Tenzorový počet

Tenzory umožňují zapsat zákony fyziky v tzv. kovariantním tvaru ve kterém se všechny členy rovnice transformují stejným způsobem. Rovnice, kde na obou stranách stojí tenzor stejného typu, bude mít stejný tvar ve všech inerciálních kartézských vztažných soustavách. Newtonovská mechanika $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$. Relativistická mechanika používá zápis pomocí čtyřvektorů.

Buď V vektorový prostor konečné dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{R}$ s bázemi B a $\widetilde{B}$

$$B = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \qquad \boxed{\widetilde{\boldsymbol{e}}_j = \boldsymbol{e}_i S^i_j} \qquad \boldsymbol{e}_k = \widetilde{\boldsymbol{e}}_j (S^{-1})^j_k \qquad \widetilde{B} = (\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{e}}_n)$$

$S = (S^i_j)$ ... matice přechodu od B k $\widetilde{B}$

$V^* = \{\boldsymbol{\alpha} : V \to \mathbb{R} \,|\, \boldsymbol{\alpha} \text{ je lineární}\}$ ... duální vektorový prostor k V

$B^* = (\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n)$ ... duální báze k B ve V^* tj. $\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j, \ \forall i, j \in \widehat{n}$

$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{e}_k) = \alpha_i \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_k) = \alpha_i \delta^i_k = \alpha_k$ ... složky funkcionálu v duální bázi

$\widetilde{\boldsymbol{e}}^i = \widetilde{\boldsymbol{e}}^i(\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}^k = \widetilde{\boldsymbol{e}}^i(\widetilde{\boldsymbol{e}}_j (S^{-1})^j_k)\boldsymbol{e}^k = (S^{-1})^j_k \widetilde{\boldsymbol{e}}^i(\widetilde{\boldsymbol{e}}_j)\boldsymbol{e}^k = (S^{-1})^j_k \delta^i_j \boldsymbol{e}^k = (S^{-1})^i_k \boldsymbol{e}^k$

Vektor

$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = \widetilde{v}^j \widetilde{\boldsymbol{e}}_j = \widetilde{v}^j \boldsymbol{e}_i S^i_j$

$v^i = S^i_j \widetilde{v}^j$

$\boxed{\widetilde{v}^k = (S^{-1})^k_i v^i}$ **kontravariantní**

Kovektor (funkcionál, 1-forma)

$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i \boldsymbol{e}^i = \widetilde{\alpha}_j \widetilde{\boldsymbol{e}}^j$

$\widetilde{\alpha}_j = \boldsymbol{\alpha}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_j) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{e}_i S^i_j) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{e}_i) S^i_j = \alpha_i S^i_j$

$\boxed{\widetilde{\alpha}_j = \alpha_i S^i_j}$ **kovariantní**

Př. $\quad \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v}) = \alpha_i \boldsymbol{e}^i(v^j \boldsymbol{e}_j) = \alpha_i v^j \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j) = \alpha_i v^j \delta^i_j = \alpha_i v^i =: \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{v} \rangle$

Pozn. Vektorové prostory V a V^* mají stejnou konečnou dimenzi a jsou tedy izomorfní. Žádný z jejich izomorfizmů však není nijak význačný (kanonický) - "nezávislý na volbě báze" a proto je nelze bez dodatečné struktury definované na V jednoznačně (kanonicky) ztotožnit. Prostory V a $(V^*)^*$ již ztotožnit lze, neboť mezi nimi existuje *kanonický izomorfizmus*:

$f : V \to (V^*)^*$ definovaný vztahem $f(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v})$.

Ztotožníme $\boldsymbol{v} \equiv f(\boldsymbol{v})$, pak $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\alpha}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$

Obdobně lze ztotožňovat i duály vyšších řádů $V^* \cong V^{***}$, $V^{**} \cong V^{****}$.

Celkem tedy máme k dispozici následující objekty:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha} \in V^*, \ \boldsymbol{\alpha} : V \to \mathbb{R}, \ \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{v} \rangle \\ \boldsymbol{v} \in V, \ \ \boldsymbol{v} : V^* \to \mathbb{R}, \ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\alpha}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \\ a \in \mathbb{R}, \ a : \emptyset \mapsto a \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{Všechno jsou to lineární zobrazení.}$$

Tenzor

Tenzorem typu $\binom{p}{q}$ nad V (kontravariantním řádu p a kovariantním řádu q) nazýváme každé multilineární (lineární v každé složce) zobrazení

$$T : V^p_q = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{\text{q–krát}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{\text{p–krát}} \to \mathbb{R}.$$

Řádem tenzoru nazýváme číslo $p + q$.

