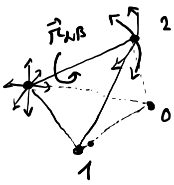
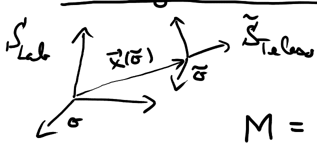
Tuhé těleso N hm. bodů $|\vec r_{\alpha\beta}| = |\vec r_\alpha - \vec r_\beta| = \text{konst.}$

v $\mathbb{R}^3$



$\Delta = \underbrace{3}_{\text{Translační}} + \underbrace{2+1}_{\text{Rotační}} = 6$

Konfigurační prostor

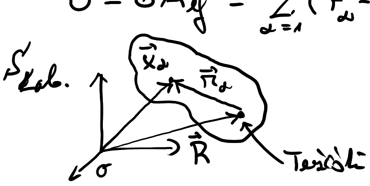


$S \in SO(3)$ $\vec{\tilde x} = \underbrace{S^T}_{\substack{\text{Rotace}\\ SO(3)}}(\vec x - \underbrace{\vec x(\tilde\sigma)}_{\substack{\text{Translace}\\ \mathbb{R}^3}})$

$M = \mathbb{R}^3 \times SO(3) \subset \mathbb{R}^{3N}$

d'Alembertův princip

$$0 = \delta A_{ef} = \sum_{\alpha=1}^{N} (\vec F_\alpha - m_\alpha \ddot{\vec x}_\alpha)\cdot \underbrace{\delta\vec x_\alpha} = \sum_\alpha (\vec F_\alpha - m_\alpha \ddot{\vec x}_\alpha)\cdot(\delta\vec R + \delta\vec\varphi\times\vec r_\alpha) = \Big(\overbrace{\sum_\alpha \vec F_\alpha}^{\vec F} - m_\alpha\ddot{\vec x}_\alpha\Big)\cdot\delta\vec R + \sum \underbrace{(\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec x}_\alpha)}\cdot\underbrace{(\delta\vec\varphi\times\vec r_\alpha)}$$



Virtuální
Posunutí nesmí měnit vzdálenosti bodů tělesa
⇒ O.G. Transformace (Rotace) + Translace $\delta\vec x_\alpha = \underbrace{\delta\vec R}_{\text{Translace}} + \delta\vec\varphi\times\vec r_\alpha$

$\vec x_\alpha = \vec R + \vec r_\alpha$ $|\vec r_\alpha| = \text{konst.}$ $S\vec r_\alpha \sim \delta\vec\varphi\times\vec r_\alpha$

$\exists\, \delta\vec\varphi$ $S\delta\vec\varphi = 1\cdot\delta\vec\varphi$ vlastní vektor S k 1

$$0 = \delta A_{ef} = (\vec F - M\ddot{\vec R})\cdot\delta\vec R + \Big(\underbrace{\sum_\alpha\big[\vec r_\alpha\times(\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec x}_\alpha)\big]}\Big)\cdot\delta\vec\varphi$$

$(\sum m_\alpha\vec x_\alpha)^{\cdot\cdot} = M\ddot{\vec R}$

$$\sum_\alpha(\underbrace{\vec x_\alpha - \vec R})\times(\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec x}_\alpha) = \underbrace{\sum_\alpha \vec x_\alpha\times\vec F_\alpha}_{\vec N} - \overbrace{\sum_\alpha \vec x_\alpha\times m_\alpha\ddot{\vec x}_\alpha}^{\dot{\vec L}} - \vec R\times\sum_\alpha(\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec x}_\alpha)$$

$(\vec x_\alpha\times m_\alpha\dot{\vec x}_\alpha)^{\cdot}$

$$0 = \delta A_{ef} = (\underbrace{\vec F - M\ddot{\vec R}}_{=0})\cdot\underbrace{\delta\vec R} + \big[\underbrace{\vec N - \dot{\vec L}}_{=0} - \vec R\times(\underbrace{\vec F - M\ddot{\vec R}}_{=0})\big]\cdot\underbrace{\delta\vec\varphi}$$

