# Kanonické transformace

Pokud najdeme transformaci na $\Gamma$ která zachová tvar Hamiltonových rovnic a převede H na fci. nezávisející na $\vec{q}$ je úloha vyřešena v kvadraturách.

Př. $H = H(\vec{p}, t)$ $\quad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i(t) = \alpha_i$ Konst.

$\forall i \in \hat{s}$ $\quad \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \omega_i(\vec{\alpha}, t) \Rightarrow q_i(t) = \int \omega_i(\vec{\alpha}, t)\, dt + q_{0i}$

Pozn. Bodové transformace $Q_j = Q_j(\vec{q}, t)$ $\forall j \in \hat{s}$ konfiguračního pr. automaticky zachovávají tvar LR2D.

Hledáme transformace fázového prostoru $\Gamma$, které zachovávají tvar Hamiltonových rovnic

(1) $Q_j = Q_j(\vec{q}, \vec{p}, t)$ $\quad \forall j \in \hat{s}$ třídy $C^{(2)}$

$P_j = P_j(\vec{q}, \vec{p}, t)$ $\quad$ invertibilní $\left|\dfrac{\partial(\vec{Q}, \vec{P})}{\partial(\vec{q}, \vec{p})}\right| \neq 0$

Jacobián

tak, aby $\forall H = H(\vec{q}, \vec{p}, t) \in C^{(2)}(\Gamma \times \mathbb{R})$ $\exists K = K(\vec{Q}, \vec{P}, t) \in C^{(2)}(\Gamma \times \mathbb{R})$

tak, že $\forall (\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ na $\Gamma$ platí $\quad \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \iff \dot{Q}_j = \dfrac{\partial K}{\partial P_j}, \ \dot{P}_j = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_j}$

Hamiltonovy rovnice lze odvodit z modifikovaného Hamiltonova principu

$$\delta S_1 = \delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{(p_i \dot{q}_i - H)}_{f(\vec{q}, \vec{p}, \dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}}, t)} dt = 0 \qquad \delta\vec{q}(t_{1,2}) = 0 = \delta\vec{p}(t_{1,2}) \qquad \delta\vec{q}, \delta\vec{p} \text{ nezávislé}$$

$$\delta S_2 = \delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{(P_j \dot{Q}_j - K)}_{g(\vec{Q}, \vec{P}, \dot{\vec{Q}}, \dot{\vec{P}}, t)} dt = 0 \qquad \delta\vec{Q}(t_{1,2}) = 0 = \delta\vec{P}(t_{1,2}) \qquad \delta\vec{Q}, \delta\vec{P} \text{ nezávislé}$$

oba funkcionály jsou definovány na stejném prostoru křivek a mají-li popisovat stejnou úlohu, musí nabývat stacionární hodnoty na stejných křivkách (pouze popsaných jinými souřadnicemi) to nastává v případech:

a) $S_2 = \lambda \cdot S_1$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda \neq 0$ $\quad (P_j \dot{Q}_j - K) = \lambda(p_i \dot{q}_i - H)$

Škálování $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ $\quad Q_j = \mu q_j, \ P_j = \nu p_j$ $\quad P_j \dot{Q}_j - K = \mu\nu p_j \dot{q}_j - K = \lambda(p_i \dot{q}_i - H)$

$\Rightarrow \lambda = \mu\nu \ \wedge \ K = \mu\nu H$

b) $S_1 = S_2 + C$ $\quad C \in \mathbb{R}$ $\quad$ (Vytvořující funkce) $\exists F = F(\vec{Q}, \vec{P}, t) \in C^{(2)}(\Gamma \times \mathbb{R})$ $\quad p_i \dot{q}_i - H = P_j \dot{Q}_j - K + \dfrac{\hat{d} F(\vec{Q}, \vec{P}, t)}{dt}$

Transformace (1) pro kterou $\exists F = F(\vec{Q}, \vec{P}, t) \in C^{(2)}(\Gamma \times \mathbb{R})$ a $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall H \in C^{(2)}(\Gamma \times \mathbb{R})$ $\exists K \in C^{(2)}(\Gamma \times \mathbb{R})$ splňující $\lambda(p_i \dot{q}_i - H) = P_j \dot{Q}_j - K + \dfrac{\hat{d} F}{dt}$ se nazývá

