Lorentzova Grupa $O(1,3)$

Lorentzovy transformace jsou symetrie zaměření Minkowského prostoročasu $E(1,3)$, tedy regulární lineární zobrazení zachovávající metrický tenzor $g_{\mu\nu}$.
Transformace

$$x'^{\mu} = \alpha^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \qquad A = (\alpha^{\mu}{}_{\nu}) = S^{-1} \qquad G = (g_{\mu\nu}) \overset{\text{ON.B.}}{=} \text{diag}(1, \text{-}1, \text{-}1, \text{-}1)$$

Invariance $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} \overset{\downarrow}{=} g'_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} S^{\rho}_{\mu} S^{\sigma}_{\nu} \qquad \forall \mu,\nu = 0,1,2,3 \quad /\alpha^{\mu}{}_{\kappa}\alpha^{\nu}{}_{\eta} \qquad \boxed{g_{\kappa\eta} = g_{\mu\nu}\alpha^{\mu}{}_{\kappa}\alpha^{\nu}{}_{\eta}}$$

Aktivně (zachovávají interval) $\forall X \in \vec{E}(1,3)$ Relace ortogonality

$$X^T G X = s^2 \overset{\downarrow}{=} s'^2 = X'^T G X' = (AX)^T G (AX) = X^T A^T G A X \qquad \boxed{G = A^T G A}$$

Pseudo-ortogonální grupa $O(1,3) = \{A \in \mathbb{R}^{4,4} \mid A^T G A = G\}$

Je podgrupa $GL(4)$ s operací součin matic a jednotkou $\mathbb{1}_4 = \text{diag}(1,1,1,1)$.

$$A, B \in O(1,3) \Rightarrow (AB)^T G (AB) = B^T (A^T G A) B = B^T G B = G$$

inverzní prvek $A^{-1} = G^{-1} A^T G = G A^T G$ $\qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Struktura $O(1,3)$

$O(1,3)$ má čtyři komponenty souvislosti (maximální souvislé podmnožiny)

$$\det G = \det A^T \det G \det A = \det G (\det A)^2 \Rightarrow (\det A)^2 = 1$$

- $\det A = 1$ vlastní Lorentzovy transformace – podgrupa $SO(1,3)$
- $\det A = -1$ nevlastní L.T.

$$g_{00} = g_{\mu\nu}\alpha^{\mu}{}_{0}\alpha^{\nu}{}_{0} = (\alpha^{0}{}_{0})^2 - (\alpha^{1}{}_{0})^2 - (\alpha^{2}{}_{0})^2 - (\alpha^{3}{}_{0})^2$$

$$(\alpha^{0}{}_{0})^2 = 1 + (\alpha^{1}{}_{0})^2 + (\alpha^{2}{}_{0})^2 + (\alpha^{3}{}_{0})^2 \geq 1$$

- $\alpha^{0}{}_{0} \geq 1$ ortochronní L.T. (nemění směr času) – podgrupa $O^{+}(1,3)$
- $\alpha^{0}{}_{0} \leq 1$ neortochronní L.T.

Vlastní ortochronní Lorentzova grupa $SO^{+}(1,3)$

je komponenta souvislosti $O(1,3)$ obsahující jednotku ($\det A = 1, \alpha^{0}{}_{0} \geq 1$)

je normální podgrupa v $O(1,3)$ $\qquad O(1,3)/SO^{+}(1,3) = \{\mathbb{1}, P, T, PT\}$

$P = \text{diag}(1, \text{-}1, \text{-}1, \text{-}1)$ $\qquad T = \text{diag}(\text{-}1, 1, 1, 1)$ $\qquad PT = \text{diag}(\text{-}1, \text{-}1, \text{-}1, \text{-}1)$

$$Q(1,3) = SO^{+}(1,3) \cup PSO^{+}(1,3) \cup TSO^{+}(1,3) \cup PTSO^{+}(1,3)$$

Podgrupy $SO^{+}(1,3)$

Relace ortogonality $g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma}\alpha^{\rho}{}_{\mu}\alpha^{\sigma}{}_{\nu}$, $\forall \mu,\nu = 0,1,2,3$ jsou symetrické vzhledem k $\mu \leftrightarrow \nu$ a představují proto pouze 10 nezávislých rovnic pro 16 neznámých $\alpha^{\rho}{}_{\sigma}$ (relace ortogonality pro čtyři sloupce matice A tj. 4+3+2+1=10 rovnic). Jejich řešení závisí na $16 - 10 = 6$ parametrech. $O(1,3)$ resp. $SO^{+}(1,3)$ je tedy šestidimenzionální podvarieta v $\mathbb{R}^{16}$.

