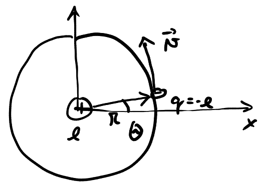
63) Doba života Rutherfordova atomu

Předpokládejte, že se elektron v obalu atomu pohybuje po kruhové dráze o poloměru $R = 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Určete dobu za kterou nastane jeho pád na centrum vlivem radiačního útlumu.



$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q\varphi(\vec r, t)$

$\Downarrow$

$E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + q\varphi(\vec r, t)$

$L = \frac{1}{2} m (\dot r^2 + r^2 \dot\theta^2) - q\varphi(r)$

$\varphi(\vec r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r}$ ← sféricky symetrické ⇒ $\vec L$ moment hybnosti = konst. ⇒ pohyb probíhá v rovině

Pohybové rovnice $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$m\ddot r - m r\dot\theta^2 + q\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$

$\frac{d}{dt}(m r^2 \dot\theta) = 0$

Pohyb po kruhové dráze

$\ddot r = 0 \qquad m r \dot\theta^2 = q\frac{\partial \varphi}{\partial r}$

$\omega = \dot\theta \qquad m r\omega^2 = (-e)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-e}{r^2}$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{m r^3}}$$

$$E = \frac{1}{2} m (r\omega)^2 - e\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r} = \frac{1}{2} m r^2 \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{m r^3} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \underline{-\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}} = E(r)$$

Zrychlující se nabitá částice vyzařuje výkon $W(t) = \frac{2}{3c^3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\dot{\vec v}_0^{\,2}(t_0)$ $\left(\text{VOAF } P(t,r) = \frac{\mu q^2}{6\pi c} a^2(t_r) \right)$

retardovaný čas

pro nás $t = t_0$ ... chceme výkon který vychází od částice

Kruhová dráha $|\vec r| = \text{konst.}$ $\quad \vec r = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \end{pmatrix} \quad \vec v = \dot{\vec r} = \begin{pmatrix} -\omega r\sin\omega t \\ r\omega\cos\omega t \end{pmatrix}$

$$\dot{\vec v} = \vec a = \begin{pmatrix} -\omega^2 r\cos\omega t \\ -\omega^2 r\sin\omega t \end{pmatrix} = \underline{-\omega^2\vec r}$$

$$W(t) = \frac{2}{3c^3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}(\omega^4\vec r^2) = \frac{2}{3c^3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} r^2\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{m^2 r^6} = \underline{\frac{2}{3m^2c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^3\frac{1}{r^4}}$$

$$-\frac{dE}{dt} = W(t) \qquad -\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\underbrace{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}}\frac{1}{r}\right) = \frac{2}{3m^2c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^3\frac{1}{r^4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \underbrace{\frac{4}{3m^2c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2}_{\alpha}\frac{1}{r^4} = \alpha\frac{1}{r^4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = \alpha\frac{1}{r^4} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\alpha\frac{1}{r^2} \Rightarrow r^2\frac{dr}{dt} = -\alpha \quad \Big/ \int_0^{t_c} dt$$

$$\int_0^{t_c} r^2\frac{dr}{dt}dt = \int_R^0 r^2 dr = -\int_0^{t_c}\alpha\, dt \qquad \left[\frac{r^3}{3}\right]_R^0 = -\alpha\left[t\right]_0^{t_c}$$

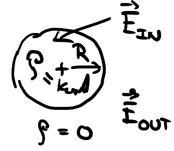
$$0 - \frac{R^3}{3} = -\alpha(t_c - 0) \Rightarrow \underline{t_c = \frac{R^3}{3\alpha}} \doteq 10^{-10}\,\mathrm{s}$$

$m = m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

64) Vypočítejte energii elektromagnetického pole náboje rozloženého s konstantní hustotou v kulovém objemu poloměru R.

hustota energie elektromagnetického pole v mikroskopickém prostředí $\qquad w = \frac{1}{2}(\vec E\cdot\vec D + \vec H\cdot\vec B) = \frac{1}{2}(\varepsilon\vec E^2 + \mu\vec H^2)$

v našem příkladu (elektrostatické pole $\vec H = 0$) ne, nahoru



$$\text{energie } W = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\mu_0 H^2}_{0} dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{\mathbb{R}^3} E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\int_{V_R} E_{IN}^2 dV + \int_{\mathbb{R}^3\setminus V_R} E_{OUT}^2 dV\right) = *$$

