + t_0$

$\vec{\tilde{x}} = \mathbb{S}^T(\vec{x} - \vec{V}t - \vec{X}_0)$ $\qquad \vec{x} = \mathbb{S}\vec{\tilde{x}} + \vec{V}t + \vec{X}_0$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbb{S}\vec{\tilde{x}} + \vec{V}t + \vec{X}_0) = \mathbb{S}\frac{d\vec{\tilde{x}}}{dt} + \vec{V} = \mathbb{S}\frac{d\vec{\tilde{x}}}{d\tilde{t}}\underbrace{\frac{d\tilde{t}}{dt}}_{1} + \vec{V}$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \mathbb{S}\frac{d^2\vec{\tilde{x}}}{d\tilde{t}^2}$$

Pohybové rovnice

$$m_\alpha \ddot{\vec{x}}_\alpha = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, t) \quad \alpha, \beta = 1,2 \quad \rightarrow \quad m_\alpha \mathbb{S}\ddot{\vec{\tilde{x}}}_\alpha = \mathbb{S}\vec{\tilde{F}}_{\alpha\beta}(\vec{\tilde{x}}_\alpha, \vec{\tilde{x}}_\beta, \tilde{t}) \quad /\cdot \mathbb{S}^T$$

$$m_\alpha \ddot{\vec{\tilde{x}}}_\alpha = \vec{\tilde{F}}_{\alpha\beta}(\vec{\tilde{x}}_\alpha, \vec{\tilde{x}}_\beta, \tilde{t}) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{\tilde{x}}_\alpha, \vec{\tilde{x}}_\beta, \tilde{t}) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{S}^T\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, t) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\mathbb{S}^T(\vec{x}_\alpha - \vec{V}t - \vec{X}_0), \mathbb{S}^T(\vec{x}_\beta - \vec{V}t - \vec{X}_0), t - t_0)$$

Invariance - rovnice se při transformaci nemá měnit (pouze přibydou vlnky u proměnných)

Symetrie vůči Galileiho transformaci $\quad \forall \mathbb{S} \in SO(3) \quad \forall \vec{V}, \vec{X}_0 \in \mathbb{R}^3 \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$

Protože síly nezávisí na rychlostech stačí vzít $\vec{V} = 0$

a) Translace v čase

$\mathbb{S} = \mathbb{1}$ $\quad \vec{X}_0 = 0$

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, t) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, t + t_0) \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\alpha\beta} = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta)$$

b) Translace v prostoru

$\mathbb{S} = \mathbb{1}$

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha - \vec{X}_0, \vec{x}_\beta - \vec{X}_0) \quad \forall \vec{X}_0 \in \mathbb{R}^3$$ Přejdeme k novým souřadnicím

$\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta$

$\vec{u} = \vec{x}_\alpha + \vec{x}_\beta$

$$\vec{G}(\vec{r}_{\alpha\beta}, \vec{u}) = \vec{G}(\vec{r}_{\alpha\beta}, \vec{u} - 2\vec{X}_0) \quad \forall \vec{X}_0 \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{G} = \vec{G}(\vec{r}_{\alpha\beta}) \Rightarrow \vec{F}_{\alpha\beta} = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta)$$

c) Rotace

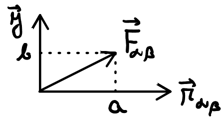
$\vec{X}_0 = 0$

$$\mathbb{S}^T\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\mathbb{S}^T\vec{r}_{\alpha\beta}) \quad \forall \mathbb{S} \in SO(3) \qquad |\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta})| = |\mathbb{S}\vec{F}_{\alpha\beta}(\mathbb{S}^T\vec{r}_{\alpha\beta})| = |\vec{F}_{\alpha\beta}(\mathbb{S}^T\vec{r}_{\alpha\beta})| \quad \forall \mathbb{S} \in SO(3)$$

velikost síly tedy nezávisí na směru $\vec{r}_{\alpha\beta}$ ale pouze na velikosti $\vec{r}_{\alpha\beta}$ $\qquad |\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta})| = f_{\alpha\beta}(|\vec{r}_{\alpha\beta}|)$

označme $\mathbb{S}(\varphi) \in SO(3)$ matici rotace o úhel φ kolem osy $\vec{r}_{\alpha\beta}$ pak $\mathbb{S}(\varphi)\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_{\alpha\beta} = \mathbb{S}^T(\varphi)\vec{r}_{\alpha\beta}$ $\quad \forall \varphi$

