Maxwellovy rce. ve vakuu (Maxwellovy–Lorentzovy rce.) (H.A.Lorentz 1892)

I. série

$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

$\boxed{\operatorname{rot}\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j}}$

II. série

$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$

$\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0}$

Elektrická intenzita $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\vec{F}}{q}$ $[\vec{E}] = Vm^{-1}$

Magnetická indukce $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t)$ $[\vec{B}] = T$

Hustota náboje $\rho = \rho(\vec{r},t)$ $[\rho] = Cm^{-3}$

Proudová hustota $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r},t) = \rho\vec{v}$ $[\vec{j}] = Am^{-2}$

Permitivita vakua $\varepsilon_0 \doteq 8,854 \cdot 10^{-12} Fm^{-1}$

Permeabilita vakua $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} Hm^{-1}$

Popisují elektromagnetické pole (na mikroskopické - atomární úrovni) buzené daným rozložením zřídel ρ a $\vec{j}$. Současně pole působí na náboje tvořící zřídla *Lorentzovou silou* $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$. Rovnice je tak potřeba doplnit o relativistické rovnice pro pohyb nábojů $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

Gaussův zákon

Tok elektrické intenzity uzavřenou plochou je úměrný celkovému náboji obklopenému touto plochou.

$$\Psi_E = \oint_{\partial V}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{E}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Maxwellovo zobecnění Faradayova zákona

Časově proměnné magnetické pole budí pole elektrické (nezávisle na existenci vodivé smyčky).

$$\oint_{\partial S}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

Neexistence magnetického monopólu

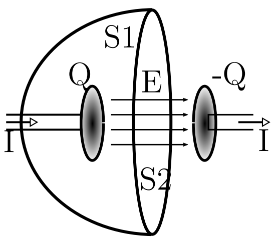
Magnetické pole je solenoidální (bez zdrojů). Siločáry jsou buď uzavřené křivky, nebo začínají a končí v nekonečnu. $\oint_{\partial V}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$

Ampérův zákon doplněný o Maxwellův posuvný proud

Elektrický proud a časově proměnné elektrické pole budí pole magnetické.

$$\oint_{\partial S}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_S \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \int_S\mu_0\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$
$$= \mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Psi_E}{\mathrm{d}t} + \mu_0 I$$

Maxwellův posuvný proud (kvůli splnění rovnice kontinuity) $\vec{j}_{Max} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$



integruje se přes nehybné křivky a plochy, ∂S a ∂V nezávisí na čase

Rovnice kontinuity - zákon zachování náboje

$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0}$ $\quad -\frac{\mathrm{d}Q_V}{\mathrm{d}t} = -\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V = \int_V \operatorname{div}\vec{j}\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V}\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = I_{\partial V}$

$$0 = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B} - \mu_0(\varepsilon_0\operatorname{div}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}) = -\mu_0(\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{E} + \operatorname{div}\vec{j}) = -\mu_0(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j})$$

Rovnice elektromagnetické vlny

rot na druhé rovnice obou sad a dosazením z rovnic prvních dává

$$0 = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{B}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$$
$$0 = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{E}) - \mu_0\operatorname{rot}\vec{j} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{B} - \Delta\vec{B} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \mu_0\operatorname{rot}\vec{j}$$

nehomogenní vlnové rovnice pro elektromagnetickou vlnu

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{grad}\rho + \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$$
$$\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\operatorname{rot}\vec{j}$$

Pro $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ homogenní vlnové rovnice pro e.m. vlnu ve vakuu.