Intenzita ele. pole vně koule $r > R$ $\quad \vec E_{OUT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec r \qquad Q = \overbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}^{\text{objem } V_R}\cdot\rho$

uvnitř koule $r \le R$ $\quad \vec E_{IN} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\vec r \qquad q = \frac{4}{3}\pi r^3\cdot\rho = Q\frac{r^3}{R^3}$

$$* = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\int_{V_R}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{Q^2}{R^6}r^2\,dV + \int\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{Q^2}{r^6}r^2\,dV\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2Q^2\left(\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{r^2}{R^6}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr + \int_R^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{r^4}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr\right) =$$

Sférické s.

$dV = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2Q^2\left(\frac{1}{R^6}\underbrace{[\varphi]_0^{2\pi}}_{2\pi}\underbrace{[-\cos\theta]_0^{\pi}}_{-(-1)-(-1)=2}\underbrace{\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R}_{\frac{R^5}{5}} + \underbrace{\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{+\infty}}_{-0+\frac{1}{R}}\underbrace{[\varphi]_0^{2\pi}}_{2\pi}\underbrace{[-\cos\theta]_0^{\pi}}_{2}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2Q^2\left(\frac{1}{5R}4\pi + \frac{4\pi}{R}\right) =$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{1}{R}$$

65) Klasický poloměr elektronu

Určete řádovou velikost elektronu za předpokladu, že celá jeho hmotnost má původ v energii pole.

energie $W = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{1}{R}$ klidová energie elektronu $E_0 = m_e c^2$

elektron  $Q = e$

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{1}{R} = m_e c^2 \quad \Rightarrow R = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}\frac{3}{5}$$

Pro povrchově nabitou kouli $\frac{1}{2}$

Klasický poloměr elektronu $\boxed{r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}} \doteq 2{,}8\cdot10^{-15}\,\mathrm{m}$

66) Thompsonův účinný průřez

Na volný elektron dopadá ve vakuu světelná vlna. Vypočítejte totální účinný průřez rozptylu σ_t definovaný jako poměr celkového vyzářeného výkonu w k hustotě toku energie dopadající vlny. Zanedbejte reakci záření a relativistické efekty.

ÚČINNÝ PRŮŘEZ σ  Terč

odpovídá ploše

Diferenciální účinný průřez $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

Totální účinný průřez $\sigma_t = \int\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)d\Omega$

PRO NÁS = PRO VLNU $\quad \sigma_t = \frac{W}{|\vec S|}$ $\quad \vec S$ ... hustota toku energie

Hustota toku energie (Poyntingův vektor)

$$\vec S = \vec E\times\vec H = \frac{1}{\mu}\vec E\times\vec B = \frac{1}{\mu}\vec E\times\left(\frac{1}{v}\vec n\times\vec E\right) = \frac{1}{v\mu}\vec E\times(\vec n\times\vec E) = \frac{1}{v\mu}\left(\vec n E^2 - \vec E(\underbrace{\vec E\cdot\vec n}_{0})\right) = \frac{E^2}{v\mu}\vec n = \varepsilon v E^2\vec n$$

$\vec E \perp \vec n \rightarrow 0$

v měkkém prostředí $\vec H = \frac{1}{\mu}\vec B$

elektromagnetická vlna $\vec B = \frac{1}{v}\vec n\times\vec E$ směr šíření

$$\frac{1}{v\mu} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\mu} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \varepsilon v$$

Ve vakuu $\quad \vec S = \varepsilon_0 c E^2\vec n \quad v = c$

Pohybová rovnice elektronu v poli dopadající vlny

$$m_e\ddot{\vec r}_0 = q(\vec E + \underbrace{\vec v_0\times\vec B}_{\text{malé}\,\sim 0}) = q\vec E = -e\vec E$$

$$\Rightarrow \dot{\vec v}_0 = \frac{-e\vec E}{m_e}$$

Vyzářený výkon $W(t) = \frac{2}{3c^3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\dot{v}_0^2(t_0)$

$$\sigma_t = \frac{W(t)}{|\vec S(t)|} = \frac{\frac{2}{3c^3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e^2E^2}{m_e^2}\right)}{\varepsilon_0 c E^2|\vec n|} = \frac{2e^4}{3c^4m_e^2 4\pi\varepsilon_0^2} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}\right)^2 4\pi\frac{2}{3} = \boxed{\frac{8}{3}\pi r_0^2}$$