- tři parametry odpovídají grupě prostorových rotací

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \text{M} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \text{kde } M \in SO(3)$$

- tři parametry odpovídají speciálním L.T. (boostům) ve směru os – tři 1-parametrické podgrupy např.

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & \text{-}\beta\gamma & 0 & 0 \\ \text{-}\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\mu & \text{-}\sinh\mu & 0 & 0 \\ \text{-}\sinh\mu & \cosh\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(\mu)$$

$$A(\mu_1)A(\mu_2) = A(\mu_1 + \mu_2).$$

Matice odpovídající boostům jsou vždy symetrické (naopak to neplatí). Složení dvou boostů v různých směrech není boost, ale boost a prostorová rotace (Thomasova precese). Proto boosty obecně grupu netvoří.

Rapidita μ

V částicové fyzice se používá pro popis pohybu (aktivní transformace).

$$\boxed{\text{tgh}\,\mu = \beta = \tfrac{V}{c}} \qquad \beta \to 1 \Leftrightarrow \mu \to +\infty$$

$$\cosh^2\mu - \sinh^2\mu = 1 \qquad \cosh\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\text{tgh}^2\mu}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$

$$1 - \text{tgh}^2\mu = \frac{1}{\cosh^2\mu} \qquad \sinh\mu = \cosh\mu\,\text{tgh}\,\mu = \beta\gamma$$

Poincarého grupa $\mathbb{R}^4 \rtimes O(1,3)$

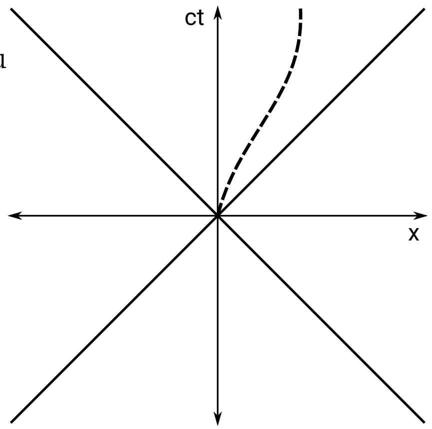
afinní transformace $x'^{\mu} = \alpha^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + b^{\mu}$ (nehomogenní Lorentzovy transformace)
$(b_1, A_1) \cdot (b_2, A_2) = (b_1 + A_1 b_2, A_1 A_2)$ polopřímý součin grup $\mathbb{R}^4 \times O(1,3)$
10–parametrická grupa

Relativistické zobecnění Newtonových pohybových rovnic

Cílem je najít rovnice popisující pohyb relativistické částice v Minkowského prostoročase, tak aby byly kovariantní (invariantní co do tvaru vzhledem k L.T.) a pro $v << c$ přecházely na rovnice Newtonovy.

Světočára

Je křivka v Minkowského prostoročase jejíž body jsou události odpovídající pohybovým stavům částice (obdoba trajektorie částice). Parametrizována bude invariantním vlastním časem částice. Uvažujeme pouze hmotné částice, které se pohybují po časupodobných světočárách. Každé dva body světočáry budou spojeny časupodobným intervalem $(c\Delta\tau)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{x})^2 > 0$. V každém infinitesimálním časovém úseku lze považovat rychlost částice za konstantní, spojit s částicí tzv. okamžitou klidovou inerciální soustavu a postulovat $dt = \gamma d\tau$



$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma} \qquad \frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

