2. DYNAMIKA ČÁSTICE

2.1 Pohybové rovnice

2.1.1 Newtonovy zákony

Dynamika je nauka o silách (řec. dynamos = síla) a dokonce celá fyzika se dříve nazývala silozpyt. Přitom pojem síly je netriviální a v celé přednewtonovské fyzice nebyla síla jasně definována. V roce 1687 zformuloval Newton ve svých Principiích tři zákony dynamiky, na jejichž základě je možné napsat takzvané *pohybové rovnice* a jejich řešením studovat pohyb částic a těles. Před Newtonem byla síla chápána v souladu s tzv. "zdravým lidským rozumem" jako příčina pohybu. Newton ukázal, že síla je příčina *změny* pohybu, změny pohybového stavu tělesa. Uvedeme tři Newtonovy zákony v jejich originálním znění a v pokud možno přesném českém překladu:

Zákon setrvačnosti:

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, pokud a dokud není vtištěnými silami donuceno tento svůj stav změnit.

Zákon síly:

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundam lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Změna pohybu je úměrná hybné vtištěné síle a nastává podél přímky v níž síla působí.

Zákon akce a reakce

Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem; sive: corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Proti každé akci vždy působí stejná reakce; jinak: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.

1. <u>K zákonu setrvačnosti:</u>

Pod Newtonovým výrazem "corpus", těleso, je zde třeba podle smyslu chápat hmotný bod, částici. Síla není ovšem Newtonovými zákony přímo definována, vystupuje zde jako základní pojem, který nabývá významu právě těmito zákony. Tak první zákon říká, že těleso zůstává v klidu nebo se pohybuje setrvačností (latinsky inertia), nepůsobí-li na ně "vtištěné síly". Pod vtištěnými silami rozumíme tzv. *síly pravé*, tj. síly, které jsou částici "vtištěny" jinými tělesy. Jsou to tedy vlastně síly, jimiž jedno těleso působí na druhé a vždy můžeme udat původce takové síly. Nepůsobí-li na částici jiné částice, je částice v klidu nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Takové částici říkáme *bezsilová*. Zákon setrvačnosti není původním Newtonovým objevem, jeho autorem je Galilei, od něhož Newton tento zákon převzal.

Pohyb částice můžeme posuzovat pouze vzhledem k nějaké vztažné soustavě, spojené s nějakým tuhým tělesem. Toto těleso se ovšem může samo pohybovat a tak se pohyb částice může jevit v různých soustavách různě. Zákon setrvačnosti umožňuje zavést *inerciální vztažnou soustavu*, tvořenou například třemi kartézskými osami souřadnic a hodinami. Pozorujeme-li pohyb částice v takové soustavě a zjistíme, že v ní platí zákon setrvačnosti, prohlásíme tuto soustavu za inerciální. Zákon setrvačnosti tedy platí pouze v inerciální vztažné soustavě a inerciání vztažná soustava je ta, v níž platí zákon setrvačnosti. To vypadá jako logický kruh, ale ve fyzice jde o to, zda inerciální vztažná soustava existuje, a to můžeme zjistit jen experimentálně.

Tak vztažná soustava spojená s povrchem Země je inerciální, pokud v ní pozorujeme například krátkodobé mechanické pohyby. Při některých pohybech se však bude měnit pohybový stav částice, aniž by na ni působila jiná tělesa. To svědčí o tom, že tato vztažná soustava není inerciální a musíme přejít například ke vztažné soustavě spojené se Sluncem a rovinou ekliptiky. Vidíme, že vztažná soustava může být inerciální do určité míry, pro určité experimenty. V nejvyšší míře inerciální je soustava, jejíž osy míří ke vzdáleným galaxiím. Bylo by možno uvažovat o soustavě spojené s vesmírem jako celkem, kdybychom mohli tento celek vůči něčemu vymezit. Je docela dobře možné, že dokonale inerciální vztažná soustava vůbec neexistuje. To však neubírá na praktickém významu tohoto pojmu, neboť vždy můžeme požadovaný stupeň inerciálnosti zajistit.

Můžeme jít též jinou cestou a netrvat na používání inerciální vztažné soustavy. V neinerciální soustavě však musíme zavést další síly, které už nebudou pravé, a jimž říkáme *síly setrvačné, zdánlivé, nepravé*. U těchto sil nemůžeme ukázat na jejich původce, nevyvolává je žádné těleso. Budeme se jimi zabývat v odstavci o pohybech v neinerciálních vztažných soustavách. Ukazuje se, že setrvačné síly mají těsný vztah k silám gravitačním a na tomto faktu založil Einstein svou obecnou teorii relativity.

Galilei ukázal, že je-li jedna vztažná soustava inerciální, jsou inerciální všechny vztažné soustavy, které se vůči ní pohybují rovnoměrně přímočaře. Je zvykem volit "bez újmy na obecnosti" "laboratorní", nehybnou vztažnou soustavu S a pohybující se soustavu S' tak, aby odpovídající kartézské osy obou soustav byly souhlasně rovnoběžné a osy x, x' splývaly. Soustava S' se přitom pohybuje ve směru osy x konstantní rychlostí $\vec{v}$ (viz obr. 2.1). Galilei a Newton předpokládali, že soustava S je nehybná vůči "absolutnímu prostoru" a čas plyne stejně v obou soustavách. V jednom okamžiku musí počátky obou soustav splynout; tento okamžik můžeme zvolit za nulový pro odečet času v obou soustavách.

Souřadnice a čas se při přechodu od jedné inerciální soustavě k druhé transformují pomocí **Galileiho transformací**:

$$x' = x - vt\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,, \qquad t' = t\,. \tag{2.1}$$

Z Galileiho transformací plyne zákon skládání rychlostí:

$$v'_x = v_x - v\,, \qquad v'_y = v_y\,, \qquad v'_z = v_z \tag{2.2}$$

obr. 2.1

a dále závěr, že zrychlení částice je ve všech inerciálních soustavách stejné:

$$a'_x \;=\; a_x\;, \qquad a'_y \;=\; a_y\;, \qquad a'_z \;=\; a_z\;. \tag{2.3}$$

K zákonu síly:

Zákon síly umožňuje napsat pohybovou rovnici částice. Mluví se v něm o "změně pohybu", resp. "změně množství pohybu". Je třeba říci, jak měříme množství pohybu, abychom mohli určovat jeho změnu. Newton definoval množství pohybu jako součin hmotnosti částice a její rychlosti $\vec{p} = m\vec{v}$, tedy pomocí veličiny, kterou dnes nazýváme *hybnost*. Je to veličina vektorová. [1]

Je-li tedy změna pohybu úměrna vtištěné síle, můžeme zákon síly zapsat ve tvaru [2]

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \;=\; \frac{d(m\vec{v})}{dt} \;=\; k\vec{F} \tag{2.4}$$

a považujeme-li hmotnost m za konstantní, jako

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \;=\; m\,\vec{a} \;=\; k\vec{F}\;. \tag{2.5}$$

Položíme-li konstantu úměrnosti $k = 1$, dostaneme vztah mezi jednotkami hmotnosti a síly. Měříme-li hmotnost v kilogramech, délku v metrech a čas v sekundách, bude síla

[1] Je možno definovat množství pohybu i jinak - Newtonův současník Leibniz měřil množství pohybu skalární veličinou mv^2, která odpovídá polovině kinetické energie a kterou tenkrát nazývali "živá síla".

[2] Pro změnu hybnosti $\frac{d\vec{p}}{dt}$ byl podle analogie se zrychlením navržen český název "zhybnění", který se však neujal.

měřena v newtonech (N) a dostáváme známou pohybovou rovnici

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \,, \tag{2.6}$$

respektive pro konstantní hmotnost

$$m\,\vec{a} = \vec{F} \,. \tag{2.7}$$

Abychom mohli určit jednoznačné řešení této rovnice, musíme znát počáteční podmínky, polohu a rychlost částice v nějakém okamžiku. Máme tedy najít zákon pohybu částice řešením úlohy

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \,, \quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \,, \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \,. \tag{2.8}$$

Tato Newtonova pohybová rovnice je vektorová a vyjadřuje vlastně soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, jejichž řešení závisí na 6 integračních konstantách. Ty musíme určit z počátečních podmínek. Pro řešení úlohy o pohybu jedné částice tedy máme

$$\begin{array}{llll} m\ddot{x} = F_x & x(t_0) = x_0 & \dot{x}(t_0) = v_{0x} & \\ m\ddot{y} = F_y & y(t_0) = y_0 & \dot{y}(t_0) = v_{0y} & \\ m\ddot{z} = F_z & z(t_0) = z_0 & \dot{z}(t_0) = v_{0z} \,. & \end{array} \tag{2.9}$$

V Newtonových pohybových rovnicích vystupují odvozené fyzikální veličiny *rychlost, zrychlení, hybnost* a *síla*. V soustavě jednotek SI mají rozměr $[v] = \mathrm{LT}^{-1}$, $[a] = \mathrm{LT}^{-2}$, $[p] = \mathrm{LMT}^{-1}$, $[F] = \mathrm{LMT}^{-2}$. Rychlost měříme v jednotkách m.s^{-1}, zrychlení v m.s^{-2}, hybnost v kg.m.s^{-1} a sílu v kg.m.s^{-2}. Pouze jednotka síly má zvláštní název, newton (N).