← Př. bez vazeb $\delta\vec R, \delta\vec\varphi$ nezávislé

⇒ $M\ddot{\vec R} = \vec F$ $\dot{\vec L} = \vec N$

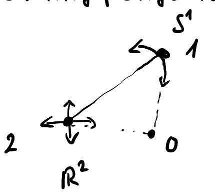
I. a II. Věta Impulsová

Lagrangeův formalismus

$$L = T - U = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{\vec R}^2}_{\substack{\text{Kin. energie}\\ \text{Translace Těžiště}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec\Omega^T I\vec\Omega}_{\substack{\text{Kin. energie}\\ \text{Rotace vůči těžišti}}} - U = \frac{1}{2}M\dot x_{Ti}^2 + \frac{1}{2}\tilde I_{ij}\tilde\Omega_i\tilde\Omega_j - U$$

nejsou první derivace obecných souřadnic – Musí zavést nové Eulerovy úhly

Rovinný pohyb tuhého tělesa $(\sim \mathbb{R}^2)$



$s = 2 + 1 = 3 = 2\cdot 2 - 1$

Translační, Rotační

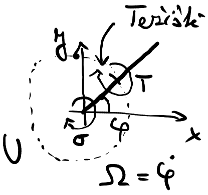
$M = \mathbb{R}^2 \times SO(2) \cong \mathbb{R}^2 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$

$\dim M = 3$ $\quad \square \times O$

Lagrangeova funkce

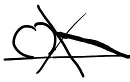
$$L = T - U = \underbrace{\frac{1}{2}M(\dot{x}_T^2+\dot{y}_T^2)}_{\text{Kin. energ.}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_T\dot{\varphi}^2}_{\text{Kin. energ.}} - U$$

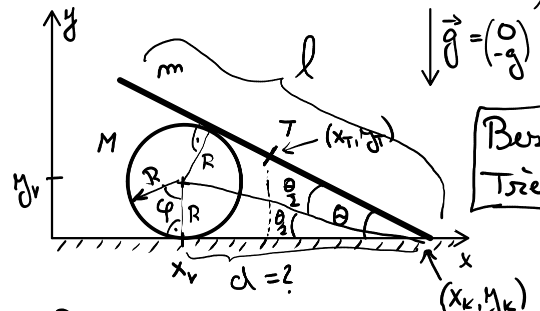
Kin. energie Translace Těžiště; Kin. energ. Rotace vůči ose jdoucí těžištěm



$\Omega = \dot{\varphi}$

67. Určete obecné souřadnice, Lagrangeovu funkci, pohybové rovnice a integrály pohybu pro soustavu tvořenou homogenním válcem a tyčí umístěnou v homogenním tíhovém poli za předpokladu, že mezi objekty nedochází ke tření.





$\vec{g} = \begin{pmatrix}0\\-g\end{pmatrix}$ $\quad U = mgy$

Bez Tření

$I_V = \frac{1}{2}MR^2 \qquad I_T = \frac{1}{12}ml^2$

1) osy

2) $L = \frac{1}{2}M(\dot{x}_V^2+\dot{y}_V^2) + \frac{1}{2}I_V\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_T^2+\dot{y}_T^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mgy_V - mgy_T$

3) Vazby $\quad y_V = R \quad (-1)$

$y_T - \frac{l}{2}\sin\theta = y_K = 0 \quad (-1)$

Tyč je kolmá k válci (-1)

$\boxed{s = 2\cdot 3 - 3 = 3}$

4) obecné souřadnice (x_V, φ, θ) nebo (x_T, φ, θ)

$x_V = x_V \qquad x_T = x_V + d - \frac{l}{2}\cos\theta = x_V + R\cot g\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{l}{2}\cos\theta$

$y_V = R \qquad y_T = \frac{l}{2}\sin\theta$

$\varphi = \varphi \qquad \theta = \theta$

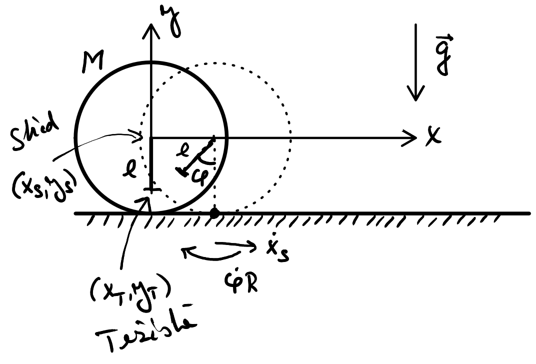
$\frac{R}{d} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \qquad d = R\cot g\left(\frac{\theta}{2}\right)$

IP. $\quad \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \ldots$

cyklické s. $\varphi \Rightarrow p_\varphi$

$x_V \Rightarrow p_{x_V}$

68. Válec s těžištěm mimo svoji osu se v homogenním tíhovém poli může valit bez prokluzování po vodorovné rovině. Určete periodu s jakou bude kmitat, bude-li vychýlen ze své rovnovážné polohy.