1. <u>kanonická</u>, pokud $\lambda = 1$
2. rozšířená kanonická, pokud $\lambda \neq 0, 1$ (lze získat jako 1. + škálování)
3. užší kanonická, pokud $\lambda = 1$ $\quad \dfrac{\partial Q_j}{\partial t} = 0 = \dfrac{\partial P_j}{\partial t}$ (bezčasová)

$$dF(\vec{Q}, \vec{P}, t) = p_i\, dq_i - P_j\, dQ_j + (K - H)\, dt$$

představuje rovnost dvou diferenciálních forem zapsaných v různých proměnných upravíme buď levou (=> vytvořující fce.) nebo pravou stranu (=> kriteria kanoničnosti)

<u>Vytvořující funkce kanonické transformace</u> — je funkce vytvořená z $F$ přepisem (nebo Legendreovou tr.) do takové sady proměnných, kdy $\forall j \in \hat{s}$ je vždy jedna z páru kanonicky sdružených prměnných $Q_j, P_j$ ponechána velká (nová) a druhá převedena na malou (starou). Čtyři základní druhy vytvořujících fcí:

$$\begin{array}{c} ③ \\ ④ \end{array} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{q}} & \dfrac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{p}} \\ \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{q}} & \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{p}} \end{vmatrix} \begin{array}{c} ① \\ ② \end{array} \neq 0 \qquad \begin{array}{c} ② \\ ④ \end{array} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{Q}} & \dfrac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{P}} \\ \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{Q}} & \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{P}} \end{vmatrix} \begin{array}{c} ① \\ ③ \end{array} \neq 0$$

① Vytvořující fce. 1. druhu $\quad F_1 = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) = F(\vec{Q}, \vec{\hat{P}}, t)$ $\quad$ kde $\vec{\hat{P}} = \vec{P}(\vec{q}, \vec{Q}, t) \Leftarrow \left|\dfrac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{P}}\right| \neq 0$

$$dF_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) = p_i\, dq_i - P_j\, dQ_j + (K - H)\, dt = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

$\dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i \quad \forall i \in \hat{s} \qquad \dfrac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -P_j \quad \forall j \in \hat{s}$

$K = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t}$ $\quad$ transformace Hamiltoniánu

hledáme-li transformaci danou fci. $F_1$ představují tyto vztahy definice $\vec{p}$ a $\vec{P}$

hledáme-li vytvořující fci. pro danou transformaci, je třeba zapsat $\vec{p}, \vec{P}$ jako fce. $\vec{q}, \vec{Q}$ a řešit parciální dif. rce.

② $F_2 = F_2(\vec{q}, \vec{P}, t) = F(\hat{\vec{Q}}, \vec{P}, t) + P_j \cdot \hat{Q}_j = F_1 + P_j \cdot \hat{Q}_j$ $\quad \vec{\hat{Q}} = \vec{Q}(\vec{q}, \vec{P}, t) \Leftarrow \left|\dfrac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{Q}}\right| \neq 0$ $\quad \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial P_j} = Q_j \quad K = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t}$

$$dF = d(F_2 - P_j Q_j) = p_i\, dq_i - P_j\, dQ_j + (K - H)\, dt \Rightarrow dF_2(\vec{q}, \vec{P}, t) = p_i\, dq_i + Q_j\, dP_j + (K - H)\, dt$$

Legendreova tr. fce. $F_1$

③ $F_3(\vec{p}, \vec{Q}, t) = F_1 - p_i q_i$ $\quad \dfrac{\partial F_3}{\partial p_i} = -q_i \quad \dfrac{\partial F_3}{\partial Q_j} = -P_j$

④ $F_4(\vec{p}, \vec{P}, t) = F_1 - p_i q_i + P_j Q_j$ $\quad \dfrac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q_i \quad \dfrac{\partial F_4}{\partial P_j} = Q_j$