Newtonova definice hybnosti vyžadovala určit hmotnost částice; tuto hmotnost nazýváme *hmotnost setrvačná*. Pokoušel se o to tak, že hmotnost tělesa definoval pomocí jeho objemu a hustoty a hustotu pak podle počtu atomů v jednotce objemu (což připomíná dnešní pojem látkového množství). Tímto způsobem se mu ovšem hmotnost zavést nepodařilo. Podal však návod, jak určit hmotnost tělesa experimentálně - vážením! Vážením však zjišťujeme tzv. *hmotnost gravitační*, resp. na rotující Zemi hmotnost tíhovou, kombinaci hmotnosti gravitační a setrvačné. Odnikud neplyne, že hmotnost zjišťovaná vážením musí být rovna (nebo alespoň úměrna) hmotnosti, kterou je definována hybnost částice.

A přece je k tomu určitý důvod založený na experimentálním poznatku,že na povrchu Země ve vakuu padají všechna tělesa, bez ohledu na svou hmotnost, vždy se stejným zrychlením; ověřil to právě Galilei. V Newtonově rovnici (**??**) vystupuje na pravé straně síla - ta ovšem také dosud nebyla definována. Za její definici můžeme považovat právě zákon síly, *pokud ovšem udáme nezávislý způsob, jak tuto sílu změřit a matematicky vyjádřit.* Newton proto stanovil další zákon, *zákon gravitační*, podle něhož se silově přitahují dvě částice hmotností m a M:

$$\vec{F} = -\kappa \frac{M\,m}{r^2}\,\vec{r}_0 \,, \tag{2.10}$$

kde $\vec{F}$ je síla, kterou působí částice gravitační hmotnosti M na částici o gravitační hmotnosti m, r je vzdálenost obou částic a $\vec{r}_0$ je jednotkový vektor ve směru spojnice obou částic. Taková síla je *centrální* (míří ve směru spojnice obou částic) a *izotropní* (závisí pouze na vzdálenosti a nikoli na vzájemné poloze obou částic). Konstanta κ se nazývá gravitační konstanta a pokud máme již jednotky pro měření síly a hmotnosti zvoleny, nemůžeme tuto konstantu položit rovnu jedné a musíme ji určit experimentálně.

Na povrchu Země máme $r = R_Z$, kde R_Z je poloměr Země, a gravitační pole zde můžeme považovat přibližně za homogenní. Jak dále uvidíme, podle Gaussova zákona se kulově symetrická gravitující tělesa *navenek* silově chovají jako bodové částice umístěné ve středu koule, tedy jakoby všechna jejich hmotnost zde byla soustředěna. Sílu, kterou Země přitahuje padající jablko můžeme tedy považovat za sílu mezi dvěma hmotnými body. Také tento poznatek odvodil Newton. Proto můžeme velikost gravitační síly na povrchu Země působící na částici hmotnosti m vyjádřit jako

$$F = m\,\kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} = m\,a_g\ , \quad \text{kde} \quad a_g = \frac{\kappa M_Z}{R_Z^2}\ . \tag{2.11}$$

Veličina $\vec{a}_g$ je gravitační zrychlení na povrchu Země. Díky zemské rotaci se toto gravitační zrychlení vektorově sčítá s odstředivým setrvačným zrychlením $\vec{a}_o$ ve výsledné tíhové zrychlení $\vec{g}$, které měříme. [3] Napíšeme-li nyní konečně Newtonovu pohybovou rovnici pro těleso na povrchu Země, na které působí tíhová síla, dostaneme

$$m_s\,\vec{a} = m_g\,\vec{a}_g + m_s\,\vec{a}_o\ , \tag{2.12}$$

Zde jsme označili m_s setrvačnou hmotnost částice a m_g gravitační hmotnost částice. Jsou-li si tyto hmotnosti vždy úměrné (tj. platí-li pro těleso z jakéhokoli materiálu vždy, že zdvojnásobí-li se jeho setrvačná hmotnost, zdvojnásobuje se také jeho gravitační hmotnost), můžeme je měřit ve stejných jednotkách a učinit sobě rovnými. Jsou-li si tyto dva druhy hmotnosti sobě rovny, můžeme je ovšem ve vztahu (**??**) všechny krátit a dostaneme pro všechna tělesa

$$\vec{a} = \vec{a}_g + \vec{a}_o = \vec{g}\ . \tag{2.13}$$

Experimentální fakt, že všechna tělesa nezávisle na materiálu z něhož jsou zhotovena a na jejich hmotnosti padají v tíhovém poli s týmž zrychlením, tedy indikuje, že setrvačná a gravitační hmotnost jsou si úměrné, můžeme je vyjadřovat v týchž jednotkách a hmotnost tělesa můžeme určovat vážením. Pak není třeba příliš hloubat nad tím, co to hmotnost vlastně je ani zavádět různé krkolomné definice a pojem hybnosti má přesně určený význam.

Rovnost setrvačné a gravitační hmotnosti je zjednodušenou formulací tzv. **principu ekvivalence**, na němž Einstein později založil svou teorii gravitace, obecnou teorii relativity. Newton si byl vědom toho, že tento Galieiho poznatek je třeba experimentálně co nejpřesněji ověřit. Místo pokusů s volným pádem prováděl experimenty s kyvadly a zjišťoval zda doba kyvu kyvadla skutečně nezávisí na jeho hmotnosti bez ohledu na to z jakého materiálu je zátěž kyvadla zhotovena.

Při ověřování úměrnosti setrvačné a gravitační hmotnosti obyčejně určujeme tzv. Eötvösův poměr

$$\eta = \frac{2|\left(\frac{m_g}{m_s}\right)_1 - \left(\frac{m_g}{m_s}\right)_2|}{|\left(\frac{m_g}{m_s}\right)_1 + \left(\frac{m_g}{m_s}\right)_2|}\ ,$$

[3] O odstředivém setrvačném zrychlení budeme mluvit v odstavci o neinerciálních vztažných soustavách. Tomuto zrychlení odpovídá odstředivá síla velikosti ma_o, kde m je setrvačná hmotnost částice.

kde indexy 1 a 2 se vztahují ke dvěma různým materiálům. Princip ekvivalence platí, je-li Eötvösův poměr roven nule. Od Newtonových dob byl tento poměr mnohokrát experimentálně stanovován, jak pomocí kyvadel, tak s použitím torzních vah a torzních kmitů. Uvedeme orientačně výsledky některých experimentů:

Newton (1687), kyvadla $\eta \leq 10^{-3}$

Bessel (1827), kyvadla $\eta \leq 2.10^{-5}$

Potter (1923), kyvadla $\eta \leq 10^{-6}$
Eötvös (1890), torzní váhy, koule z platiny a osmi různých materiálů, po otočení o 180^0 by v tíhovém poli měla nastat výchylka opačným směrem, $\eta \leq 5.10^{-8}$.

Dicke, Roll, Krotkov (1963), torzní váhy, porovnávání výchylky při západu a východu Slunce $\eta \leq 3.10^{-11}$

Braginskij aj. (1971), měření periody torzních kmitů, duralové tyčky délky 8 cm, platinová a hliníková závaží celková hmotnost torzního systému 3,9 g, závěs wolframový drátek délky 2,9 m a průměru 5 μm, perioda kmitů 5 h 20 min, vše ve skleněné komoře ve vakuu 10^{-6} Pa, elektrické stínění, tepelná stabilizace, odečet laserovým paprskem $\eta \leq 0,9.10^{-12}$.

Rovnost setrvačné a gravitační hmotnosti je tedy ověřena se značnou přesností, i když v mezích experimentálních možností.