Složky tenzoru

Tenzor je lineární zobrazení a proto je jednoznačně určen svými hodnotami na bázi V^p_q, které nazýváme složky tenzoru T vzhledem k bázi B

$$T^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q} := T(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_q}; \boldsymbol{e}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{j_p}).$$

Transformace složek

$$\begin{aligned} \widetilde{T}^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q} &= T(\widetilde{\boldsymbol{e}}_{i_1}, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{e}}_{i_q}; \widetilde{\boldsymbol{e}}^{j_1}, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{e}}^{j_p}) = \\ &= T(\boldsymbol{e}_{k_1} S^{k_1}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_q} S^{k_q}_{i_q}; (S^{-1})^{j_1}_{l_1} \boldsymbol{e}^{l_1}, \ldots, (S^{-1})^{j_p}_{l_p} \boldsymbol{e}^{l_p}) = \\ &= (S^{-1})^{j_1}_{l_1} \ldots (S^{-1})^{j_p}_{l_p} T(\boldsymbol{e}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_q}; \boldsymbol{e}^{l_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{l_p}) S^{k_1}_{i_1} \ldots S^{k_q}_{i_q} = \\ &= (S^{-1})^{j_1}_{l_1} \ldots (S^{-1})^{j_p}_{l_p} T^{l_1 \ldots l_p}_{k_1 \ldots k_q} S^{k_1}_{i_1} \ldots S^{k_q}_{i_q} \end{aligned}$$

Sčítání tenzorů a násobení číslem

$(T + aR)(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_q; \boldsymbol{\alpha}^1, ..., \boldsymbol{\alpha}^p) = T(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_q; \boldsymbol{\alpha}^1, ..., \boldsymbol{\alpha}^p) + aR(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_q; \boldsymbol{\alpha}^1, ..., \boldsymbol{\alpha}^p)$

Ve složkách $\qquad (T + aR)^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q} = T^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q} + aR^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q} \qquad a \in \mathbb{R}$

Množina všech tenzorů typu $\binom{p}{q}$ tvoří vektorový pr. $T^p_q(V)$ dimenze n^{p+q}.

$T^0_0(V) = \mathbb{R} \qquad T^1_0(V) = V^{**} \equiv V \qquad T^0_1(V) = V^*$

$T^1_1(V) \cong Hom(V, V) \qquad T^0_2(V)$... bilineární formy na V

Tenzorový součin*

je zobrazení $\otimes : T^p_q(V) \times T^r_s(V) \to T^{p+r}_{q+s}(V)$ definované předpisem

$$(T \otimes R)(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{q+s}; \boldsymbol{\alpha}^1, \dots, \boldsymbol{\alpha}^{p+r}) := T(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_q; \boldsymbol{\alpha}^1, \dots, \boldsymbol{\alpha}^p) \cdot R(\boldsymbol{v}_{q+1}, \dots, \boldsymbol{v}_{q+s}; \boldsymbol{\alpha}^{p+1}, \dots, \boldsymbol{\alpha}^{p+r}).$$

Ve složkách $\qquad (T \otimes R)^{j_1 \dots j_{p+r}}_{i_1 \dots i_{q+s}} = T^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q} \cdot R^{j_{p+1} \dots j_{p+s}}_{i_{q+1} \dots i_{q+s}}$

Tenzorový součin je bilineární, asociativní a nekomutativní.

$\{\boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}^{i_q} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{j_p} | i_k, j_l \in \widehat{n}, \forall k \in \widehat{q}, \forall l \in \widehat{p}\}$ je báze pr. $T^p_q(V)$.

Pozn.* Vektorový prostor $T(V) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} T^r_s(V)$ tvoří spolu s tenzorovým součinem $\otimes : T(V) \times T(V) \to T(V)$ (dodefinovaným pomocí bilinearity) asociativní algebru nazývanou tenzorová algebra vektorového prostoru V.
Př. Vnější součin pro 1–formy: $\boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}^j = \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j - \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}^i$.