rozložíme sílu $\vec{F}_{\alpha\beta}$ do směru $\vec{r}_{\alpha\beta}$ a směru kolmého na $\vec{r}_{\alpha\beta}$ pak



$$a\vec{r}_{\alpha\beta} + b\vec{y} = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = \mathbb{S}(\varphi)\vec{F}_{\alpha\beta}(\mathbb{S}^T(\varphi)\vec{r}_{\alpha\beta}) = \mathbb{S}(\varphi)\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = a\mathbb{S}(\varphi)\vec{r}_{\alpha\beta} + b\mathbb{S}(\varphi)\vec{y} = a\vec{r}_{\alpha\beta} + b\mathbb{S}(\varphi)\vec{y}$$

$$b(\mathbb{1} - \mathbb{S}(\varphi))\vec{y} = 0 \quad \forall \varphi \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = a\vec{r}_{\alpha\beta} = \pm f_{\alpha\beta}(|\vec{r}_{\alpha\beta}|)\frac{\vec{r}_{\alpha\beta}}{|\vec{r}_{\alpha\beta}|}$$ je izotropní (nezávisí na směru) a centrální (míří ve směru spojnice)

Centrální izotropní síly $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$ jsou potenciální

$$(\mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r}))_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial F_k(\vec{r})}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial f(r)x_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial x_j}x_k + f(r)\delta_{jk}\right) = \varepsilon_{ijk}\left(f'(r)\frac{x_j}{r}x_k + f(r)\delta_{jk}\right) = 0 \Rightarrow \exists U = U(r)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,U(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} \qquad F_i(\vec{r}) = -\frac{\partial U(r)}{\partial x_i} = -U'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = -U'(r)\frac{x_i}{r} \Rightarrow U'_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = \mp f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})$$

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = -\frac{\partial U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})}{\partial \vec{r}_{\alpha\beta}} = -U'_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})\cdot\frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial \vec{r}_{\alpha\beta}} = -U'_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})\cdot\frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial \vec{x}_\alpha} = -\frac{\partial U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})}{\partial \vec{x}_\alpha}$$

3. Newtonův zákon

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = -\vec{F}_{\beta\alpha}(\vec{r}_{\beta\alpha}) \Rightarrow f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = f_{\beta\alpha}(r_{\beta\alpha}) \Rightarrow U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = U_{\beta\alpha}(r_{\alpha\beta})$$

Pozn. Pro jednočásticový systém plyne z Galileovské invariance pohybových rovnic nulovost síly. Pohybové rovnice musí být invariantní vůči Galileiho transformacem pouze pokud popisují izolovanou mechanickou soustavu.

Izolovanou soustavu dvou těles jejichž vzájemné silové působení nezávisí na rychlostech a splňuje 3. NZ můžeme popsat Lagrangeovou funkcí:

$$L(\vec{X}_1,\vec{X}_2,\dot{\vec{X}}_1,\dot{\vec{X}}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{X}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{X}}_2^2 - U(|\vec{X}_1-\vec{X}_2|)$$

$$\vec{P} = (m_1\vec{X}_1 + m_2\vec{X}_2)^{\dot{}} = M\dot{\vec{R}}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{X}_1 + m_2\vec{X}_2}{m_1+m_2} \qquad M = m_1+m_2$$

$$\dot{\vec{R}} = \frac{\vec{P}}{M} = \text{Konst} \quad \Big/ \int d\lambda \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \frac{\vec{P}}{M}\lambda + \vec{R}_0$$

Integrály pohybu

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{X}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{X}}_2^2 + U(|\vec{X}_1-\vec{X}_2|)$$

symetrie Teorém Noetherové $i=1,2$

$$\vec{X}_i' = \vec{X}_i + \varepsilon\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m_1\dot{\vec{X}}_1 + m_2\dot{\vec{X}}_2$$

$$\vec{X}_i' = \mathbb{S}(\varepsilon)\vec{X}_i \Rightarrow \vec{L} = \vec{X}_1\times m_1\dot{\vec{X}}_1 - \vec{X}_2\times m_2\dot{\vec{X}}_2$$

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{X}_1 + m_2\vec{X}_2 - \vec{P}\lambda\right)$$

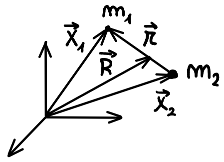
rovnoměrný přímočarý pohyb hmotného středu