Newtonova vektorová pohybová rovnice (**??**), resp. (**??**), tedy přirovnává změnu hybnosti částice působící síle. Protože zrychlení částice je stejné ve všech inerciálních vztažných soustavách, bude v nich mít levá strana pohybové rovnice stejný tvar. Síla vystupující na pravé straně vyjadřuje působení dalších částic, například gravitační. Tato síla může záviset na vzdálenosti působících částic nebo na jejich vzájemných rychlostech. Bude tedy zůstávat také stejná, přejdeme-li od jedné inerciální soustavy k druhé. Tvar pohybových rovnic je tedy ve všech inerciálních vztažných soustavách stejný, a to je obsahem

Galileiho principu relativity:
Zákony mechaniky mají stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách.

Podle tohoto hlubokého fyzikálního principu nemůžeme inerciální vztažné soustavy od sebe odlišit žádnými mechanickými experimenty a pozorováním mechanických pohybů. Budeme-li provádět například experimenty s volným pádem nebo s kyvadlem ve stojícím nebo v jedoucím vlaku, nemůžeme z nich stanovit, jestli je vlak v klidu nebo v pohybu. Galilei sice neznal vlaky, ale měl dokonce lepší příklad - uvažoval kajutu bez oken na plachetnici, která stojí nebo v mírném větru rovnoměrně přímočaře klouže po vodní hladině.

Princip relativity hraje ve fyzice velmi důležitou úlohu. V moderní fyzice jej Einstein rozšířil na všechny fyzikální děje (nejen mechanické) a nahradil Galileiho transformace mezi inerciálními soustavami transformacemi Lorentzovými. V obecné teorii relativity pak zobecnil tento princip i na neinerciální vztažné soustavy a podle principu ekvivalence popsal neinerciální, setrvačné síly ekvivalentním gravitačním polem.

K zákonu akce a reakce

Zákon akce a reakce umožňuje přejít od mechaniky pohybu jedné částice k mechanice soustavy více částic. V ní pak můžeme rozlišovet síly vnější, externí kterými na soustavu působí jiná tělesa mimo ni, a síly vnitřní, interní, kterými mezi sebou působí částice soustavy navzájem. Pokud na soustavu částic vnější síly nepůsobí, nazýváme takovou soustavu *izolovanou.* Tak naše sluneční soustava je relativně dobře izolovaná soustava.

Vnitřní síly v soustavě se podřizují zákonu akce a reakce, působí-li jedna částice na druhou, působí druhá na první stejně velkou silou opačného směru. To ovšem musí platit v každém okamžiku a dojde-li ke změně silového působení, musí následovat okamžitá reakce. Síly v Newtonově mechanice působí tedy na dálku okamžitě (říká se tomu "actio in distans"), vzájemné působení částic se šíří prostorem nekonečně rychle. Podle teorie relativity se však interakce může přenášet nejvýše rychlostí světla ve vakuu c.

Souhrnně tedy můžeme říci, že na Newtonových zákonech byla vybudována první vědecká fyzikální teorie, Newtonova mechanika. Je to teorie vektorová, jejími základními pojmy jsou hybnost a síla a její zákony platí stejně ve všech inerciálních vztažných soustavách, které jsou vzájemně spojeny Galileiho transformacemi. O silách v Newtonově mechanice předpokládáme, že jsou **centrální**, tj. míří podél spojnice silově vzájemně působících částic, **izotropní**, tj. závisí jen na vzdálenosti, případně vzájemných rychlostech částic a nikoli na směru v prostoru a **okamžité**, šíří se nekonečnou rychlostí. Newton měl na mysli především síly gravitační, které klesají se vzdáleností nepřímo úměrně jejímu čtverci. Lze říci, že Newtonova mechanika byla v podstatě "šita" na pohyby těles ve sluneční soustavě a umožnila zde dosáhnout vynikajících výsledků. Dokonce zavládl názor, že řešením Newtonových pohybových rovnic pro všechny částice ve vesmíru bychom mohli přesně určit všechny jejich polohy a rychlosti v minulosti i budoucnosti a tedy vlastně stav světa v kterémkoli okamžiku. Vyžadovalo by to ovšem znát počáteční podmínky, polohy a rychlosti všech částic v nějakém okamžiku. Takový světový názor, který se snaží vysvětlit všechny děje na základě přesně určeného mechanického pohybu, který pohlíží na svět jako na obrovský hodinový stroj, se nazývá *mechanický determinismus.* Moderní fyzika však ukázala, že svět je mnohem složitější, než jak jej popisuje Newtonova mechanika.

2.1.2 Impuls síly, práce, výkon, energie

Impuls síly $\vec{I}$ vyjadřuje časový účinek síly. Působí-li na částici konstantní síla po dobu $\tau = t_2 - t_1$, je impuls síly dán součinem této síly a času:

$$\vec{I} \ = \ \vec{F}\,\tau \ = \ m\,\vec{a}\,\tau \ = \ m\,\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\tau}\,\tau \ = \ m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \ = \ \vec{p}_2 - \vec{p}_1\ .$$

Vidíme, že *impuls síly je roven změně hybnosti částice.*

Je-li síla časově proměnná, je impuls síly definován jako integrál

$$\vec{I} \ = \ \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \ = \ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt \ = \ \int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} \ = \ \vec{p}_2 - \vec{p}_1\ . \tag{2.14}$$

obr. 2.2 obr. 2.3

Síla, jejíž impuls určujeme, bývá často krátkodobá, jako např. při rázu dvou těles, a neznáme ani její časový průběh. Potom můžeme zavést střední sílu působící na těleso vztahem

$$< \vec{F} > = \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \ , \tag{2.15}$$

takže impuls síly bude roven $\vec{I} =< \vec{F} > \tau$. Odpovídá to situaci na obr. 2.2, kde nahradíme vyšrafovanou plochu integrálu plochou obdélníka. Impuls síly má tedy týž rozměr a měříme jej v týchž jednotkách jako hybnost.

Práce A vyjadřuje dráhový účinek síly. Působí-li na dráze s podél trajektorie na částici konstantní síla, bude práce dána součinem velikosti síly a dráhy:

$$A \ = \ F \ s \ = \ m \ a \ s \ = \ m \ \frac{v_2 - v_1}{\tau} \ < v > \ \tau \ = \ m \ (v_2 - v_1) \ \frac{v_2 + v_1}{2} \ = \ \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \ .$$

Veličinu

$$T \ = \ \frac{1}{2} \ m \ v^2 \ = \ \frac{p^2}{2m} \tag{2.16}$$

nazveme **kinetickou energií částice**. Vidíme tedy, že *práce síly nad částicí podél dráhy je rovna změně kinetické energie částice*. Je-li síla časově proměnná a míří li pod obecným úhlem k tečnému vektoru trajektorie (obr. 2.3), definujeme práci jako integrál

$$A \ = \ \int_1^2 \vec{F} \ \cdot \ d\vec{r} \ = \ \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \ \cdot \ \vec{v} dt \ = \ m \ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \ \cdot \ \vec{v} dt \ = \ \frac{m}{2} \ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(v^2)}{dt} dt \ =$$

$$= \ \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \ = \ T_2 - T_1 \ . \tag{2.17}$$

Práce a kinetická energie jsou tedy dvě fyzikální veličiny, které mají v soustavě SI fyzikální rozměr $\mathrm{L}^2\mathrm{MT}^{-2}$ a měří se v jednotkách kg.m^2.s^{-2}; tato jednotka se nazývá joule (J). Kinetická energie je přitom veličina stavová (popisuje určitý stav částice), zatímco práce charakterizuje určitý proces (přechod z jednoho stavu do druhého).

Výkon N je práce za jednotku času; protože $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, máme

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \,. \tag{2.18}$$

Výkon má rozměr $\mathrm{L^2MT^{-3}}$ a měří se v jednotkách $\mathrm{kg.m^2.s^{-3}}$ nazývaných watt (W).

Důležitým případem sil jsou síly potenciální. Existuje-li v prostoru silové pole, t.j. působí-li na částici v každém bodě a v každém okamžiku síla $\vec{F}(x, y, z, t)$, potom může nastat případ, že tato síla může být vyjádřena jako gradient nějaké skalární funkce $U(x, y.z, t)$ nazývané *potenciální funkce*:[4]

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \,. \tag{2.19}$$

Taková síla se nazývá **potenciální**.

Pokud potenciální funkce nezávisí explicitně na čase, nazývá se **potenciální energií** a jí odpovídající síly **konzervativní**. Totální diferenciál potenciální energie můžeme zapsat ve tvaru

[4]Operátor ∇ nazývaný "nabla" je formální vektor vytvořený ze symbolů pro parciální derivace $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{dx}, \frac{\partial}{dy}, \frac{\partial}{dz}\right)$.

$$dU \;=\; -\; \vec{F}\cdot d\vec{r}\,. \qquad (2.20)$$

Znaménko minus je voleno proto, abychom prací konanou vnějšími silami *proti* silám pole zvyšovali potenciální energii částice.

