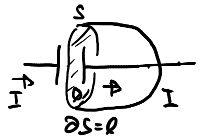
Maxwellovy rovnice (ve vakuu)

I. série $\quad \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Gaussův zákon $\Phi_E = \oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} \overset{\text{Gaussova věta}}{=} \int_V \mathrm{div}\,\vec{E} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$

$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \underbrace{\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} = \mu_0 \vec{j}$ Ampérův zákon $\quad \underbrace{\oint_{\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{l}}_{\text{Stokes. Věta}} - \underbrace{\mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\Phi_E}_{\text{Maxwellův posuvný proud}} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{B}\cdot d\vec{S} - \mu_0\varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \mu_0 I$



II. série $\quad \boxed{\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$

$\vec{B}$ je solenoidální

Faradayův zákon

V prostředí II. série stejná I. $\quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$ (ρ hustota volných nábojů)

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}$ ($\vec{j}$ hustota volných proudů)

$\vec{E}(t,x,y,z)$
$\vec{E}(\vec{r},t)$

Rce pro pohyb náboje $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \underbrace{q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})}_{\text{Lorentzova síla}}$

Kalibrační transformace

$(\varphi, \vec{A}) \longleftrightarrow (\tilde{\varphi}, \tilde{\vec{A}})$ $\to \boxed{\vec{E}, \vec{B}}$

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\vec{A}} &= \vec{A} + \mathrm{grad}\,\Lambda \\ \tilde{\varphi} &= \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned}} \qquad \Lambda = \Lambda(\vec{r},t) \ (\text{každý } C^{(2)})$$

Potenciály $(\varphi, \vec{A})$

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r},t)$
$\varphi = \varphi(\vec{r},t)$

Vektorový potenciál $\quad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

Skalární potenciál $\quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

58) Najděte dva různé vektorové potenciály které popisují konstantní homogenní magnetické pole $\vec{B} = (0,0,\vec{B})$ a ukažte, že spolu souvisí kalibrační transformací.

$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{B}$ ve složkách $\varepsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j}$

$\vec{A} = ?$

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 0 \xrightarrow{\int dz} A_2 = \int \frac{\partial A_3}{\partial y} dz + \tilde{A}_2(x,y)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = 0 \xrightarrow{\int dz} A_1 = \int \frac{\partial A_3}{\partial x} dz + \tilde{A}_1(x,y)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = B \longrightarrow \cancel{\int \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_3}{\partial y} dz} + \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial x} - \left(\cancel{\int \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_3}{\partial x} dz} + \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial y} = B$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial x} - B \xrightarrow{\int dy} \tilde{A}_1(x,y) = \int\left(\frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial x} - B\right) dy + \tilde{\tilde{A}}_1(x)$$

Řešení
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \int \frac{\partial A_3}{\partial x} dz + \int\left(\frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial x} - B\right) dy + \tilde{\tilde{A}}_1(x) \\ \int \frac{\partial A_3}{\partial y} dz + \tilde{A}_2(x,y) \\ A_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Různé kalibrace pole $\vec{B}$

	$\tilde{\tilde{A}}_1(x)$	$\tilde{A}_2(x,y)$	$A_3(x,y,z)$
1	0	$\frac{1}{2}Bx$	0
2	0	0	0

$$\vec{A}_{1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}By \\ \frac{1}{2}Bx \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{A}_{2} = \begin{pmatrix} -By \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Najdeme $\Lambda(\vec{r},t)$ která určí kalibrační Tr. $\quad \tilde{\vec{A}} = \vec{A} + \mathrm{grad}\,\Lambda$

$$\mathrm{grad}\,\Lambda = \tilde{\vec{A}}_{1} - \vec{A}_{2} = \vec{A}_{1} - \vec{A}_{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}By \\ \frac{1}{2}Bx \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{1}{2}By \to \Lambda = \int \frac{1}{2}By\,dx + C(y) = \frac{1}{2}Byx + C(y)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} = \frac{1}{2}Bx \to \frac{1}{2}Bx + \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{2}Bx \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad \text{Konst.}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0 \Rightarrow \Lambda = \Lambda(x,y) \qquad \boxed{\Lambda = \frac{1}{2}Byx + \underset{=0}{\cancel{\text{Konst}}}}$$

59) Určete složky potenciálů z předchozího příkladu ve sférických a cylindrických souřadnicích.

$$\vec{r}\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \vec{e}_r = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}}{\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right\|} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}}{\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right\|} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}}{\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}{r\sin\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$$

$$\vec A_{(r,\theta,\varphi)} = \underbrace{S^{-1}}_{S^T} \vec A_{(x,y,z)}$$

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}Br\sin\theta\sin\varphi \\ \frac{1}{2}Br\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}Br\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{0r} \\ A_{0\theta} \\ A_{0\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -\|- & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Br\sin\theta\sin\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Br\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \\ -Br\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi \\ Br\sin\theta\sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

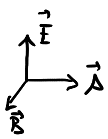
67) Nechť je dána elektromagnetická vlna popsaná potenciály $\vec A(\vec r,t)=\vec a\cos(\overbrace{\vec k\cdot\vec r-\omega t}^{f})$, $\varphi(\vec r,t)=b\cos(\overbrace{\vec k\cdot\vec r-\omega t}^{f})$.
Ukažte, že magnetické pole $\vec B$ je automaticky příčné, zatímco příčnost elektrického pole $\vec E$ vyžaduje splnění podmínky $b=\omega\frac{\vec k\cdot\vec a}{k^2}$. Ukažte, že při splnění této podmínky je $\vec B\perp\vec E$. $\quad \vec a, b \ldots$ konst.