Čtyřvektory

Jsou prvky ze zaměření Minkowského prostoročasu. Při Lorentzových transformacích se transformují stejně jako čtyřvektor polohy:

$$\boxed{x'^\mu = \alpha^\mu{}_\nu x^\nu} \qquad A = (\alpha^\mu{}_\nu) \in O(1,3) \qquad x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

Ke každému čtyřvektoru přísluší invariant (obdoba velikosti). Pro čtyřvektor polohy je to interval:

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix} = c^2t^2 - \vec{x}^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Další čtyřvektory získáme

- derivací čtyřvektoru podle skaláru (invariantu)
- násobením čtyřvektoru skalárem

Čtyřrychlost

Z vzorců pro relativistické skládání rychlostí plyne, že složky vektoru rychlosti nemohou být složkami čtyřrychlosti, netransformovaly by se správně. Čtyřrychlost tedy nemůže být derivací čtyřpolohy podle souřadnicového času t. Bude to derivace podle invariantního vlastního času τ.

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \qquad u'^\mu = \frac{\mathrm{d}\, x'^\mu}{\mathrm{d}\,\tau} = \frac{\mathrm{d}(\alpha^\mu{}_\nu x^\nu)}{\mathrm{d}\,\tau} = \alpha^\mu{}_\nu \frac{\mathrm{d}\, x^\nu}{\mathrm{d}\,\tau} = \alpha^\mu{}_\nu u^\nu$$

Invariant

$u^\mu u_\mu = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \cdot \gamma \begin{pmatrix} c \\ -\vec{v} \end{pmatrix} = \gamma^2(c^2 - \vec{v}^2) = c^2 > 0$ časupodobný čtyřvektor

Čtyřhybnost

definujeme jako součin invariantu m_0 (klidové hmotnosti) s čtyřrychlostí:

$p^\mu = m_0 u^\mu = \gamma \begin{pmatrix} m_0 c \\ m_0 \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc \\ m\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc \\ \vec{p} \end{pmatrix}$

Relativistická hmotnost (charakterizuje setrvačný odpor vůči urychlování) $m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Relativistická hybnost $\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Invariant

$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 > 0$ časupodobný čtyřvektor

Čtyřzrychlení

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{du^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{du^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} \gamma^4 c^{-1}\vec{v}\cdot\vec{a} \\ \gamma^2\vec{a} + \gamma^4 c^{-2}(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v} \end{pmatrix}$$

Invariant

$w^\mu w_\mu = -\gamma^4\vec{a}^2 - \gamma^6 c^{-2}(\vec{v}\cdot\vec{a})^2 < 0$ prostorupodobný čtyřvektor

Derivací invariantu čtyřrychlosti dostaneme

$$0 = \frac{dc^2}{d\tau} = \frac{du^\mu u_\mu}{d\tau} = \frac{du^\mu}{d\tau}u_\mu + u^\mu\frac{du_\mu}{d\tau} = w^\mu u_\mu + u^\mu w_\mu = 2w^\mu u_\mu$$

čtyřzrychlení je “4-kolmé” na čtyřrychlost

Relativistické pohybové rovnice

Rovnice napíšeme tak, aby byly kovariantní vůči Lorentzovým transformacím $A = (\alpha^\mu{}_\nu) \in O(1,3)$.

čtyřsíla

$$\frac{\mathrm{d}\,p'^\mu}{\mathrm{d}\,\tau} = K'^\mu \qquad \frac{\mathrm{d}\,\alpha^\mu{}_\nu p^\nu}{\mathrm{d}\,\tau} = \alpha^\mu{}_\nu K^\nu \ /(\alpha^{-1})^\sigma{}_\mu \qquad \frac{\mathrm{d}\,p^\mu}{\mathrm{d}\,\tau} = K^\mu \qquad K^\mu = \begin{pmatrix} K^0 \\ \vec{K} \end{pmatrix}$$

Prostorové složky čtyřsíly získáme z principu korespondence ($\frac{v}{c} \to 0$):

$$\frac{\mathrm{d}\,p^\mu}{\mathrm{d}\,\tau} = \frac{\mathrm{d}\,p^\mu}{\mathrm{d}\,t}\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau} = \gamma\frac{dp^\mu}{dt} \qquad \gamma\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} = \gamma\vec{F} = \vec{K}$$

