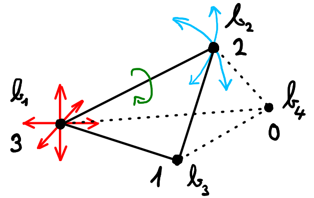
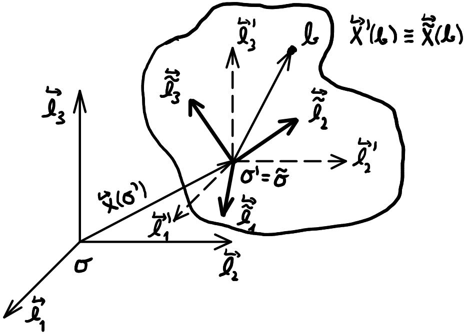
Mechanika tuhého tělesa



Tuhé těleso — model reálného tělesa, nepodléhá deformacím
— aproximujeme soustavou hm. bodů o neměných vzdálenostech
— má $s = 6$ stupňů volnosti (3 translační + 3 rotační)

vazby $|b_\alpha - b_\beta| = |\vec{r}_{\alpha\beta}| = \text{konst.}$



$\langle \sigma, B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rangle$ inerciální vztažná soustava (laboratorní)

$\downarrow$ $\quad \sigma'(t) = \sigma + \vec{R} \quad \vec{e}_i' = \vec{e}_i \quad \vec{x}'(b) = \vec{x}(b) - \vec{x}(\sigma')$

$\langle \sigma', B' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') \rangle$ soustava hmotného středu (těžišťová)

$\downarrow$ $\quad \tilde{\sigma}(t) = \sigma'(t) \quad \tilde{\vec{e}}_i(t) = \vec{e}_j' S_{ji}(t) \quad S \in SO(3) \quad \tilde{\vec{x}}(b) = S^T \vec{x}'(b)$

$\langle \tilde{\sigma}, \tilde{B} = (\tilde{\vec{e}}_1, \tilde{\vec{e}}_2, \tilde{\vec{e}}_3) \rangle$ soustava spojená s tělesem (tělesová)

$$\tilde{\vec{x}}_\alpha = \tilde{\vec{x}}(b_\alpha) = S^T(\vec{x}_\alpha - \vec{x}(\tilde{\sigma}))$$

$$\vec{x}_\alpha = S\tilde{\vec{x}}_\alpha + \vec{x}(\tilde{\sigma})$$

$$\dot{\vec{x}}_\alpha = \dot{S}\tilde{\vec{x}}_\alpha + \underbrace{S\dot{\tilde{\vec{x}}}_\alpha}_{=0} + \dot{\vec{x}}(\tilde{\sigma}) = \dot{S}S^T\vec{x}_\alpha' + \dot{\vec{x}}(\tilde{\sigma}) = \underbrace{\underbrace{\dot{S}S^T}_{-\omega}(\vec{x}_\alpha - \vec{x}(\sigma'))}_{\dot{\vec{x}}_\alpha' \text{ rychlost vůči } \langle\sigma', B'\rangle} + \dot{\vec{x}}(\sigma')$$

body tělesa jsou v soustavě $\langle\tilde{\sigma}, \tilde{B}\rangle$ v klidu

Tenzor $\omega = -\dot{S}S^T$ je antisymetrický

$SS^T = \mathbb{1} \;/\frac{d}{d\lambda} \Rightarrow \dot{S}S^T + S\dot{S}^T = 0 \Rightarrow S\dot{S}^T = -\dot{S}S^T$

$\Downarrow$

$\omega^T = (-\dot{S}S^T)^T = -S\dot{S}^T = \dot{S}S^T = -\omega$

Chceme

$$-\omega\vec{X}'_\alpha = \dot{S}S^T\vec{X}'_\alpha = \vec{\Omega}\times\vec{X}'_\alpha \qquad \omega \equiv \omega'$$

$$-\omega_{ik}X'_{\alpha k} = \varepsilon_{ijk}\Omega_j X'_{\alpha k} \qquad \forall \vec{X}'_\alpha$$

$$-\omega_{ik} = \varepsilon_{ijk}\Omega_j \quad /\varepsilon_{ilk}$$

$$\varepsilon_{lik}\omega_{ik} = -\varepsilon_{ilk}\omega_{ik} = \varepsilon_{ilk}\varepsilon_{ijk}\Omega_j = 2\delta_{lj}\Omega_j = 2\Omega_l$$

složky pseudovektoru úhlové rychlosti rotace tělesa (soustavy $\langle\tilde{\sigma}, \tilde{B}\rangle$) vůči inerciální soustavě $\langle\sigma, B\rangle$ v bázi B

$$\boxed{\Omega_l = \frac{1}{2}\varepsilon_{lik}\omega_{ik} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{lik}(\dot{S}S^T)_{ik}}$$