Známe-li tedy potenciální energii částice jako funkci souřadnic, určíme snadno sílu na částici působící a naopak:

$$\vec{F} \;=\; -\;\nabla U\;, \qquad U \;=\; -\;\int \vec{F}\cdot d\vec{r} \;+\; C\;. \qquad (2.21)$$

Potenciální energie je určena s přesností na additivní konstantu a můžeme ji volit rovnu nule v libovolně vybraném bodě. Pokud složka síly F_x závisí jen na jedné souřadnici $F_x(x)$ a tato funkce je integrabilní, lze vždy najít potenciální energii $U(x)$ a taková síla je konzervativní:

$$F_x \;=\; -\;\frac{dU}{dx}\;, \qquad U \;=\; -\;\int F_x dx \;+\; C\;. \qquad (2.22)$$

Vyjádříme nyní práci konzervativních sil:

$$A \;=\; \int_1^2 \vec{F}\;\cdot\; d\vec{r} \;=\; -\;\int_1^2 dU \;=\; U_1 - U_2 \;=\; T_2 - T_1\;. \qquad (2.23)$$

Odtud plyne, že v poli konzervativních sil zůstává v každém bodě trajektorie součet kinetické a potenciální energie konstantní:

$$E \;=\; T_1 + U_1 \;=\; T_2 + U_2 \;=\; \text{konst}\;. \qquad (2.24)$$

Tuto veličinu nazýváme **energie** částice a měříme ji v joulech. V konzervativním silovém poli se tedy energie částice při pohybu zachovává (konzervuje). Z (**??**) rovněž plyne, že *práce konzervativních sil je rovna rozdílu potenciálních energií v počátečním a koncovém bodě a nezávisí na tom, po jaké trajektorii se částice přemisťovala. Pohybuje-li se částice po uzavřené trajektorii, je práce konzervativních sil nulová.*

Síly mohou být též nekonzervativní, jako například tzv. **disipativní** síly závislé na rychlosti částice (síly tření). V takovém případě se při pohybu částice mechanická energie nezachovává a částečně se předává okolí v podobě tepla, mění se ve vnitřní energii těles. [5] Protože tato vnitřní, tepelná energie nemůže být zpětně beze zbytku přeměněna na energii mechanického pohybu, mluvíme o *disipaci*, rozptylování energie. Působí-li tedy na částici jak konzervativní, tak disipativní síly, bude jejich práce

$$A \;=\; \int_1^2 \vec{F}_{konz}\;\cdot\; d\vec{r} \;+\; \int_1^2 \vec{F}_{dis}\;\cdot\; d\vec{r} \;=\; U_1 - U_2 + \int_1^2 \vec{F}_{dis}\;\cdot\; d\vec{r} \;=\; T_2 - T_1\;, \qquad (2.25)$$

takže

$$E_2 - E_1 \;=\; \int_1^2 \vec{F}_{dis}\;\cdot\; d\vec{r}\,. \qquad (2.26)$$

Změna energie částice je rovna práci disipativních sil.

[5] Práce a teplo jsou tedy dvě veličiny charakterizující *proces* předávání energie.

obr. 2.4 obr. 2.5

2.1.3 Řešení pohybových rovnic

Nejjednodušší případ nastává, závisí-li pohyb částice jen na jedné souřadnici, probíhá-li například podél osy x. Mluvíme o **jednorozměrném pohybu**. Pak řešíme pouze jednu pohybovou rovnici s počátečními podmínkami. Budeme-li první z pohybových rovnic (**??**) dělit hmotností, dostaneme úlohu najít jednoznačné řešení obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami:

$$\ddot{x} = f(t,\ x,\ \dot{x})\ , \quad x = x_0\ , \quad \dot{x} = v_0\ , \quad \text{při} \quad t = t_0\ . \tag{2.27}$$

Funkce $f(t,\ x,\ \dot{x})$ je síla vztažená k jednotce hmotnosti (zrychlení).

V teorii diferenciálních rovnic se dokazuje, že tato úloha má jednoznačné řešení, je-li $f(t, x, \dot{x})$ spojitá funkce všech tří proměnných v příslušném oboru hodnot a má-li spojité parciální derivace. Fyzikové zpravidla neověřují, zda tyto podmínky jsou splněny, a tak někdy může dojít k překvapením. Bude-li například $f = x^{1/3}$, zjistíme, že pro nezáporná t má rovnice dvě různá řešení: $x = 0$ a $x = \left(\frac{1}{6}\right)^{3/2} t^3$. To je ovšem proti přírodě, pohyb nemůže probíhat současně dvojím způsobem. Důvodem této nesrovnalosti je to, že funkce $x^{1/3}$ nemá parciální derivaci podle x v bodě $x = 0$ (obr. 2.4).

I když řešení úlohy o jednorozměrném pohybu existuje, může být obtížné ho najít. Uvedeme způsoby řešení této úlohy ve zvláštních případech, kdy síla je funkcí jen jedné proměnné.

1. **Síla konstantní**

Dostáváme rovnici $\ddot{x} = a_x =$ konst pro rovnoměrně zrychlený pohyb, jímž jsme se zabývali v první kapitole (vztahy (1.20)).

2. **Síla závislá na čase**

Dostáváme rovnici $\ddot{x} = a_x(t)$ pro nerovnoměrný pohyb, jímž jsme se zabývali v první kapitole (vztahy (1.21)).

3. **Síla závislá na poloze**

To je případ konzervativních sil $\ddot{x} = f(x)$. Upravíme pohybovou rovnici na tvar

$$\ddot{x} \;=\; \frac{d\dot{x}}{dx} \;=\; \frac{d\dot{x}}{dx}\,\frac{dx}{dt} \;=\; \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} \;=\; \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) \;=\; f(x)\;.$$

Vyjádříme-li konzervativní sílu pomocí potenciální energie, máme $f(x) = \frac{1}{m}F_x = -\frac{1}{m}\frac{dU}{dx}$, a tedy

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) \;=\; -\frac{1}{m}\frac{dU}{dx}\;.$$

Po zintegrování a vynásobení m máme

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) \;=\; E \;=\; \text{konst}\;. \tag{2.28}$$

To je ovšem zákon zachování energie v poli konzervativních sil a mohli jsme ho napsat rovnou, bez integrování pohybové rovnice. Konstanta E nám tedy poskytuje první integrační konstantu (integrál pohybu).

Rovnice (**??**) je již diferenciální rovnicí prvního řádu, z níž můžeme vypočítat $\dot{x}$, provést separaci proměnných a zintegrovat:

$$\dot{x} \;=\; \frac{dx}{dt} \;=\; \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}\;, \quad dt \;=\; \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}}\;,$$

$$t \;=\; t_0 \;\pm\; \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}}\;. \tag{2.29}$$

Tímto způsobem jsme úlohu vyřešili do konce, "v kvadraturách". Museli bychom nyní znát konkretní tvar potenciální energie $U(x)$ a spočítat integrál (**??**), což se může (ale také nemusí) podařit v analytické formě, v elementárních nebo speciálních funkcích. Volba mezí integrálu (**??**) automaticky zaručuje splnění počáteční podmínky pro x.Tak dostaneme jednoznačný zákon pohybu ve tvaru $t = t(x)$. Je už jen otázkou vkusu přejít k inverzní funkci $x(t)$, podaří-li se nám to.