Kontrakce tenzorů*

Je zobrazení $C^b_a : T^p_q(V) \to T^{p-1}_{q-1}(V)$ určené výběrem $a \in \widehat{q}, b \in \widehat{p}$ a definované předpisem $T \mapsto C^b_a T := \sum T(\ldots, \underbrace{\boldsymbol{e}_k}_{a}, \ldots; \ldots, \underbrace{\boldsymbol{e}^k}_{b}, \ldots)$.

Ve složkách je výsledek $\delta^{i_a}_{j_b} T^{j_1 \dots j_b \dots j_p}_{i_1 \dots i_a \dots i_p} = T^{j_1 \dots i_a \dots j_p}_{i_1 \dots i_a \dots i_p}$

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\alpha}) &= T(v^k \boldsymbol{e}_k; \alpha_l \boldsymbol{e}^l) = v^k \alpha_l T(\boldsymbol{e}_k; \boldsymbol{e}^l) = T^j_i \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j (v^k \boldsymbol{e}_k; \alpha_l \boldsymbol{e}^l) = \\ &= T^j_i v^k \alpha_l \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j (\boldsymbol{e}_k; \boldsymbol{e}^l) = T^j_i v^k \alpha_l \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_k) \cdot \boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{e}^l) = T^j_i v^k \alpha_l \delta^i_k \delta^l_j = \\ &= T^l_k v^k \alpha_l = T \otimes \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l; \boldsymbol{e}^l, \boldsymbol{e}^k) = C^1_1 C^2_1 (T \otimes \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{\alpha}) \end{aligned}$$

Invariantní tenzory

Buď $G \subset GL(n)$ podgrupa. Tenzor T se nazývá G–invariantní, pokud se jeho složky nemění při změně báze $\widetilde{\boldsymbol{e}}_j = \boldsymbol{e}_i S^i_j$, $\forall S \in G$.

- tenzory nultého řádu (skaláry) $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v}) = \alpha_i v^i$, $\quad T^i_i = \delta^i_j T^j_i$
  (vyčíslení tenzoru na vektorech a kovektorech je nezávislé na bázi)
- jednotkový tenzor $\hat{1} \in T^1_1(V)$ definovaný předpisem $\hat{1}(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v})$
  $\hat{1} = \delta^i_j \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}_i = \sum \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_i$, $\qquad C\hat{1} = n = \dim V$
  –jediný (až na násobky) invariantní tenzor druhého řádu,
- mocniny jednotkového tenzoru $\hat{1} \otimes \hat{1}$

Místo G–invariantní se říká invariantní, je–li zřejmé o jakou grupu G jde (zde $G = GL(n)$).

Pokud je na V definovaná vhodná dodatečná struktura (nedegenerovaná bilineární forma například skalární součin nebo symplektická forma) lze ji využít k definici izomorfizmu $V \to V^*$ a tyto prostory ztotožnit.

(Pseudo)metrický tenzor

Metrický tenzor na V je každý symetrický nedegenerovaný tenzor typu $\binom{0}{2}$.

$g \in T^0_2(V) \qquad g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = g(v^i \boldsymbol{e}_i, w^j \boldsymbol{e}_j) = v^i w^j g(e_i, e_j) = v^i g_{ij} w^j = \vec{v}^T (g_{ij}) \vec{w}$

- symetrický $g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = g(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \qquad g_{ij} = g_{ji}$
- nedegenerovaný $g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0, \ \forall \boldsymbol{w} \in V \ \Rightarrow \boldsymbol{v} = 0 \qquad \det(g_{ij}) \neq 0$

Pro každou symetrickou formu $B \in T^0_2(V)$ existuje báze (polární báze, ortonormální báze) ve které má její matice tvar
$(B_{ij}) = (B(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)) = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{s}, \underbrace{0, \dots, 0}_{u})$.
Nedegenerovanost B znamená $u = 0$.
Kanonický tvar metrického tenzoru $(g_{ij}) = (\eta_{ij}) = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{s})$.
Je–li $s > 0$ je g tzv. pseudometrický tenzor.
Je–li $r = n$ je g skalární součin.

Zvedání a snižování indexů

Buď (g^{ij}) matice inverzní k matici (g_{ij}) pak platí

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k, \qquad g^{ij} = g^{ji}, \qquad \det(g^{ij}) \neq 0$$

a $g^{-1} = g^{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \in T^2_0(V)$ je nedegenerovaný symetrický tenzor typu $\binom{2}{0}$.