Weberův vztah $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 299\ 792\ 458 ms^{-1}$ $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7} Hm^{-1}$

Maxwellovy rovnice v látkovém prostředí (J.C.Maxwell 1865)

$\boxed{\text{I.}}$ $\boxed{\operatorname{div}\vec{D} = \rho}$ $\boxed{\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{j}}$ $\boxed{\text{II.}}$ $\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0}$ $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$

Popisují makroskopické e.m. pole v látkovém prostředí – střední hodnoty okamžitých mikroskopických polí (z M.–L. rovnic) přes "dostatečně velké" objemy a "dostatečně dlouhé" časy, které jsou měřeny přístroji. Nábojové a proudové hustoty jsou při středování rozděleny na volné (ρ a $\vec{j}$ vystupující v získaných rovnicích) a vázané, které jsou zahrnuty v následujících vztazích:

Elektrická indukce $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}$ $[\vec{D}] = Cm^{-2}$

Vektor polarizace $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r},t)$ – průměrný elektrický dipólový moment v jednotce objemu, makroskopický dipólový moment $\vec{p} = \int_V \vec{P}\,\mathrm{d}V$

celková hustota náboje $\rho_c = \rho + \rho_b$ hustota vázaných nábojů $\rho_b = -\operatorname{div}\vec{P}$

Intenzita magnetického pole $\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}}$ $[\vec{H}] = Am^{-1}$

Vektor magnetizace $\vec{M} = \vec{M}(\vec{r},t)$ – hustota mag. dipol. momentu, makroskopický mag. dipol. moment $\vec{m} = \int_V \vec{M}\,\mathrm{d}V$

celková proudová hustota $\vec{j}_c = \vec{j} + \vec{j}_p + \vec{j}_m$ polarizační proud $\vec{j}_p = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$

magnetizační proud $\vec{j}_m = \operatorname{rot}\vec{M}$

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho \qquad \operatorname{div}\varepsilon_0\vec{E} = \rho - \operatorname{div}\vec{P} = \rho_c$$
$$\operatorname{rot}(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}) - \frac{\partial(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})}{\partial t} = \vec{j} \qquad \operatorname{rot}\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{M} = \vec{j}_c$$

Materiálové vztahy

Vektory polarizace a magnetizace závisí na vnitřní stavbě látky i na e.m. poli. Pro konkrétní látky se tato závislost určuje experimentálně.

V lineární prostředí (ideálně měkká dielektrika), které je homogenní a izotropní platí v případě slabých (vzhledem k lokálním polím) středních polí $\vec{E}$, $\vec{B}$ vztahy: $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$ $\quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}$ $\quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ $\quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

permitivita $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0(1+\chi_e)$ permeabilita $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0(1+\chi_m)$

Rychlost e.m. vlny v prostředí $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ Index lomu $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

V anizotropních prostředích jsou veličiny elektrická a magnetická susceptibilita χ_e, χ_m (a tedy i ε, μ) symetrické tenzory, v nehomogenních prostředích závisí na poloze, v nelineárních prostředích na polích $\vec{E}$, $\vec{B}$ dále mohou záviset na teplotě a nebo na frekvenci se kterou se mění e.m. pole.

Dále budeme uvažovat pouze prostředí a podmínky za kterých jsou ε, μ reálné konstanty. V takových prostředích mají Mawellovy rovnice tvar

I. série $\quad \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}} \quad \boxed{\operatorname{rot} \vec{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \vec{j}}$

II. série $\quad \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0} \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$

V případě stacionárních (časově nezávislých) polí $\vec{E}$ a $\vec{B}$ se rovnice rozpadají na dvě nezávislé soustavy rovnic – jednu pro $\vec{E}$ a druhou pro $\vec{B}$.

Helmholtzův teorém

Buď $\vec{F}$ vektorové pole třídy C^2 na omezené oblasti $V \subset \mathbb{R}^3$ pak

$$\vec{F} = -\nabla\Phi + \operatorname{rot} \vec{A} \quad \text{kde} \quad \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dV' - \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot d\vec{S}'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dV' + \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \times d\vec{S}'$$

Řešení Maxwellových rovnic pomocí potenciálů (II. série)

$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ solenoidální pole $\vec{B} \quad \Leftrightarrow$

$\exists \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ Vektorový potenciál $\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}}$ $\quad (\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0)$

$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ potenciální pole $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow$