**Kriteria kanoničnosti** – nutné a postačující podmínky pro kanoničnost transformace $q_i = q_i(\vec{Q},\vec{P},\lambda)$, $p_i = p_i(\vec{Q},\vec{P},\lambda)$

$$dF(\vec{Q},\vec{P},\lambda) = p_i dq_i - P_j dQ_j + (K-H)d\lambda = \underbrace{\left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - P_j\right)}_{\frac{\partial F}{\partial Q_j}} dQ_j + \underbrace{p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_j}}_{\frac{\partial F}{\partial P_j}} dP_j + \underbrace{\left(K - H + p_i \frac{\partial q_i}{\partial \lambda}\right)}_{\frac{\partial F}{\partial \lambda}} d\lambda$$

$$dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial q_i}{\partial P_j} dP_j + \frac{\partial q_i}{\partial \lambda} d\lambda$$

pokud má F existovat musí být tato diferenciální forma uzavřená

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Q_k \partial Q_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q_j \partial Q_k} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial Q_k}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_k \partial Q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial Q_k} = \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_j \partial Q_k} - \frac{\partial P_k}{\partial Q_j} \qquad 0 = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\frac{\partial p_i}{\partial Q_k} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = [Q_j, Q_k]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial P_k \partial P_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial P_j \partial P_k} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_k}\frac{\partial q_i}{\partial P_j} + p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial P_k \partial P_j} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} + p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial P_j \partial P_k} \qquad 0 = \frac{\partial q_i}{\partial P_j}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial P_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} = [P_j, P_k]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial P_k \partial Q_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q_j \partial P_k} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_k}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial P_k \partial Q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial P_k} = \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} + p_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_j \partial P_k} \qquad \delta_{jk} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} = [Q_j, P_k]$$

zbylé podmínky jsou definičními vztahy pro fci. K a na transformaci již nekladou žádná další omezení

**I.** $[Q_j, P_k] = \delta_{jk} \quad \forall j,k \in \hat{s}$

$[Q_j, Q_k] = 0 = [P_j, P_k]$

Lagrangeovy závorky – definované pro souřadnice fázového prostoru

$$[Q_j, P_k]_{(q,p)} = \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} \right)$$

indexem u závorek jsou někdy značeny funkce které se v nich derivují

Pozn. $[Q_j, P_k]_{(Q,P)} = \frac{\partial Q_i}{\partial Q_j}\frac{\partial P_i}{\partial P_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial P_k}\frac{\partial P_i}{\partial Q_j} = \delta_{ij}\delta_{ik} - 0 = \delta_{jk} = [Q_j, P_k]_{(q,p)}$

Lagrangeovy závorky jsou invariantní při kanonické tr.

Jednotné souřadnice fázového prostoru $\Gamma$ – zjednoduší zápis, reflektují rovnocennost $\vec{q}$ a $\vec{p}$

$r_i = q_i$, $r_{s+i} = p_i$ $\forall i \in \hat{s}$ $\qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \\ p_1 \\ \vdots \\ p_s \end{pmatrix}$

Hamiltonovy rovnice $\quad \dot{r}_i = J_{ik} \frac{\partial H}{\partial r_k} \quad \forall i \in \widehat{2s} \qquad \dot{\vec{r}} = \mathbb{J}\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}\right)^T$

Poissonovy závorky $\quad \{F,G\}_r = \frac{\partial F}{\partial r_i} J_{ik} \frac{\partial G}{\partial r_k} = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{r}}\right) \mathbb{J} \left(\frac{\partial G}{\partial \vec{r}}\right)^T$

Lagrangeovy závorky $\quad [F,G]_r = \frac{\partial r_i}{\partial F} J_{ik} \frac{\partial r_k}{\partial G} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial F}\right)^T \mathbb{J} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial G}\right)$

(symplektická) matice řádu $2s \times 2s$

$$\mathbb{J} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1}_s \\ \hline -\mathbb{1}_s & 0 \end{array}\right) \in SO(2s) \qquad \mathbb{J}^{-1} = \mathbb{J}^T = -\mathbb{J} \qquad \mathbb{J}^2 = -\mathbb{1}_{2s} \qquad \det \mathbb{J} = 1$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{r}}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial r_{2s}}\right) \qquad \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial F}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial F} \\ \vdots \\ \frac{\partial r_{2s}}{\partial F} \end{pmatrix}$$