Pozn. $\omega' = \omega$ a $\vec{\Omega}' = \vec{\Omega}$ dříve bylo $\hat{\Omega}_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(S^T\dot{S})_{jk}$ složky vektoru $\vec{\Omega}$ v bázi $\hat{B}$

Pohyb bodu ℓ_α tělesa je popsán je složením translace počátku $\sigma' = \tilde{\sigma}$ a rotace kolem tohoto počátku

$$\dot{\vec{X}}_\alpha = \vec{\Omega}\times(\vec{X}_\alpha - \vec{X}(\tilde{\sigma})) + \dot{\vec{X}}(\tilde{\sigma}) = \vec{\Omega}\times\vec{X}'_\alpha + \dot{\vec{X}}(\sigma') \quad \forall\alpha\in\hat{N} \quad \Rightarrow$$

Úhlová rychlost nezávisí na volbě počátku σ' a je stejná pro všechny body tělesa

Kinetická energie tuhého tělesa

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec X}_\alpha^2 = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \left(\vec\Omega \times \vec X'_\alpha + \dot{\vec X}(\sigma')\right) = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec X}(\sigma')^2 + \sum_\alpha m_\alpha (\vec\Omega \times \vec X'_\alpha)\cdot \dot{\vec X}(\sigma') + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\vec\Omega \times \vec X'_\alpha)^2 =$$

$$(\vec\Omega \times \vec X'_\alpha)^2 = (\mathbb{S}\tilde{\vec\Omega} \times \mathbb{S}\tilde{\vec X}_\alpha)^2 = (\mathbb{S}(\tilde{\vec\Omega} \times \tilde{\vec X}_\alpha))^2 = (\tilde{\vec\Omega} \times \tilde{\vec X}_\alpha)^2 = \varepsilon_{ijk}\tilde\Omega_j \tilde X_{\alpha k}\varepsilon_{ilm}\tilde\Omega_l \tilde X_{\alpha m} = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\tilde\Omega_j \tilde X_{\alpha k}\tilde\Omega_l \tilde X_{\alpha m}$$

$$= (\delta_{jl}\tilde X_{\alpha k}^2 - \tilde X_{\alpha j}\tilde X_{\alpha l})\tilde\Omega_j\tilde\Omega_l$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\sum_\alpha m_\alpha}_{M} \dot{\vec X}(\sigma')^2 + \Big[\vec\Omega \times \underbrace{\Big(\sum_\alpha m_\alpha \vec X'_\alpha\Big)}_{M\vec R'}\Big]\cdot \dot{\vec X}(\sigma') + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_\alpha m_\alpha(\delta_{jl}\tilde X_{\alpha k}^2 - \tilde X_{\alpha j}\tilde X_{\alpha l})}_{\tilde I_{jl}}\tilde\Omega_j\tilde\Omega_l = \frac{1}{2}M\dot{\vec X}(\sigma')^2 + M(\vec\Omega \times \vec R')\cdot\dot{\vec X}(\sigma') + \frac{1}{2}\tilde I_{jl}\tilde\Omega_j\tilde\Omega_l$$

tenzor momentu setrvačnosti v tělesové soustavě

Věta: Buď $\sigma' \equiv \tilde\sigma$ hmotný střed tělesa, pak

$$\boxed{T = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{\vec R}^2}_{\text{kinetická energie translace těžiště}} + \underbrace{\frac{1}{2}\tilde I_{jk}\tilde\Omega_j\tilde\Omega_k}_{\text{energie rotace vůči ose jdoucí těžištěm}}}$$

Dk. $\vec R' = 0$ $\quad \vec X(\sigma') = \vec R$

Tenzor momentu setrvačnosti $I_{jk} = \sum_\alpha m_\alpha(\delta_{jk}\vec X_\alpha^2 - X_{\alpha j}X_{\alpha k})$ maticově $\mathbb{I} = \sum_\alpha m_\alpha\Big[\underbrace{(\vec X_\alpha^T \vec X_\alpha)}_{\vec X_\alpha\cdot\vec X_\alpha}\mathbb{1} - \underbrace{\vec X_\alpha \vec X_\alpha^T}_{\vec X_\alpha \otimes \vec X_\alpha}\Big]$

tenzorový součin

$I_{jk} = \int_V \rho(\vec x)(\delta_{jk}\vec x^2 - x_j x_k)\,dV$ pro spojité rozložení hmoty

Transformace $\tilde I_{jk} = I'_{lm}S_{lj}S_{mk}$ $\quad \mathbb{S} \in SO(3)$ $\quad \tilde{\mathbb{I}} = \mathbb{S}^T\mathbb{I}'\mathbb{S}$