$\exists \varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ Skalární potenciál $\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$ $\quad (\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0)$

Kalibrační transformace

Přiřazení dvojice potenciálů $(\vec{A}, \varphi)$ k e.m. poli $(\vec{E}, \vec{B})$ není jednoznačné. Konkrétní výběr dvojice $(\vec{A}, \varphi)$ k popisu e.m. pole se nazývá *kalibrací* a přechod mezi různými kalibracemi *kalibrační transformací*. Říkáme, že $(\vec{A}, \varphi)$ a $(\vec{A}', \varphi')$ jsou *kalibračně ekvivalentní* popisují–li totéž pole $(\vec{E}, \vec{B})$.

$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}' \qquad -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$

$\operatorname{rot}(\vec{A}' - \vec{A}) = 0 \Rightarrow \exists \Lambda = \Lambda(\vec{r}, t) \qquad 0 = \nabla(\varphi' - \varphi) + \frac{\partial(\vec{A}' - \vec{A})}{\partial t} = \nabla(\varphi' - \varphi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t})$

$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda(\vec{r}, t)} \qquad \boxed{\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t}}$

Kalibrační transformace tedy nemění měřitelné polní veličiny $\vec{E}$ a $\vec{B}$, ale pouze jejich parametrizaci. ($\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou tzv. kalibračně invariantní)

Řešení Maxwellových rovnic pomocí potenciálů (I. série)

$$\mu \vec{j} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} + \varepsilon\mu \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon} = \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\Delta\varphi - \operatorname{div}(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu \vec{j} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \\ \Delta\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \end{aligned}\right\} \text{ⓐ} \quad \text{jsou kalibračně invariantní}$$

Lorenzova kalibrační podmínka (L.V.Lorenz) $\boxed{\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0}$

Oprávněnost Lorenzovy kalibrace

Pokud $\vec{A}$, φ řeší rce. ⓐ a nesplňují Lorenzovu kalibrační podmínku, pak mezi řešeními ⓐ existují kalibračně ekvivalentní $\vec{A}'$,φ' které ji splňují.

$$0 = \operatorname{div} \vec{A}' + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \operatorname{grad} \Lambda + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}$$

$\Delta\Lambda - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -(\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t})$ nehomogenní vlnová rovnice pro Λ - má nekonečně mnoho řešení

Nehomogenní vlnové (d'Alembertovy) rovnice pro potenciály

V prostředí (kde $\varepsilon_r, \mu_r \in \mathbb{R}$ kons.)	Speciálně ve vakuu ($\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$)
$\Delta\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$	$\Box \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\Delta \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}$	$\Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$
$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$	$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

d'Alembertův operátor (dalambertián) $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Nehomogenní vlnové (d'Alembertovy) rovnice pro potenciály

V prostředí (kde $\varepsilon_r, \mu_r \in \mathbb{R}$ kons.)

$\Delta\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

$\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j}$

$\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$

Speciálně ve vakuu ($\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$)

$\Box\,\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\Box\,\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$

$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$

d'Alembertův operátor (dalambertián) $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Tyto rovnice jsou invariantní vůči kalibračním transformacím splňujícím podmínku $\Delta\Lambda - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = 0$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}\Lambda$$

$$-\frac{\rho}{\varepsilon} = \Delta\varphi' - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2} = \Delta\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\Lambda - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}\right)$$

$$-\mu\vec{j} = \Delta\vec{A}' - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}'}{\partial t^2} = \Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad}\left(\Delta\Lambda - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}\right)$$

$$0 = \operatorname{div}\vec{A}' + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\Delta\Lambda - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}\right)$$

Řešení tedy není jednoznačné.
Například v případě $\rho = 0$ lze požadovat $\varphi' = 0$

$\Delta\vec{A}' - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}'}{\partial t^2} = -\mu\vec{j}$

$\varphi' = 0$

$\operatorname{div}\vec{A}' = 0$ ... Coulombova kalibrace