Transf. (1) $Z_j = Z_j(\vec{r}, \lambda)$ třídy $C^{(2)}$ $\forall j \in \widehat{2s}$ $\quad \left|\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right| = \left|\left(\frac{\partial Z_j}{\partial r_i}\right)\right| \neq 0$ je kanonická $\Leftrightarrow$ $[Z_i, Z_k] = J_{ik}$ $\forall i,k \in \widehat{2s}$

Lemma: Pro každou transformaci (1) souřadnic na $\Gamma$ platí $\sum_{i=1}^{2s} \{Z_i, Z_j\}_r [Z_i, Z_k]_r = \delta_{jk}$ $\forall j,k \in \widehat{2s}$

Dk. $$\{Z_i, Z_j\}_r [Z_i, Z_k]_r = \underbrace{\frac{\partial Z_i}{\partial r_l} J_{lm} \frac{\partial Z_j}{\partial r_m} \frac{\partial r_a}{\partial Z_i}}_{\frac{\partial r_a}{\partial r_l} = \delta_{al}} J_{ab} \frac{\partial r_b}{\partial Z_k} = J_{am} J_{ab} \frac{\partial Z_j}{\partial r_m}\frac{\partial r_b}{\partial Z_k} = \frac{\partial Z_j}{\partial r_b}\frac{\partial r_b}{\partial Z_k} = \delta_{jk}$$

$$(\mathbb{J}^T)_{ma} J_{ab} = \delta_{mb}$$

**II.** Transformace (1) je kanonická $\Longleftrightarrow$ $\{Z_i, Z_k\}_r = J_{ik}$ $\forall i,k \in \widehat{2s}$ $\Longleftrightarrow$ $\{Q_j, P_k\} = \delta_{jk}$ $\forall j,k \in \hat{s}$, $\{Q_j, Q_k\} = 0$ $\{P_j, P_k\} = 0$

Dk. $\Rightarrow$ $\delta_{jk} = \{Z_i, Z_j\}_r \cdot [Z_i, Z_k]_r = \{Z_i, Z_j\}_r J_{ik} \quad / \cdot J_{lk} \qquad J_{lj} = J_{lk}\delta_{jk} = \{Z_i, Z_j\}_r J_{ik} J_{lk} = \{Z_i, Z_j\}_r \delta_{il} = \{Z_l, Z_j\}_r$

$\Leftarrow$ $\delta_{jk} = \{Z_i, Z_j\}_r \cdot [Z_i, Z_k]_r = J_{ij} [Z_i, Z_k]_r \quad / \cdot J_{lj} \qquad J_{lk} = J_{lj}\delta_{jk} = J_{lj} J_{ij} [Z_i, Z_k]_r = \delta_{li} [Z_i, Z_k]_r = [Z_l, Z_k]_r$

$\rightarrow$ I.

Věta: Pro každou kanonickou transformaci platí $\overline{\{F,G\}_{(q,p)}} = \{\bar{F}, \bar{G}\}_{(Q,P)}$

Poissonovy závorky jsou invariantní při kanonické tr.

pruh označuje fce. vyjádřené ve velkých proměnných $\bar{F}(\vec{Z},\lambda) = F(\vec{r}(\vec{Z},\lambda),\lambda)$

Dk. $$\overline{\{F,G\}_r} = \frac{\overline{\partial F}}{\partial r_i} J_{ik} \frac{\overline{\partial G}}{\partial r_k} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial Z_l} \frac{\overline{\partial Z_l}}{\partial r_i} J_{ik} \frac{\overline{\partial Z_m}}{\partial r_k} \frac{\partial \bar{G}}{\partial Z_m} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial Z_l} \overline{\{Z_l, Z_m\}_r} \frac{\partial \bar{G}}{\partial Z_m} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial Z_l} J_{lm} \frac{\partial \bar{G}}{\partial Z_m} = \{\bar{F}, \bar{G}\}_Z$$