Bez Prokluzování

1) osy

2) $L = \frac{1}{2}M(\dot{x}_T^2+\dot{y}_T^2) + \frac{1}{2}I_T\dot{\varphi}^2 - Mgy_T$

Zadání konst.

3) Vazby

(1) $y_S = 0 \qquad \boxed{y_S = y_T + l\cos\varphi = 0}$

(2) Valení - rychlost bodu válce který se dotýká vodorovny je vůči vodorovně nula

$0 = \dot{x}_S - R\dot{\varphi} \quad / \int dt \qquad x_S - R\varphi + C = 0 \qquad \left.\begin{matrix}\varphi = 0\\ x_S = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow C = 0$

$\underline{x_T + l\sin\varphi = x_S = R\varphi} \Leftarrow \boxed{x_S = R\varphi}$

$\boxed{s = 3 - 2 = 1}$

4) obecné souřadnice φ

$x_T = R\varphi - l\sin\varphi \qquad \dot{x}_T = R\dot{\varphi} - l\dot{\varphi}\cos\varphi$

$y_T = -l\cos\varphi \qquad \dot{y}_T = +l\dot{\varphi}\sin\varphi$

$\varphi = \varphi \qquad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}$

$$L = \frac{1}{2}M(R^2\dot{\varphi}^2 - 2Rl\dot{\varphi}^2\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}I_T\dot{\varphi}^2 + Mgl\cos\varphi$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(MR^2\dot{\varphi} - 2MRl\dot{\varphi}\cos\varphi + Ml^2\dot{\varphi} + I_T\dot{\varphi}\right) - \left[+MRl\dot{\varphi}^2\sin\varphi - Mgl\sin\varphi\right] = 0$$

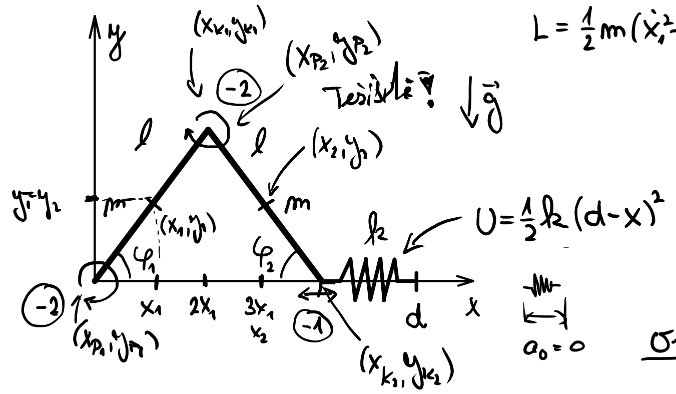
$$M(R^2+l^2)\ddot{\varphi} + I_T\ddot{\varphi} - 2MRl\ddot{\varphi}\underset{1}{\cos\varphi} + 2MRl\dot{\varphi}^2\underset{\varphi}{\sin\varphi} - \cancel{MRl\dot{\varphi}^2\sin\varphi} + Mgl\sin\varphi = 0$$

$\cancel{\dot{\varphi}^2\varphi}$ ~~druhý řád~~ - zanedbáme

Malé kmity (Linearizace) Taylor kolem R.P. $\varphi = 0$: $\quad \sin\varphi \doteq \varphi \quad \cos\varphi \doteq 1$

$$M(R^2+l^2-2Rl)\ddot{\varphi} + I_T\ddot{\varphi} + Mgl\varphi = 0 \qquad \ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{Mgl}{(R-l)^2+I_T}}_{\omega^2}\varphi = 0 \qquad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{Mgl}{(R-l)^2+I_T}}}$$

10. Najděte Lagrangeovu funkci v obecných souřadnicích pro následující soustavu. $I_1 = I_2 = \frac{1}{12} m l^2$



$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 - mgy_1 - mgy_2 - \frac{1}{2}k(d - x_{k_2})^2$$

Vazby $x_{P_1} = 0$ $\quad x_{k_1} = x_{P_2}$ $\quad y_{k_2} = 0$

$y_{P_1} = 0$ $\quad y_{k_1} = y_{P_2}$ $\quad$ (Nedělat).