V integrálu (**??**) vystupuje jednak dvojí znaménko, které ukazuje, že pohyb může probíhat v kladném i záporném směru času, a dále odmocnina ve jmenovateli integrálu, která musí být nezáporná. To klade omezení na oblast souřadnice x, v níž může pohyb probíhat. Protože kinetická energie částice je vždy nezáporná, musí být celková energie E větší nebo rovna potenciální energii $U(x)$:

$$E \;\geq\; U(x)\;. \tag{2.30}$$

Na obr. 2.5 je znázorněn obecný průběh potenciální energie a vyšrafováním vyznačeny oblasti, kde je pohyb možný. Oblast II je takzvaná **potenciálová jáma**, v níž probíhá

finitní pohyb (souřadnice x je omezena), v oblasti IV probíhá **infinitní pohyb** (částice se může přiblížit z nekonečna a opět se do nekonečna vzdálit). V oblastech I a III pohyb možný není. Oblast III je **potenciálový val (bariéru)**, jíž částice nemůže proniknout. [6]

4. **Síla závislá na rychlosti**

Závisí-li síla na rychlosti, není konzervativní a nemůžeme použít zákon zachování mechanické energie. Pohybovou rovnici $\ddot{x} = f(\dot{x})$ řešíme separací proměnných:

$$\ddot{x} \;=\; \frac{dv_x}{dt} \;=\; f(v_x)\;, \qquad dt \;=\; \frac{dv_x}{f(v_x)}\;, \tag{2.31}$$

odkud

$$t \;=\; t_0 + \int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{f(v_x)}\;; \tag{2.32}$$

určíme-li inverzní funkci $v_x(t) = g(t)$, máme

$$x \;=\; x_0 + \int_{t_0}^{t} g(t)dt\;. \tag{2.33}$$

Úloha (síla závislá na čase)

Nechť síla závisí na čase harmonicky jako $F_x = mk\sin\omega t\;,\quad k,\omega > 0$. Určete zákon pohybu částice při počátečních podmínkách $t = 0,\ x = 0,\ \dot{x} = 0$ a stanovte počáteční podmínky tak, aby pohyb byl finitní.

Po dvojím integrování rovnice $\ddot{x} = k\sin\omega t$ s použitím počátečních podmínek dostaneme

$$\dot{x} \;=\; -\frac{k}{\omega}\cos\omega t + C_1 \;=\; \frac{k}{\omega}(1-\cos\omega t)$$

$$x \;=\; -\frac{k}{\omega^2}\sin\omega t + C_1 t + C_2 \;=\; \frac{k}{\omega}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)\;.$$

Tento pohyb je infinitní, částice se od počátku stále vzdaluje (obr. 2.6 a).

Finitní pohyb zřejmě nastane, bude-li $C_1 = 0$, tj. při počátečních podmínkách $t = 0,\ x = 0,\ \dot{x} = -\frac{k}{\omega}$. Potom (obr. 2.6 b)

$$\dot{x} = -\frac{k}{\omega}\cos\omega t\;, \qquad x = -\frac{k}{\omega^2}\sin\omega t\;.$$

Úloha (pohyb s třením)

Při pohybu tělesa s třením nebo s odporem prostředí může síla záviset na rychlosti různým způsobem. Při pomalém pohybu tělesa na podložce (smýkání) uvažujeme sílu tření konstantní a úměrnou kolmé tlakové síle s koeficientem smykového tření, který závisí

[6] To platí jen v klasické mechanice. V mikrosvětě, kde platí zákony kvantové mechaniky a částice mají vlnové vlastnosti, může částice potenciální bariérou proniknout. Tento kvantový jev se nazývá *tunelový*.

obr. 2.6

jen na drsnosti troucích se ploch. Při rychlejším pohybu uvažujeme sílu tření úměrnou buď první mocnině rychlosti nebo druhé mocnině rychlosti. Podobně při pohybu tělesa v odporujícím prostředí, vzduchu či vazké kapalině. Při malých hodnotách Reynoldsova čísla $R = \frac{va}{\nu}$, kde a je rozměr tělesa, v jeho rychlost a ν kinematická vazkost prostředí, je síla tření úměrna první mocnině rychlosti. Pro pohyb malé kuličky padající pomalu ve vazké kapalině je možno tuto sílu určit přesně jako $F_S = 6\pi\eta a v$, kde $\eta = \rho\nu$ je dynamická vazkost, součin hustoty a kinematické vazkosti. Je to tzv. *Stokesův vzorec* a popisuje například odpor prostředí při pádu malé kuličky (broku) v oleji. Při pohybu většími rychlostmi ve vzduchu se spíše uplatní *Newtonův vzorec* $F_N = \frac{1}{2}C\rho S v^2$, kde S je příčný průřez tělesa, ρ hustota prostředí a C koeficient závisející na tvaru tělesa (pro kouli bereme $C = 0,48$, pro polokulovou slupku (padák) $C = 1,33$, pro aerodynamický tvar tělesa $C = 0,01$). V tomto případě nejde vlastně o tření, ale o předávání kinetické energie tělesa pohybujícímu se prostředí. Experimenty ukazují, že například při letu kulky je odporová síla úměrná čtverci rychlosti do hodnot 200 m.s^{-1}, pak prudce roste a od 400 m.s^{-1} opět klesá.

Mějme nyní těleso pohybující se rychlostí v_0, na něž působí jen síla tření úměrná první nebo druhé mocnině rychlosti. V prvním případě může jít o automobil, který dojíždí s vypnutým motorem, ve druhém o plachetnici, která doplouvá se svinutými plachtami. Máme tedy počáteční podmínky $t = 0,\ x = 0,\ \dot{x} = v_0$. V prvním případě řešíme rovnici

$$\ddot{x} = -kv_x\ ,\quad k > 0\ ,\quad dt = -\frac{1}{k}\,\frac{dv_x}{v_x}$$

s výsledkem

$$v_x = v_0 \mathrm{e}^{-kt}\ ,\qquad x = \frac{v_0}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\ .$$

Vidíme, že rychlost s časem exponenciálně klesá a těleso se postupně blíží k bodu o souřadnici $x = v_0/k$.

Ve druhém případě budeme řešit rovnici [7]

$$\ddot{x} = -\kappa v_x^2\ , \kappa > 0\ ,\quad dt = -\frac{1}{\kappa}\,\frac{dv_x}{v_x^2}$$

[7] κ *není* gravitační konstanta!

s výsledkem

$$v_x = \frac{v_0}{1+\kappa v_0 t} \; , \qquad x = \frac{1}{\kappa}\ln(1+\kappa v_0 t) \; .$$

Vidíme, že s rostoucím časem se souřadnice x neblíží k žádné limitě, doplouvající plachetnice za dostatečně dlouhou dobu překročí každou vymezenou hranici.

Úloha (volný pád a šikmý vrh s odporem vzduchu)

Uvažujme volný pád tělesa v prostředí, jehož odpor můžeme popsat silu úměrnou první mocnině rychlosti. Pak řešíme úlohu

$$\ddot{z} = -g - kv_z \; , \quad t=0 \; , \quad z=h \; , \quad \dot{z}=0$$

s výsledkem

$$v_z = \frac{g}{k}(\mathrm{e}^{-kt}-1) \; , \qquad z = h - \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(1-\mathrm{e}^{-kt}) \; .$$

Snadno ověříme, že při malém odporu v limitě $k \to 0$ dostáváme výsledek pro volný pád ve vakuu a za dostatečně dlouhou dobu se rychlost pádu ustálí na $v_z = -g/k$. Roste-li odporová síla s rychlostí, dříve či později nastane okamžik, kdy se její velikost vyrovná působící síle tíhové a další pohyb je již rovnoměrný. Tak rychlost parašutisty se po rozevření padáku brzy ustálí asi na 6 m.s^{-1}, což zajišťuje bezpečný dopad. V tomto případě bychom však museli řešit úlohu s odporovou silou úměrnou druhé mocnině rychlosti, tj. rovnici

$$\ddot{z} = -g + \kappa v_z^2$$

(odporová síla míří v kladném směru osy z!). Řešení je poněkud obtížnější a lze je nalézt v knize V.Trkala Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa. Dostáváme

$$v_z = -\sqrt{\frac{g}{\kappa}}\mathrm{tgh}\;(\sqrt{\kappa g}t) \approx -gt(1-\frac{1}{3}\kappa g t^2)$$

$$z = h - \frac{1}{\kappa}\mathrm{lncosh}\;(\sqrt{\kappa g}t) \approx h - \frac{1}{2}gt^2(1-\frac{1}{6}\kappa g t^2) \; .$$

Podobně bychom mohli řešit úlohu o vrzích v tíhovém poli s odporem vzduchu a nacházet tvar balistických křivek. Bude-li odporová síla úměrná první mocnině rychlosti, dostaneme parametrické vyjádření balistické křivky jako

$$x = \frac{v_{0x}}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt}) \; , \quad z = \left(\frac{v_{0z}}{k} + \frac{g}{k^2}\right)(1-\mathrm{e}^{-kt}) - \frac{g}{k}t \; .$$

Na obr. 2.7 jsou trajektorie šikmého vrhu tělesa s počáteční rychlostí 100 m.s^{-1} vrženého pod úhlem 35^0 a 45^0. Odpor vzduchu je přitom předpokládán úměrný druhé mocnině rychlosti s koeficientem $\kappa = 4.10^{-3}$ m^{-1}. Všimněte si, že těleso doletí pod úhlem 35^0 *dále* než pod úhlem 45^0. Ve vakuu by dosáhlo maximální dálky pod úhlem 45^0 rovné asi 1 000 m. Pohyby těles ve vzduchu mohou být dále komplikovány jeho pohybem , rozdílnou

obr. 2.7

hustotou a také případnou rotací těles, které vede k jejich snášení z počáteční roviny vrhu (*Magnusův jev*). O vlivu rotace Země na pohyb těles pojednáme v odstavci 2.4.