$\mathbb{I}'(t) = \mathbb{S}(t)\tilde{\mathbb{I}}\mathbb{S}^T(t)$ v soustavě hm. středu závisí na čase

Pohyb tuhého tělesa = translační pohyb jeho hmotného středu $(\langle\sigma, B\rangle \to \langle\sigma'(t), B\rangle)$ složený s rotačním pohybem vůči hm. s. $(\langle\sigma', B\rangle \to \langle\sigma', \tilde{B}(t)\rangle)$ } neznámé $\vec{R}(t) = ?$, $\mathbb{S}(t) = ?$

1. Věta Impulsová v inerciální soustavě $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(e)}$ $\quad \vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = M\dot{\vec{R}}$ $\quad \boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}}$

2. Věta Impulsová v soustavě hmotného středu $\dot{\vec{L}}' = \vec{N}'^{(e)}$ ← předeveme ji do soustavy tělesové

$$(\vec{L}')_i = \left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{X}'_\alpha \times \dot{\vec{X}}'_\alpha\right)_i = \left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{X}'_\alpha \times (\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha)\right)_i = \sum_\alpha m_\alpha \varepsilon_{ijk} X'_{\alpha j} \varepsilon_{klm} \Omega_l X'_{\alpha m} = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) X'_{\alpha j} X'_{\alpha m} \Omega_l =$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha (\delta_{il} X'_{\alpha j} X'_{\alpha j} - X'_{\alpha i} X'_{\alpha l})}_{I'_{il}} \Omega_l = I'_{il} \Omega_l = (\mathbb{I}'\vec{\Omega})_i$$

$$\vec{L}' = \mathbb{I}\vec{\Omega} = \mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\mathbb{S}^T\mathbb{S}\tilde{\vec{\Omega}} = \underbrace{\mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}}}_{(\vec{L}')_{\tilde{B}}}$$

Pozn. $\tilde{\mathbb{I}}\vec{\Omega} \neq \vec{L} = 0$

$$\dot{\vec{L}}' = (\mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}})^\cdot = \dot{\mathbb{S}}\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}} + \mathbb{S}\underbrace{\dot{\tilde{\mathbb{I}}}}_{=0}\tilde{\vec{\Omega}} + \mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\dot{\tilde{\vec{\Omega}}} \overset{2.V.I.}{=} \vec{N}'^{(e)} = \sum_\alpha \vec{X}'_\alpha \times \vec{F}'^{(e)}_\alpha = \sum_\alpha (\mathbb{S}\tilde{\vec{X}}_\alpha \times \mathbb{S}\tilde{\vec{F}}^{(e)}_\alpha) = \mathbb{S}\left(\sum_\alpha \tilde{\vec{X}}_\alpha \times \tilde{\vec{F}}^{(e)}_\alpha\right) = \mathbb{S}\tilde{\vec{N}}^{(e)} \quad / \mathbb{S}^T$$

$$\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}} + \mathbb{S}^T\mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\dot{\tilde{\vec{\Omega}}} = \mathbb{S}^T\mathbb{S}\tilde{\vec{N}}^{(e)} \quad / \mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = -\tilde{\omega} = \tilde{\vec{\Omega}}\times$$

$$\tilde{\vec{\Omega}} \times (\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}}) + \tilde{\mathbb{I}}\dot{\tilde{\vec{\Omega}}} = \tilde{\vec{N}}^{(e)}$$

Eulerovy setrvačníkové rovnice

$$\varepsilon_{ijk}\tilde{\Omega}_j \tilde{I}_{kl}\tilde{\Omega}_l + \tilde{I}_{ij}\dot{\tilde{\Omega}}_j = \tilde{N}^{(e)}_i \quad \forall i = 1,2,3$$

Tenzor momentu setrvačnosti je symetrický $\tilde{I}_{jk} = \tilde{I}_{kj}$ a proto diagonalizovatelný v ON bázi (polární báze $\tilde{B}$) osy odpovídající vektorům této báze se nazývají hlavní osy setrvačnosti a diagonální členy I_1, I_2, I_3 hlavní momenty setrvačnosti $\tilde{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I}_3 \end{pmatrix}$

Eulerovy setrvačníkové rovnice v hlavních osách setrvačnosti $\boxed{\tilde{I}_i \dot{\tilde{\Omega}}_i + \varepsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_j \tilde{I}_k \tilde{\Omega}_k = \tilde{N}_i^{(e)} \quad \forall i = 1,2,3}$

Setrvačníky volné ($\vec{\tilde{N}}^{(e)} = 0$) – řešitelné analyticky

1) volný sférický ($\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \tilde{I}_3$) setrvačník   Euler rce. $\tilde{I}_j \dot{\tilde{\Omega}}_j = 0 \ \forall j = 1,2,3 \Rightarrow \vec{\tilde{\Omega}}(t) = \text{konst.}$