Nultou složku čtyřsíly získáme pomocí čtyřvýkonu:

$$\left.\begin{aligned} K^\mu u_\mu &= K^0\gamma c - \gamma^2\vec{F}\cdot\vec{v} \\ K^\mu u_\mu &= \tfrac{d(m_0u^\mu)}{d\tau}u_\mu = \tfrac{\mathrm{d}\,m_0}{\mathrm{d}\,\tau}u^\mu u_\mu + m_0 w^\mu u_\mu = c^2\tfrac{\mathrm{d}\,m_0}{\mathrm{d}\,\tau} = 0 \end{aligned}\right\} \quad K^0 = \tfrac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\gamma}{c}\tfrac{\mathrm{d}\,E}{\mathrm{d}\,t} &= \gamma\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\tfrac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \tfrac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} \\ \gamma\tfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} &= \gamma\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\tfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \gamma\vec{F} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\mathrm{d}\,p^\mu}{\mathrm{d}\,\tau} = K^\mu \qquad K^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} \\ \gamma\vec{F} \end{pmatrix}$$

Energie

Z rovnice pro nultou složky čtyřsíly:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\,E}{\mathrm{d}\,t} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \text{konst.}$$

konst. = 0...Einstein 1905 (později potvrzeno experimenty)

$$\boxed{E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Kinetická energie

$$\begin{aligned} E_{Kin} &= E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 \overset{Taylor}{=} m_0c^2\left(1 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{v}{c})^2 + \tfrac{3}{8}(\tfrac{v}{c})^4 + \ldots\right) - m_0c^2 \\ &= \tfrac{1}{2}m_0v^2 + \tfrac{3}{8}m_0v^2(\tfrac{v}{c})^2 + \ldots \qquad \text{Taylorův rozvoj ve } (\tfrac{v}{c}) \end{aligned}$$

Vztah energie a hybnosti

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma m_0 c \\ \gamma m_0\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \qquad m_0^2c^2 = p^\mu p_\mu = \left(\tfrac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}\cdot\vec{p} \qquad \boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

Pro foton s frekvencí ν

$$E = h\nu \qquad p_f = \tfrac{E}{c} = \tfrac{h\nu}{c} \qquad p_f^\mu = \tfrac{h\nu}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{s} \end{pmatrix} \qquad |\vec{s}| = 1$$

Srážky a rozpady částic

- Zkoumáme pouze asymptotické stavy, srážku považujeme za bodovou a částice v dostatečné vzdálenosti od místa srážky za neinteragující.
- Splňují zákon zachování čtyřhybnosti (důsledek kvantové teorie pole, částice jsou excitace pole a to je invariantní vůči translaci).
- Při počítání využíváme zákon zachování celkové čtyřhybnosti (energie a hybnosti) soustavy a invariantu čtyřhybnosti
  $$P^\mu_{\text{před}} = \text{konst.} = P^\mu_{\text{po}} \qquad p^\mu p_\mu = m_0^2c^2.$$

Hmotnostní defekt

je rozdíl mezi součtem klidových hmotností jednotlivých částí soustavy (nukleonů) a klidové hmotnosti vázané soustavy (atomového jádra).
Celková energie izolované soustavy je konstantní, ale může se měnit její forma (např. nepružná srážka částic).
Klidová energie vázané soustavy:

- klidová energie jednotlivých částí
- kinetická energie jednotlivých částí
- energie vzájemné interakce částí

Vazebná energie soustavy $B = \sum_{i=1}^n E_{0i} - E_0^{celk}$
$B > 0$ energie se uvolňuje při syntéze (fúze lehkých jader)
$B < 0$ energie se uvolňuje při štěpení (štěpení těžkých jader)
Deuteron (těžký vodík) ${}^2_1$H – vodík s jedním protonem a jedním neutronem
$m_d = m_p + m_n - \frac{B}{c^2} < m_p + m_n$