2.2 Pohyb kmitavý

2.2.1 Harmonický oscilátor

Uvažujme jednorozměrný pohyb částice hmotnosti m například podél osy x, na níž působí síla $F_x = -kx \ , \quad k > 0$. Je to zřejmě síla konzervativní a částice má v tomto silovém poli potenciální energii

$$U(x) \ = \ \frac{1}{2} \, k \, x^2 \ . \tag{2.34}$$

Aditivní konstantu jsme volili tak, aby potenciální energie byla nulová při $x = 0$. Částice má při pohybu určitou energii E, která se zachovává, je integrálem pohybu; přitom musí platit podmínka $E \geq U(x)$. Lze tedy říci, že se částice pohybuje v symetrické, parabolické potenciálové jámě a x leží v mezích $-A \leq x \leq A$, kde A je amplituda, největší výchylka (obr. 2.8).

Ukážeme, že taková částice bude vykonávat netlumené harmonické kmity s *vlastní úhlovou frekvencí*

$$\omega_0 \ = \ \sqrt{\frac{k}{m}} \ . \tag{2.35}$$

Tato soustava se proto nazývá **harmonický oscilátor** a má zásadní význam ve všech

obr. 2.8

oblastech fyziky. Její důležitost je v tom, že jakoukoli symetrickou potenciálovou jámu můžeme pro malé kmity vždy aproximovat jámou parabolickou a harmonický oscilátor tedy obecně popisuje libovolné kmitavé pohyby s malou amplitudou. Jeho důležitou vlastností je i to, že jeho vlastní úhlová frekvence (která je jediným parametrem charakterizujícím harmonický oscilátor) nezávisí na amplitudě a že perioda kmitů je vždy stejná nezávisle na počáteční výchylce.

Pohybovou rovnici harmonického oscilátoru

$$m\,\ddot{x} \;=\; -\,k\,x \tag{2.36}$$

upravíme na tvar

$$\ddot{x} \;+\; \omega_0^2\,x \;=\; 0 \tag{2.37}$$

a řešíme podle pravidel pro řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty (viz kapitolu Matematický aparát). Výsledné řešení, závislé na dvou integračních konstantách, můžeme vyjádřit několikerým způsobem:

$$x(t) \;=\; C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \;=\; A_1 \cos\omega_0 t + A_2 \sin\omega_0 t \;=\; A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)\;. \tag{2.38}$$

Konstanty $C_1,\ C_2$ jsou obecně komplexní, konstanty $A_1 = C_1 + C_2 = A\sin\varphi_0,\quad A_2 = \mathrm{i}(C_1 - C_2) = A\cos\varphi_0$ reálné.

Derivováním dostaneme rychlost částice jako

$$v_x(t) \;=\; A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)\;. \tag{2.39}$$

Počáteční podmínky nám říkají, jak kmitavý pohyb započal. Částici můžeme uvést do kmitavého pohybu buď tak, že jí udělíme určitou počáteční rychlost, nebo tím, že ji vychýlíme a pustíme, případně obojím způsobem. Obecné podmínky můžeme zapsat tak, že v okamžiku $t = t_0$ bude $x = x_0 > 0$, $v_x = v_0 > 0$. Potom dostaneme pro amplitudu a fázovou konstantu

$$A \;=\; \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}\;, \qquad \mathrm{tg}\;(\omega_0 t_0 + \varphi_0) \;=\; \frac{\omega_0 x_0}{v_0}\;. \tag{2.40}$$

V dalším se omezíme na jednodušší počáteční podmínky $t = 0,\;\; x = 0,\;\; v_x = v_0$. Pak máme $A = v_0/\omega_0$ a $\sin\varphi_0 = 0$, odkud $\varphi_0 = 0$. [8] Dostáváme tedy řešení

$$x(t) \;=\; \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t\;, \qquad v_x(t) \;=\; v_0\cos\omega_0 t\;. \tag{2.41}$$

K témuž výsledku můžeme dospět i jinak. Dosadíme-li do (**??**) potenciální energii (**??**) a zintegrujeme, máme

$$t \;=\; \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}} \;=\; \frac{1}{\omega_0}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} \;=\; \frac{1}{\omega_0}\;\mathrm{arcsin}\;\frac{x}{A}\;, \tag{2.42}$$

kde

$$A \;=\; \sqrt{\frac{2}{k}E} \;=\; \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}} \;=\; \frac{v_0}{\omega_0}\;,$$

neboť celková energii dodaná částici je právě $E = \frac{1}{2}mv_0^2$.

Energii harmonického oscilátoru můžeme zapsat jako

$$E \;=\; \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \;=\; \frac{1}{2}mv_0^2 \;=\; \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\;. \tag{2.43}$$

Je tedy úměrná čtverci vlastní frekvence a amplitudy. U periodických pohybů má význam určovat střední hodnoty veličin za periodu. Tak dostaneme pro střední hodnoty kinetické a potenciální energie [9]

$$<T> = \frac{1}{2}mv_0^2 <\cos^2\omega_0 t> = \frac{1}{4}mv_0^2\;, \qquad <U> = \frac{1}{2}k\frac{v_0^2}{\omega_0^2} <\sin^2\omega_0 t> = \frac{1}{4}mv_0^2\;. \tag{2.44}$$

Vidíme, že střední hodnoty kinetické a potenciální energie harmonického oscilátoru za periodu jsou stejné. Tento zajímavý výsledek plyne z obecné věty zvané *teorém o viriálu.*

2.2.2 Tlumený oscilátor

Netlumený harmonický oscilátor je fyzikální idealizací, předpokládáme, že u něho nedochází k disipaci mechanické energie, neuplatňuje se tření. Ve skutečnosti musíme do

[8] Kdyby bylo $\varphi_0 = \pi$, muselo by být $v_0 < 0$ oproti předpokladu.

[9] Snadno se přesvědčíme, že střední hodnoty funkcí $\sin^2\omega_0 t$ a $\cos^2\omega_0 t$ za periodu jsou rovny $1/2$.

pohybové rovnice oscilátoru zahrnout disipativní sílu, kterou obvykle bereme jako úměrnou rychlosti. Pohybovou rovnici

$$m\,\ddot{x} \;=\; -\,k\,x - h\,\dot{x} \tag{2.45}$$

upravíme na tvar

$$\ddot{x} \;+\; 2\,\delta\,\dot{x} \;+\; \omega_0^2\,x \;=\; 0\,. \tag{2.46}$$

Předpokládáme, že konstanty $k > 0$, $h > 0$ jsou kladné a zavádíme další parametr zvaný *dekrement útlumu* δ. Oscilátor je pak charakterizován dvěma parametry

$$\omega_0 \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \qquad \delta \;=\; \frac{h}{2m}\,.$$

Řešení pohybové rovnice hledáme ve tvaru $x = C\mathrm{e}^{\alpha t}$ a pro α dostáváme charakteristickou rovnici

$$\alpha^2 \;+\; 2\delta\,\alpha \;+\; \omega_0^2 \;=\; 0$$

odkud

$$\alpha \;=\; -\delta \;\pm\; \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \;=\; -\delta \pm D\,, \quad \text{kde} \quad D^2 \;=\; \delta^2 - \omega_0^2 \tag{2.47}$$

je diskriminant charakteristické rovnice. Tak dostáváme obecné řešení

$$x(t) \;=\; C_1\mathrm{e}^{(-\delta+D)t} \;+\; C_2\mathrm{e}^{(-\delta-D)t} \;=\; \mathrm{e}^{-\delta t}\,(C_1\mathrm{e}^{Dt} \;+\; C_2\mathrm{e}^{-Dt})\,. \tag{2.48}$$

V závislosti na hodnotě útlumu a tedy diskriminantu rovnice můžeme nyní rozlišit čtyři případy:

1. Případ nulového útlumu

Je-li $\delta = 0$, $D^2 = -\omega_0^2$, dostáváme ideální případ netlumeného harmonického oscilátoru.