$$\underline{\vec B = \operatorname{rot}\vec A = \vec a\times\vec k\sin(\vec k\vec r-\omega t)} \qquad B_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}a_k(-\sin f)\cdot\frac{\partial(k_m x_m)}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ijk}a_k\sin f\, k_m\delta_{mj}$$

$$= -\varepsilon_{ijk}\underline{a_k}\sin f\,\underline{k_j} = (-\vec k\times\vec a\sin f)_i$$

$$\vec E = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\vec A}{\partial t} = +\vec k b\sin f + \vec a\sin f(-\omega) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -b\sin f\cdot\frac{\partial(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}{\partial x_i} = -k_i b\sin f$$

$$\vec E = \vec k b\sin(\vec k\cdot\vec r-\omega t) - \omega\vec a\sin(\vec k\cdot\vec r-\omega t) = \underline{(b\vec k-\omega\vec a)\sin(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}$$

<u>Rovinná vlna</u> 

$$\vec E = v\cdot\vec B\times\vec s \qquad \vec E\cdot\vec s=0 \qquad \vec B\cdot\vec s=0 \qquad \vec E\cdot\vec B=0 \qquad \text{kde } \vec s=\frac{\vec k}{k}$$

1) $\vec B\cdot\vec s = \underline{(\vec a\times\vec k)\sin f\cdot\frac{\vec k}{k}} = 0$
(příčnost pole $\vec B$)

2) $\vec E\cdot\vec B = \underbrace{(\vec a\times\vec k)}_{\perp\vec a\ \perp\vec k}\cdot(b\vec k-\omega\vec a)\sin^2 f = 0$

3) $\vec E\cdot\vec s = (b\vec k-\omega\vec a)\sin f\cdot\frac{\vec k}{k} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \left(\frac{bk^2}{k}-\frac{\omega}{k}\vec a\cdot\vec k\right)\sin f = 0 \Leftrightarrow bk^2=\omega\vec a\cdot\vec k \Leftrightarrow \underline{b=\frac{\omega\vec a\cdot\vec k}{k^2}}$ $\quad \forall t,\ k\neq 0$

68) Určete kalibrační transformaci, která transformuje potenciály z předchozího příkladu splňující podmínku $b=\omega\frac{\vec k\cdot\vec a}{k^2}$ na tvar odpovídající coulombovské kalibraci $\tilde\varphi=0$, $\tilde{\vec A}=\tilde{\vec a}\cos(\vec k\cdot\vec r-\omega t)$ v níž $\tilde{\vec a}\cdot\vec k=0$.

$$\varphi = \frac{\omega\vec a\cdot\vec k}{k^2}\cos(\vec k\vec r-\omega t) \qquad \tilde\varphi=0 = \varphi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \quad\rightarrow\quad \frac{\partial\Lambda}{\partial t}=\varphi \quad\Rightarrow\quad \underline{\Lambda} = \int\varphi\,dt + C(\vec r) =$$

$$\vec A = \vec a\cos(\vec k\vec r-\omega t) \quad\rightarrow\quad \tilde{\vec A}=? = \vec A+\operatorname{grad}\Lambda$$

$$= \frac{\omega\vec a\cdot\vec k}{-\omega k^2}\sin(\vec k\cdot\vec r-\omega t)+C(\vec r)$$

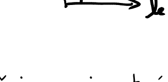
$$= \underline{-\frac{\vec a\cdot\vec k}{k^2}\sin(\vec k\cdot\vec r-\omega t)+C(\vec r)}$$

$$\tilde{\vec A} = \vec A+\operatorname{grad}\Lambda = \vec A+\nabla C(\vec r)-\frac{\vec a\cdot\vec k}{k^2}\cos(\vec k\cdot\vec r-\omega t)\cdot\vec k =$$

$$= \underbrace{\left(\vec a-\frac{\vec a\cdot\vec k}{k^2}\cdot\vec k\right)}_{\tilde{\vec a}}\cos(\vec k\cdot\vec r-\omega t) + \underbrace{\nabla C(\vec r)}_{=0}$$

$$\vec B = \operatorname{rot}\operatorname{grad}C(\vec r)=0 \qquad \tilde{\vec a}\cdot\vec k = \vec a\cdot\vec k-\frac{(\vec a\cdot\vec k)}{k^2}k^2=0$$

$$\vec B = \operatorname{rot}\tilde{\vec A} = \operatorname{rot}\vec A$$

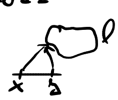


$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}C(\vec r)=0$$

60) Jaký fyzikální význam má veličina $\Gamma=\oint_l\vec A\cdot d\vec l$. Je tato veličina kalibračně invariantní?

<u>Kalibrační Invariance</u>

$$\tilde{\vec A} = \vec A+\operatorname{grad}\Lambda \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial t}=0$$



$$\Gamma = \tilde\Gamma = \oint_l\tilde{\vec A}\cdot d\vec l = \oint_l(\vec A+\operatorname{grad}\Lambda)\cdot d\vec l$$

$$= \underbrace{\oint_l\vec A\cdot d\vec l}_{\Gamma} + \underbrace{\oint_l\operatorname{grad}\Lambda\cdot d\vec l}_{\text{tot. dif.}} = \Gamma+\int_x^{\tilde x}d(\Lambda(l(t))) = \Gamma+\underbrace{[\Lambda(l(t))]_x^{\tilde x}}_{=0} = \Gamma$$

<u>Význam Γ</u>

$$\oint_{l=\partial S}\vec A\cdot d\vec l \underset{\text{Stokes}}{=} \int_S\underbrace{\operatorname{rot}\vec A}_{\vec B}\cdot d\vec S = \int_S\vec B\,d\vec S = \Phi_S$$