Celkem 10 nezávislých integrálů pohybu

Přejdeme k souřadnicím $\vec{X}_1,\vec{X}_2 \longrightarrow \vec{R},\vec{r}$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{X}_1 + m_2\vec{X}_2}{m_1+m_2} \qquad \vec{X}_1 = \vec{R} + \frac{m_2\vec{r}}{M}$$

$$\vec{r} = \vec{X}_1 - \vec{X}_2 \qquad \vec{X}_2 = \vec{R} - \frac{m_1\vec{r}}{M}$$



$$\hat{L}(\vec{R},\vec{r},\dot{\vec{R}},\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m_1\Big(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\Big)^2 + \frac{1}{2}m_2\Big(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\Big)^2 - U(|\vec{r}|) = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_1m_2}{M}}_{\text{redukovaná hmotnost } \mu}\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

Pohybové rovnice

$$M\ddot{\vec{R}} = 0$$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

Cyklické souřadnice $\vec{R}$ $\qquad \vec{P} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\vec{R}}} = M\dot{\vec{R}}$

Routhova funkce

$$\tilde{L} = \hat{L} - \dot{\vec{R}}\cdot\vec{P} = \frac{1}{2}\frac{\vec{P}^2}{M} + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|) - \frac{\vec{P}^2}{M} = \overbrace{-\frac{1}{2}\frac{\vec{P}^2}{M}}^{\text{Konstanta (lze vypustit)}} + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

2) Pohyb částice ve sféricky symetrickém potenciálovém poli

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

Integrály pohybu $\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + U(|\vec{r}|)$

$$\vec{r}' = \underbrace{\mathbb{S}(\varepsilon)}_{\in SO(3)}\vec{r} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r}\times\mu\dot{\vec{r}} = \text{Konst}$$

$$\Downarrow \quad \vec{r}\cdot\vec{L} = r_iL_i = 0$$

pohyb probíhá v rovině jdoucí počátkem a kolmé k $\vec{L}$

přejdeme k sférickým souřadnicím pro které osa z míří ve směru $\vec{L}$ pak $\Theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \dot{\Theta} = 0$

$$\hat{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2 + r^2\sin^2\Theta\,\dot{\varphi}^2\right) - U(r) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r)$$

Cyklická souřadnice φ $\quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2\dot{\varphi} = L_3 = \ell = \text{Konst} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\ell}{\mu r^2} \quad \varphi(\lambda) = \int\frac{\ell}{\mu r^2}d\lambda + \varphi_0$

Routhova funkce

$$\tilde{L} = \hat{L} - \dot{\varphi}p_\varphi = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\frac{\ell^2}{\mu^2r^4}\right) - U(r) - \frac{\ell^2}{\mu r^2} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - U(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U_{ef}(r)$$

Efektivní potenciál

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$$

3) Pohyb konzervativní soustavy s jedním stupněm volnosti

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}T(q)\dot{q}^2 - U(q)$$

Integrál pohybu $\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow E = T + U = \frac{1}{2}T(q)\dot{q}^2 + U(q) = \text{Konst}$

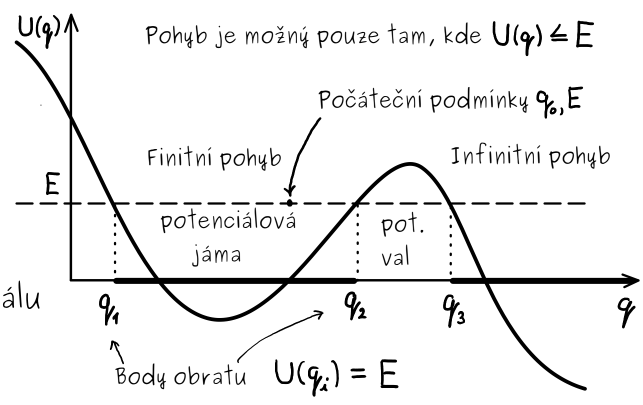
$$\dot{q}^2 = \frac{2(E-U(q))}{T(q)} \Rightarrow \dot{q} = \pm\sqrt{\frac{2(E-U(q))}{T(q)}}$$

znaménko určuje směr pohybu

$$\pm 1 = \sqrt{\frac{T(q)}{2(E-U(q))}}\,\dot{q} \quad \Big/ \int d\lambda$$

$$\pm\lambda = \int\sqrt{\frac{T(q)}{2(E-U(q))}}\,dq + \lambda_0$$

řešení zapsané pomocí integrálu tzv. řešení v kvadraturách



Pozn. řešení původního problému dvou těles závisí celkem na 12 integračních konstantách, které jsme použili v tomto pořadí $\vec{P}, \vec{R}_0; \vec{L} \leftrightarrow (\Theta, \dot{\Theta}, \ell), \varphi_0; E, \lambda_0$