Pomocí g a g^{-1} definujeme (kanonické) izomorfizmy mezi V a V^*

- snižování indexů $\flat_g : V \to V^* \qquad \boldsymbol{v} \mapsto \flat_g(\boldsymbol{v}) = g(\,.\,, \boldsymbol{v})$
  $$v_i := (\flat_g(\boldsymbol{v}))_i = g_{ij} v^j$$
- zvedání indexů $\sharp_g : V^* \to V \qquad \boldsymbol{\alpha} \mapsto \sharp_g(\boldsymbol{\alpha}) = g^{-1}(\,.\,, \boldsymbol{\alpha})$
  $$\alpha^i := (\sharp_g(\boldsymbol{\alpha}))^i = g^{ij} \alpha_j$$

v_i se nazývají kovariantní a v^i kontravariantní složky vektoru $\boldsymbol{v}$.
Je-li diagonála g pozitivně definitní ($r = n$) pak $v^i = v_i$ (v O.N. bázi).

Pro tenzory $T^i_j = g^{ik} T_{kj} = g_{jk} T^{ik}$

Pro tenzory vyšších řádů obdobně $T_{n.jl}^{\ .i} = g^{ik} T_{nkjl}$.

Newtonovská mechanika

- euklidovský afinní prostor $E(3) = (\mathbb{R}^3, g_{ij})$
- Metrický tenzor v O.N. bázi $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (g^{ij})$
- čas je nezávislý všude stejně plynoucí parametr
- vektor $\vec{x} = (x_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x^i)$
- Einsteinova sumace přes dvakrát opakující se Latinské indexy od 1 do 3
- Skalární součin

  $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g_{ij} x_i y_j = \vec{x}^T (g_{ij}) \vec{y} \overset{\text{O.N.B.}}{=} \vec{x} \cdot \vec{y}$
- Kvadrát velikosti (polára skalárního součinu)

  $(\Delta l)^2 = g_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \overset{\text{O.N.B.}}{=} (\Delta x_i)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$
- Grupy symetrii prostoru $E(3)$
  - Ortogonální grupa $O(3)$ – zrcadlení a rotace zaměření $\vec{E}(3)$
  - Euklidova grupa $E_3 \cong \mathbb{R}^3 \rtimes O(3)$ – zrcadlení, rotace a translace
- Grupy symetrii prostoru rozšířeného o časovou osu $\mathbb{R} \times E(3)$
  - Homogenní Galileiho grupa $\mathbb{R}^3 \rtimes O(3)$ – homogenní Galileiho tr.
  - Galileiho grupa $Gal(3) \cong \mathbb{R}^4 \rtimes (\mathbb{R}^3 \rtimes O(3))$ – translace a hom. G. tr.

$$\begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T & t_0 \\ \vec{V} & S & \vec{x}_0 \\ 0 & \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + t_0 \\ \vec{V} t + S\vec{x} + \vec{x}_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Relativistická mechanika

- Minkowského prostoročas pseudo-euklidovský afinní $E(1,3) = (\mathbb{R}^4, g_{\mu\nu})$
- Metrický tenzor v O.N. bázi $(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu})$
- čas je "jen jedna ze součadnic"
- čtyřvektor $\underset{\text{kontravariantní}}{(x^\mu)} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underset{\text{kovariantní}}{(x_\mu)} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$
- Einsteinova sumace přes shodný horní a dolní Řecký index od 0 do 3
- Pseudo–skalární součin

  $g(X, Y) = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = x_\nu y^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = (x^\mu)^T (g_{\mu\nu})(y^\nu)$

  $\overset{\text{O.N.B.}}{=} x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$
- Kvadrát intervalu

  $(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \Delta x^\mu \Delta x_\nu$

  $\overset{\text{O.N.B.}}{=} c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$
- Grupy symetrii prostoru $E(1,3)$
  - Lorentzova grupa $O(1,3)$
    – lineární izometrie zaměření Minkowského prostoročasu
    – zrcadlení, rotace a boosty
  - Poincarého grupa $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes O(1,3)$ (nehomogenní Lorentzova grupa)
    – afinní izometrie Minkowského prostoročasu
    – zrcadlení, rotace, boosty a translace