2. Případ malého útlumu

Je-li $D^2 = \delta^2 - \omega_0^2 < 0$, zavedeme úhlovou frekvenci

$$\omega \;=\; \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{2.49}$$

a řešení (**??**) přechází na

$$\begin{aligned} x(t) \;&=\; \mathrm{e}^{-\delta t}(C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}) \;=\; A\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_0) \\ v_x(t) \;&=\; A\,\mathrm{e}^{-\delta t}[\omega\cos(\omega t + \varphi_0) - \delta\sin(\omega t + \varphi_0)]\,. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Dochází k periodickým kmitům, jejichž amplituda exponenciálně klesá v čase. Časový průběh takových kmitů za počáteční podmínky $t = 0,\ x = 1,\ v_x = 0$ pro různé hodnoty dekrementu útlumu je znázorněn na počítačovém diagramu na obr. 2.9.

Definujeme-li opět počáteční podmínky $t = 0,\ x = 0,\ v = v_0 > 0$, dostaneme $A = v_0/\omega$, $\varphi_0 = 0$ a řešení bude mít tvar (viz obr. 2.10)

$$x(t) \;=\; \frac{v_0}{\omega}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin\omega t\,, \qquad v_x \;=\; v_0\mathrm{e}^{-\delta t}\left(\,\cos\omega t - \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\,\right)\,. \tag{2.51}$$

obr. 2.9

obr. 2.10

Pohyb tlumeného oscilátoru není přesně vzato periodický, neboť amplituda se postupně zmenšuje. Přesto však je zřejmé, že jak výchylka x, tak rychlost v_x podle (**??**) prochází vždy nulovou polohou ve stejných intervalech $T/2$, kde $T = 2\pi/\omega$ (pro v jsou to kořeny rovnice tg $(\omega t + \varphi_0) = \omega/\delta$). Můžeme proto zavést periodu a úhlovou frekvenci, která se poněkud liší od vlastní úhlové frekvence netlumeného oscilátoru $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Amplituda je dána podmínkou $v_x = 0$ a poměr dvou následujících výchylek na tutéž stranu (tj. vzdálených o periodu) je

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{A\mathrm{e}^{-\delta(t_1+T)}\sin[(\omega(t_1+T)+\varphi_0]}{A\mathrm{e}^{-\delta t_1}\sin(\omega t_1+\varphi_0)} = \mathrm{e}^{-\delta T}\ . \tag{2.52}$$

Veličina $\vartheta = \delta T$ se nazývá *logaritmický dekrement útlumu.*

Pro energii tlumeného oscilátoru dostaneme

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}v_0^2\mathrm{e}^{-2\delta t}\left[m\left(\cos^2\omega t+\frac{\delta^2}{\omega^2}\sin^2\omega t-2\frac{\delta}{\omega}\cos\omega t\sin\omega t\right)+\frac{k}{\omega^2}sin^2\omega t\right]\ . \tag{2.53}$$

Vystředujeme-li tuto energii za periodu [10] a předpokládáme-li, že útlum je malý ($\delta \ll \omega$), dostaneme střední hodnotu energie během jedné periody

$$< E > = \frac{1}{2}mv_0^2\mathrm{e}^{-2\delta t}\ . \tag{2.54}$$

Tato střední energie s časem klesá, dochází k disipaci kmitavé energie v energii tepelnou. Střední disipovaný výkon bude mít zřejmě velikost

$$< N > = |\frac{d}{dt} < E > | = 2\delta < E >\ . \tag{2.55}$$

Disipaci energie v tlumeném oscilátoru vyjadřuje bezrozměrná veličina, kterou nazýváme *kvalita* nebo *činitel jakosti* oscilátoru

$$Q = \frac{\omega_0\ < E >}{< N >} = \frac{\omega_0}{2\delta}\ . \tag{2.56}$$

3. Případ kritického útlumu

Je-li $D = 0$, $\delta = \omega_0$, kmitavý pohyb přestává být právě periodický a jde o případ kritického útlumu. Řešení pohybové rovnice bude obecně

$$x = (C_1 + C_2 t)\ \mathrm{e}^{-\delta t}\ , \quad v_x = C_2\mathrm{e}^{-\delta t} - \delta\ (C_1 + C_2 t)\ \mathrm{e}^{-\delta t} \tag{2.57}$$

a pro námi zvolené počáteční podmínky

$$x = v_0 t\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{2.58}$$

(rychlost dostaneme snadno zderivováním). Částice je tedy vychýlena z rovnovážné polohy, dosáhne maxima při $t_{max} = 1/\delta$ a opět se bude vracet do rovnovážné polohy, aniž by

[10] Střední hodnota součinu $\sin\omega t\cos\omega t$ za periodu je rovna nule.

obr. 2.11 obr. 2.12

překmitla na druhou stranu. Časový průběh výchylky je na obr. 2.11. Kritického útlumu se využívá při tlumení ukazatelů měřicích prístrojů, kdy je nechceme rozkmitat a potřebujeme, aby se co nejrychleji ustavila rovnovážná poloha (i když teoreticky vzato to trvá nekonečně dlouho).

4. Případ silného útlumu

Je-li $D^2 = \delta^2 - \omega_0^2 > 0$, potom oba kořeny charakteristické rovnice jsou reálné a dostáváme

$$x = C_1 \mathrm{e}^{(-\delta+D)t} + C_2 \mathrm{e}^{(-\delta-D)t} \tag{2.59}$$

(rychlost dostaneme snadno zderivováním). Pro námi zvolené počáteční podmínky bude

$$x = \frac{v_0}{D} \mathrm{e}^{-\delta t} \sinh Dt\ . \tag{2.60}$$

Časový průběh výchylky je na obr. 2.12. Maxima je dosaženo v okamžiku daném rovnicí

$$\mathrm{tgh}\ Dt = \frac{D}{\delta}\ . \tag{2.61}$$

2.2.3 Rezonance

Nechť na oscilátor působí vnější periodická harmonická síla s periodou Ω. Tato síla bude oscilátor rozkmitávat, vnucovat mu svou frekvenci, dodávat mu energii. Mluvíme o *vynucených kmitech oscilátoru.* Nechť má síla časový průběh například $F_x(t) = F_0 \cos \Omega t$. Pak bude pohybová rovnice nehomogenní:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_x(t)\ . \tag{2.62}$$

Označíme $B = F_0/m$ a přepíšeme pohybovou rovnici na tvar

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = B\cos\Omega t\ . \tag{2.63}$$

Podle teorie nehomogenních diferenciálních rovnic (viz Matematický aparát) bude obecné řešení rovnice (**??**) rovno součtu obecného řešení homogenní rovnice (s nulovou pravou stranou) a zvláštního řešení nehomogenní rovnice. Obecné řešení homogenní rovnice známe - jsou to tlumené kmity a s výjimkou nereálného případu nulového tření vždy po určité době se přibliží k nule. Oscilátor si tedy na počátku trochu zakmitá, ale my vyčkáme, až tyto vlastní kmity odezní a nastoupí režim vynucených kmitů. Je rozumné očekávat, že tyto vynucené kmity budou probíhat s frekvencí Ω a pokusíme se najít řešení (**??**) ve tvaru

$$x(t)\ =\ A\ \sin(\Omega t + \varphi_0)\ . \tag{2.64}$$

Neznámou amplitudu A a fázovou konstantu φ_0 musíme určit tak, aby řešení splňovalo nehomogenní rovnici. Určíme ještě rychlost a zrychlení

$$\dot{x}\ =\ \Omega A\cos(\Omega t + \varphi_0)\ ,\quad \ddot{x}\ =\ -\ \Omega^2 A\sin(\Omega t + \varphi_0) \tag{2.65}$$

a dosadíme do (**??**). Tak dostaneme

$$-\Omega^2 A\sin(\Omega t + \varphi_0) + 2\delta\Omega A\cos(\Omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 A\sin(\Omega t + \varphi_0)\ =\ B\cos(\Omega t)\ . \tag{2.66}$$

Nyní rozložíme goniometrické funkce součtů $\Omega t+\varphi_0$ na levé straně a přirovnáme koeficienty u $\sin\Omega t$ a $\cos\Omega t$ na obou stranách rovnice; aby rovnice byla splněna v každém okamžiku t, musí se totiž tyto koeficienty nezávisle rovnat. Tak dostaneme soustavu dvou rovnic k určení neznámých A a φ_0:

$$A\ [(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos\varphi_0 - 2\delta\Omega\sin\varphi_0]\ =\ 0\ ,\qquad A\ [(\omega_0^2 - \Omega^2)\sin\varphi_0 + 2\delta\Omega\cos\varphi_0]\ =\ B\ . \tag{2.67}$$

Z první z těchto rovnic okamžitě dostáváme vztah pro φ_0: [11]

$$\mathrm{tg}\ \varphi_0\ =\ \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\delta\Omega}\ . \tag{2.68}$$

K určení amplitudy kmitů A budeme postupovat takto: obě rovnice (**??**) umocníme na druhou a sečteme. Přitom nám vypadnou výrazy obsahující φ_0 a máme

$$A\ =\ \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}\ . \tag{2.69}$$

Z tohoto výrazu je patrno, že pokud útlum není příliš velký, amplituda kmitů poroste při přibližování frekvence Ω vlastní frekvenci oscilátoru ω_0. Tomuto jevu se říká **rezonance** a závislost amplitudy na vnějším kmitočtu nazýváme **rezonanční křivkou v amplitudě**.

