Lagrangeův a Hamiltonův formalizmus pro relativistickou částici

Zkonstruujeme akci pro volnou bezsilovou hmotnou ($m_0 > 0$) částici, tak aby

- byla stejná pro pozorovatele ve všech inerciálních vztažných soustavách (tj. relativisticky invariantní)
- pro $v << c$ "přecházela" na nerelat. akci $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m_0 v^2\,\mathrm{d}t$.

Invariantem je interval resp. vlastní čas

$$\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\tau = c\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{t} \doteq c(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{v^2}{c^2}+\ldots)\,\mathrm{d}t$$

Aby akce přecházela v nerelativistickou, definujeme ji jako vhodný násobek "délky" světočáry

$$-m_0 c\,\mathrm{d}s = (-m_0c^2 + \tfrac{1}{2}m_0 v^2 + \ldots)\,\mathrm{d}t$$

Akce pro volnou bezsilovou částici

$$S_0 = \int_1^2 (-m_0 c)\,\mathrm{d}s = \int_{\tau_1}^{\tau_2} -m_0c^2\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{L_0}\,\mathrm{d}t$$

Lagrangeova funkce pro volnou bezsilovou částici

$$\boxed{L_0(\vec{v}) = -m_0c^2\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}}$$

Obecná hybnost (zde odpovídá relativistické hybnosti)

$$\vec{p} = \frac{\partial L_0}{\partial \vec{v}} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad p_i = \frac{\partial L_0}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i}\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v_j^2}{c^2}}\right) = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\frac{v_j^2}{c^2}}}$$

Pro částici v poli s potenciálem $U(\vec{x},t)$

$$L(\vec{x},\vec{v},t) = -m_0c^2\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} - U(\vec{x},t) \qquad \text{kde} \quad \vec{v} = \dot{\vec{x}}$$

Lagrangeovy rovnice jsou relativistické pohybové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = \vec{F}$$

Hamiltonova funkce

Obecná energie

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\cdot\vec{v} - L = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\vec{v} - \left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - U\right) = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + U$$

Vyjádření rychlostí pomocí hybností

$$p_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad p^2c^2 - p^2v^2 = m_0^2c^2v^2 \qquad v^2 = \frac{p^2c^2}{p^2+m_0^2c^2}$$

$$v_i = \frac{p_i}{m_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{p_i}{m_0}\sqrt{1-\frac{p^2}{p^2+m_0^2c^2}} = \frac{p_i}{m_0}\sqrt{\frac{m_0^2c^2}{p^2+m_0^2c^2}} = \frac{p_i c}{\sqrt{p^2+m_0^2c^2}}$$

Hamiltonova funkce

$$\boxed{H(\vec{x},\vec{p},t) = c\sqrt{p^2+m_0^2c^2} + U(\vec{x},t)}$$

Pro nabitou částici v elmag. poli s potenciály $\varphi = \varphi(\vec{x},t)$ a $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x},t)$

Lagrangeova funkce

$$\boxed{L = -m_0c^2\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} - q(\varphi - \vec{v}\cdot\vec{A})}$$

Obecná hybnost (různá do relativistické hybnosti)

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\vec{A} \qquad (\vec{p}-q\vec{A})^2 = \frac{m_0^2v^2c^2}{c^2-v^2} \qquad v^2 = \frac{(\vec{p}-q\vec{A})^2c^2}{m_0^2c^2 + (\vec{p}-q\vec{A})^2}$$

Obecná energie

$$\mathcal{E} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\vec{v} + q\vec{A}\cdot\vec{v} - \left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q(\varphi - \vec{v}\cdot\vec{A})\right) = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi$$

Hamiltonova funkce

$$\boxed{H = c\sqrt{(\vec{p}-q\vec{A})^2 + m_0^2c^2} + q\varphi}$$

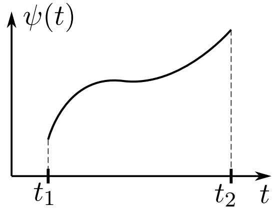
Lagrangeův formalizmus v teorii pole

V STR nelze interakci mezi částicemi popsat pomocí potenciálů (z důvodu konečné rychlosti šíření interakce). Soustavu interagujících částic je potřeba doplnit o další fyzikální objekt (silové pole) s vlastními stupni volnosti, který tuto interakci zprostředkuje.
Pole resp. soustavu polí popíšeme sadou hladkých funkcí $q_a(x^\mu)$, $a = 1, \dots, n$ – obecných souřadnic polí na prostoročasu

Pohyb nerelativistické částice po přímce - motivace

$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x)\,\mathrm{d}t = \int_{\langle t_1, t_2\rangle} \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 - U(\psi)\,\mathrm{d}t$

Speciální případ pole na 1–dimenzionálním prostoročasu odpovídající historii částice.



Pro částice	Pro pole
t	x^μ
$q_i(t)$	$q_a(x^\mu)$
$S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\,\mathrm{d}t$	$S[q_a(x^\mu)] = \frac{1}{c}\int_{V^*} \mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu)\,\mathrm{d}V^*$

Akce pro pole

$$\boxed{S[q_a(x^\mu)] = \frac{1}{c}\int_{V^*} \mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu)\,\mathrm{d}V^*} \qquad \text{kde } q_{a,\nu} = \frac{\partial q_a}{\partial x^\nu} = \partial_\nu q_a$$

je objemový integrál přes čtyřrozměrnou oblast V^* s objemovým elementem

$$\mathrm{d}V^* = \mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3 = c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}V$$

z hustoty Lagrangeovy funkce – lagrangiánu $\mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu)$.