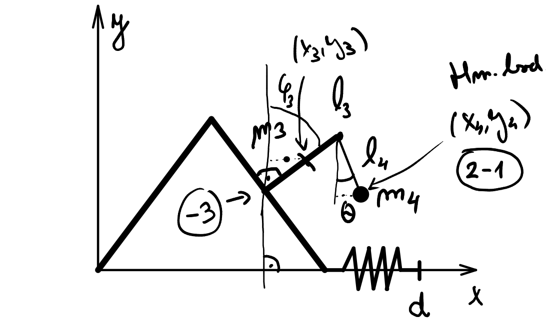
$s = 2 \cdot 3 - 5 = 1$

Obecné souřadnice $\boxed{\varphi \equiv \varphi_1}$

$x_1 = \frac{l}{2} \cos\varphi$ $\quad x_2 = \frac{3}{2} l \cos\varphi$ $\quad x_{k_2} = 2l\cos\varphi$

$y_1 = \frac{l}{2} \sin\varphi$ $\quad y_2 = \frac{l}{2} \sin\varphi$

$\varphi_1 = \varphi$ $\quad \varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$



Pokračujeme

$$\tilde{L} = L + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2 - m_3 g y_3 + \frac{1}{2} m_4 (\dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2) - m_4 g y_4$$

Vazby $\tilde{s} = s + 3 + 2 - 3 - 1 = s + 1$

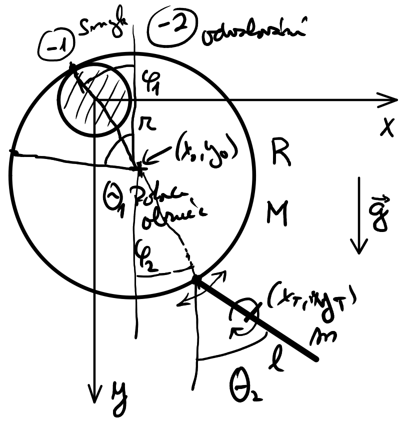
Obecné (φ, Θ)

$x_3 = \frac{3}{2} l \cos\varphi + \frac{l_3}{2} \sin\varphi$ $\quad x_4 = \frac{3}{2} l\cos\varphi + l_3 \sin\varphi + l_4 \sin\Theta$

$y_3 = \frac{l}{2} \sin\varphi + \frac{l_3}{2} \cos\varphi$ $\quad y_4 = \frac{l}{2} \sin\varphi + l_3 \cos\varphi - l_4 \cos\Theta$

$\varphi_3 = \varphi_2 = \varphi$

Určete počet stupňů volnosti a najděte obecné souřadnice pro tuto soustavu v případě, že platí:



a) 1 a 3 $\qquad$ b) 1 a 4 $\qquad$ c) 2 a 3 $\qquad$ d) 2 a 4

1) obruč se po válci smýká bez tření
2) obruč se po válci odvaluje bez prokluzování
3) konec tyče je vázán na obruč
4) konec tyče je vázán na jeden bod obruče

stupně volnosti

a) $s = 3 - 1 + 3 - 1 = 4$ $\qquad$ b) $s = 3 - 1 + 3 - 2 = 3$

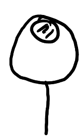
c) $s = 3 - 2 + 3 - 1 = 3$ $\qquad$ d) $s = 3 - 2 + 3 - 2 = 2$

a) obecné souřadnice $(\varphi_1, \Theta_1, \varphi_2, \Theta_2)$

$$L = \frac{1}{2} M(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2} I_0 \dot{\Theta}_1^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}_T^2 + \dot{y}_T^2) + \frac{1}{2} I_T \dot{\Theta}_2^2 - Mgy_0 - mgy_T$$

$x_0 = -r\sin\varphi_1 + R\sin\varphi_1$ $\qquad x_T = x_0 + R\sin\varphi_2 + \frac{l}{2}\sin\Theta_2$

$y_0 = -r\cos\varphi_1 + R\cos\varphi_1$ $\qquad y_T = y_0 + R\cos\varphi_2 + \frac{l}{2}\cos\Theta_2$



S.R.T.