2) volný symetrický ($\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 \neq \tilde{I}_3$) setrvačník

$$I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\Omega_2 \Omega_3 = 0 \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$
$$I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\Omega_3 \Omega_1 = 0 \quad \Rightarrow \dot{\Omega}_2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_1}\Omega_1 \Omega_3$$
$$I_3 \dot{\Omega}_3 + (\underbrace{I_2 - I_3}_{=0})\Omega_3 \Omega_2 = 0 \quad \Rightarrow I_3 \dot{\Omega}_3 = 0 \Rightarrow \Omega_3(t) = \text{konst.}$$

$$I_1 \ddot{\Omega}_1 + (I_3 - I_1)\dot{\Omega}_2 \Omega_3 = 0$$
$$\ddot{\Omega}_1 + \underbrace{\frac{(I_3 - I_1)^2 \Omega_3^2}{I_1^2}}_{\nu^2 > 0} \Omega_1 = 0$$

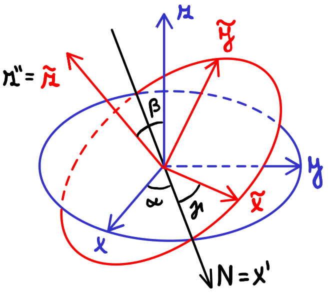
řešení

$$\Omega_1(t) = A \cos(\nu t + \varphi)$$
$$\Omega_2(t) = A \sin(\nu t + \varphi)$$
$$\Omega_3(t) = \text{konst.}$$

3) volný asymetrický ($\tilde{I}_1 \neq \tilde{I}_2 \neq \tilde{I}_3 \neq \tilde{I}_1$) setrvačník – řešení pomocí eliptických funkcí

Setrvačníky těžké ($\vec{\tilde{N}}^{(e)} \neq 0$) – řešitelné případy: vyvážený setrvačník se nehybným těžištěm (Euler)
symetrický setrvačník s pevným bodem na hlavní ose rotace $\tilde{z}$ pod těžištěm (Lagrange)
symetrický setrvačník ($\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = 2\tilde{I}_3$) s pevným bodem v rovině x', y' (Kovalevská)

Eulerovy úhly



$B \sim (x,y,z)$ $\Big\}$ otočení o α kolem osy z $\qquad B' = B\,\mathbb{S}(\alpha)$

$B' \sim (x',y',z')$ $\Big\}$ otočení o β kolem osy x' $\qquad B'' = B'\,\mathbb{S}(\beta)$

$B'' \sim (x'',y'',z'')$ $\Big\}$ otočení o γ kolem osy z'' $\qquad \tilde{B} = B''\,\mathbb{S}(\gamma)$

$\tilde{B} \sim (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$

$$\mathbb{S}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{S}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \qquad \mathbb{S}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{S}$ matice přechodu od B k $\tilde{B}$

$$\tilde{B} = B''\mathbb{S}(\gamma) = B'\mathbb{S}(\beta)\mathbb{S}(\gamma) = B\,\overbrace{\mathbb{S}(\alpha)\,\mathbb{S}(\beta)\,\mathbb{S}(\gamma)}^{\mathbb{S}}$$

$(z,\tilde{z},N)$ pravotočivá soustava

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\Omega}_3 & -\tilde{\Omega}_2 \\ & 0 & \tilde{\Omega}_1 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\omega} = -\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = \dots = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta & \dot{\beta}\sin\gamma - \dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma \\ & 0 & \dot{\beta}\cos\gamma + \dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Jinak (Euler)

$$\vec{\Omega} = \dot{\alpha}\vec{z} + \dot{\beta}\vec{x}' + \dot{\gamma}\vec{\tilde{z}}$$

$$\vec{\Omega} = \dot{\alpha}(\vec{z})_{\tilde{B}} + \dot{\beta}(\vec{x}')_{\tilde{B}} + \dot{\gamma}(\vec{\tilde{z}})_{\tilde{B}}$$

$$(\vec{\tilde{z}})_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\vec{x}')_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ -\sin\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\vec{z})_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta\cos\gamma \\ \cos\beta \end{pmatrix} \qquad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma \\ \dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma \\ \dot{\alpha}\cos\beta + \dot{\gamma} \end{pmatrix}$$

$z \perp N \wedge \tilde{z} \perp N \Rightarrow$ projekce z do roviny $\tilde{x},\tilde{y}$ je kolmá na N $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin\gamma \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos\gamma$

Pohyby: Precese $\alpha = \alpha(t) \wedge \beta,\gamma$ konst. $\quad$ Nutace $\beta = \beta(t) \wedge \alpha,\gamma$ konst. $\quad$ Rotace $\gamma = \gamma(t) \wedge \alpha,\beta$ konst.