Speciálně pro $V^* = \langle ct_1, ct_2\rangle \times V$ $\qquad S = \int_{V^*} \mathcal{L}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}V = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \mathcal{L}\,\mathrm{d}V\right)\mathrm{d}t$

Divergenční věta

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_\Omega \mathrm{d}\omega$$

Ω, M… k-rozměrné variety v $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega} \subset M$ kompaktní
$\partial\Omega$… hranice Ω v M s orientací pomocí vnější normály
$\omega \in C^1(\overline{\Omega})$… ($k$-1)-forma, $\mathrm{d}\omega$ její vnější derivace (k-forma)

Hamiltonův princip pro pole

Skutečný časový vývoj soustavy polí se děje s takovou závislostí q_a na x^μ, pro kterou akce S nabývá stacionární hodnoty vzhledem k variacím $\delta q_a(x^\mu)$ splňujícím podmínku pevných konců, která požaduje nulovost variací na hranici ∂V^* oblasti V^* tj. $\delta q_a(x^\mu)|_{\partial V^*} = 0$.

Rovnice pole

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{c}\int_{V^*} \delta\mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu)\,\mathrm{d}V^* = \frac{1}{c}\int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}\delta q_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\delta q_{a,\nu}\right]\mathrm{d}V^* \\
&= \frac{1}{c}\int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}\delta q_a + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\delta q_a\right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right)\delta q_a\right]\mathrm{d}V^* \\
&= \frac{1}{c}\int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}\delta q_a - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right)\delta q_a\right]\mathrm{d}V^* + \frac{1}{c}\int_{V^*} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\delta q_a\right)\mathrm{d}V^* \\
&= \frac{1}{c}\int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right)\right]\delta q_a\,\mathrm{d}V^* + \frac{1}{c}\int_{\partial V^*} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\delta q_a\right)\mathrm{d}f_\nu
\end{aligned}$$

Lagrangeovy rovnice pro soustavu polí v Minkowského prostoročase

$$\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0 \qquad \forall a \in \widehat{n}$$

$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ je derivace složených funkcí podle řetězového pravidla

$$q_{a,0} = \frac{\partial q_a}{\partial x^0} = \frac{\partial q_a}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x^0} = \frac{1}{c}q_{a,t} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,0}} = c\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,t}} \qquad \frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,0}} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,t}}$$

Homogenní struna

Jednorozměrné pole $q_1 = \psi = \psi(t, z)$ na dvourozměrném prostoročasu.

ρ… lineární hustota struny
T … síla napínající strunu

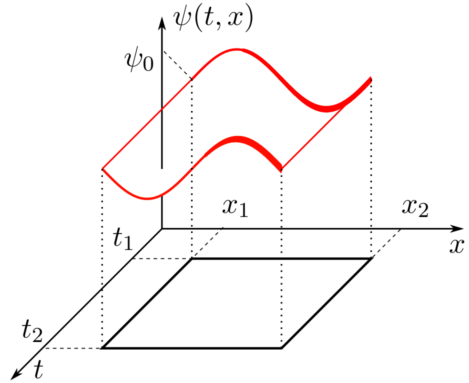
Hustota kinetické energie $\kappa = \frac{1}{2}\rho\psi_t^2$

Hustota potenciální energie $u = \frac{1}{2}T\psi_z^2$

$\psi_t = \frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad \psi_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}$

Hustota Lagrangeovy funkce

$\mathcal{L}(\psi_t, \psi_z) = \kappa - u = \frac{1}{2}\rho\psi_t^2 - \frac{1}{2}T\psi_z^2$



Pohybové rovnice pole

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_z}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$$

Vlnová rovnice pro strunu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi_t) + \frac{\partial}{\partial z}(T\psi_z) - 0 = \rho\psi_{tt} - T\psi_{zz} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Nejednoznačnost lagrangiánu $\mathcal{L}$

Hustota Lagrangeovy funkce je pro dané pole určena až na divergenci libovolného čtyřvektoru $F^\mu(q_a, x^\nu)$. Lagrangiány $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial F^\mu(q_a,x^\nu)}{\partial x^\mu}$ vedou na stejné rovnice pole.

$$\delta \frac{1}{c} \int_{V^*} \frac{\partial F^\mu}{\partial x^\mu}\, \mathrm{d}V^* = \frac{1}{c} \delta \int_{\partial V^*} F^\mu \, \mathrm{d}f_\mu = \frac{1}{c} \int_{\partial V^*} \frac{\partial F^\mu}{\partial q_a} \underbrace{\delta q_a}_{=0} \mathrm{d}f_\mu = 0$$

Hamiltonův princip spolu s Lagrangeovými rovnicemi lze použít v prostorech libovolné dimenze. Úloha nalézt lagrangián, který vede na rovnice popisující pohyb daného pole je obtížná a pro její řešení nejsou známa obecně platná pravidla. Využívají se principy symetrie a jednoduchosti. Například v STR jde o požadavek relativistické invariance lagrangiánu, který plyne z relativistické invariance akce a integrace vzhledem k $\mathrm{d}V^{*\prime} = |J|\,\mathrm{d}V^*$

$$J = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) = \det({\alpha^\mu}_\nu) = \det A = \pm 1$$

Transformace polí

- skalární pole $\psi'(x'^\kappa) = \psi(x^\kappa)$
- vektorové pole $A'^\mu(x'^\kappa) = {\alpha^\mu}_\nu A^\nu(x^\kappa)$
- tenzorové pole $F'^{\mu\nu}(x'^\kappa) = {\alpha^\mu}_\rho {\alpha^\nu}_\sigma F^{\rho\sigma}(x^\kappa)$

$$x'^\kappa = {\alpha^\kappa}_\lambda x^\lambda \qquad\qquad A'^\mu(x'^\kappa) = {\alpha^\mu}_\nu A^\nu(({(\alpha^{-1})^\lambda}_\kappa x'^\kappa)$$