Prozkoumáme-li funkci $A(\Omega)$ podrobněji, zjistíme,že při $\Omega = 0$ má hodnotu $A_s = B/\omega_0^2$, kterou nazýváme statická výchylka. Pokud je velký útlum ($\delta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$), dosahuje funkce

[11] Kdybychom byli bývali volili řešení ve tvaru $x = A\cos(\Omega t + \varphi_0)$, dostali bychom $\mathrm{tg}\ \varphi_0 = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$.

obr. 2.13

maxima v nule (křivka 1 na obr. 2.13) a jev rezonance nenastává. Při útlumu $\delta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, nabývá křivka maxima na rezonanční frekvenci $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, a to

$$A_{max} = \frac{B}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} . \tag{2.70}$$

S klesajícím útlumem tato maximální hodnota roste do nekonečna a rezonanční frekvence se přibližuje vlastní frekvenci ω_0 (křivky 2 a 3 na obr. 2.13). Tangens fázového úhlu φ_0 přitom prochází nulou vždy na vlastní frekvenci ω_0 (obr. 2.14).

Vynucené kmity oscilátoru jsou netlumené, soustava se nachází ve stavu energetické rovnováhy - ztráty mechanické energie disipací jsou nahrazovány energií vnějšího zdroje, vynucující síly. Čím jsou ztráty menší, tím s větší účinností je vnější energie absorbována a roste maximální amplituda oscilací. Ta může někdy dosáhnout nebezpečně velkých hodnot (například při rezonančním rozkmitání mostu, vozidla nebo stroje). Na druhé straně rezonance umožňuje zachycovat a pak zesilovat velmi slabé elektromagnetické signály a má i jinak velmi důležité uplatnění ve fyzice a technice. Mohlo by se zdát absurdní, že při dostatečně malém útlumu můžeme s určitým, konečným zdrojem energie dosáhnout libovolně velké amplitudy kmitů, například malý chlapec by teoreticky mohl svým pohybem způsobit zhroucení mostu. Ve skutečně však vždy působí určitý útlum a kromě toho kmity mechanických systémů přesně vzato nikdy neprobíhají jen na jediné frekvenci, vždy existuje určité frekvenční spektrum, takže nekonečné hodnoty amplitudy dosáhnout nelze.

Pro energii oscilátoru v režimu vynucených kmitů máme (podobně jako u netlumeného

obr. 2.14

obr. 2.15

oscilátoru)

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\Omega^2 A^2 = \frac{mB^2\Omega^2}{2[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2]} \, . \tag{2.71}$$

Závislost energie takto nahromaděné v oscilátoru na frekvenci vnější síly nám dává **rezonenční křivku v energii**, která je na obr. 2.15.

Tato křivka se liší od rezonanční křivky ve výchylce na obr. 2.13 a 2.14 jednak tím, že při nulové frekvenci se blíží k nule a tím, že nabývá maxima vždy na vlastním kmitočtu ω_0 (a nikoli na rezonančním kmitočtu Ω_r). Tato maximální energie přitom je

$$E_{max} = \frac{mB^2}{8\delta^2} \, . \tag{2.72}$$

Ztrátový výkon disipativních sil vystředovaný za periodu dostaneme jako

$$< N > = < F_d v_x > = < h\dot{x}^2 > = < hA^2\Omega^2 \cos^2(\Omega t + \varphi_0) > = \frac{1}{2}hA^2\Omega^2 =$$

$$= \frac{\delta m \Omega^2 B^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \, . \tag{2.73}$$

Porovnáme-li tento výsledek s výrazem pro energii oscilátoru (**??**), vidíme že
$E = 2\delta < N >$ a kvalita oscilátoru je

$$Q = \frac{\omega_0 E}{< N >} \, . \tag{2.74}$$

Energie E zůstává nyní konstantní, rovna své střední hodnotě.

Oscilátor je plně charakterizován svou vlastní frekvencí ω_0 a útlumem, který můžeme vyjádřit kvalitou jako bezrozměrným číslem. Obecnou definici kvality oscilátoru jako poměr součinu vlastní frekvence a energie dělenému středním ztrátovým výkonem můžeme použít na jakýkoli oscilátor bez ohledu na to, jakého původu jsou ztráty energie, zda dochází k tření, odporu prostředí, ohmickému zahřívání na odporech nebo úniku energie ze systému jiným způsobem. Kvalitu můžeme pak přímo určit z rezonanční křivky na obr. 2.15 tak, že určíme šířku této křivky v poloviční výšce. Ze vztahu

$$\frac{mB^2\Omega^2}{2[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2]} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{mB^2}{8\delta^2}$$

dostaneme rovnici čtvrtého stupně pro určení kořenů Ω jako frekvencí, při nichž energie nabývá právě poloviny maximální hodnoty:

$$(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2 \;=\; 8\delta^2\Omega^2$$

neboli

$$(\omega_0^2-\Omega^2)^2 \;=\; 4\delta^2\Omega^2\ , \quad \omega_0^2-\Omega^2 \;=\; \pm 2\delta\Omega\ .$$

Rovnice se nám tedy rozpadla na dvě kvadratické rovnice a jejich řešením dostaneme čtyři kořeny odpovídající všem možným kombinacím znamének:

$$\Omega_{1,2,3,4} \;=\; \mp\delta \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{2}+\omega_0^2}\ . \tag{2.75}$$

Z nich vyhovují pouze kladné kořeny odpovídající kladnému znaménku před odmocninou. Rozdíl těchto dvou kořenů nám pak dává šířku rezonanční křivky na poloviční výšce:

$$\Delta\Omega \;=\; \Omega_2-\Omega_1 \;=\; 2\delta \;=\; \frac{\omega_0}{Q}\ . \tag{2.76}$$

Šířka rezonanční křivky je tedy nepřímo úměrná kvalitě, čím je menší útlum, tím je rezonanční křivka užší a vyšší. Změříme-li experimentálně průběh rezonanční křivky, můžeme z ní stanovit jak vlastní frekvenci tak kvalitu oscilátoru.

2.2.4 Vázané oscilátory

Představme si dva oscilátory, které jsou nějakým způsobem spojeny, existuje mezi nimi vazba, mohou si vzájemně předávat energii. Taková situace je velmi častá, dokonce míváme celé řetězce vázaných oscilátorů, které se vzájemně rozkmitávají. Charakter této vazby může být různý. Jako příklad si vezměme dvě stejná kyvadla vzájemně spojená pružinou, pak jde o tzv. pružnou vazbu a síla, kterou pružina bude působit na kyvadlo bude úměrná jejímu protažení (obr. 2.16).

Takový systém můžeme snadno exprimentálně realizovat, rozkývat jedno z kyvadel a sledovat děj. Uvidíme, že se druhé kyvadlo začne postupně rozkývávat s vzrůstající amplitudou, energie se začne přelévat od prvního kyvadla k druhému až se první kyvadlo obr.2.16

zastaví. Pak se děj začne opakovat v obráceném směru. Pohyb kyvadla má tedy charakter rázů, a ty vznikají jak víme superpozicí dvou kmitavých pohybů o blízkých frekvencích.

Pohyb kyvadla můžeme pro malé výkyvy považovat přibližně za harmonický a uvažovat přitom pouze pohyb ve směru osy x. Místo kyvadel můžeme uvažovat i dva hmotné body spojené pružinkou, které mohou harmonicky oscilovat podél osy x. Tření přitom zanedbáme.

Pohybové rovnice obou oscilátorů můžeme zapsat ve tvaru

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \kappa\ (\ x_2 - x_1\ )\ , \qquad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \kappa\ (\ x_1 - x_2\ )\ . \tag{2.77}$$

Předpokládáme, že síly mezi oscilátory působí podle zákona akce a reakce a konstantou κ jsme vyjádřili intenzitu vazby. Obyčejně se zavádí bezrozměrný tzv. **stupeň vazby**

$$K \ = \ \frac{\kappa}{\omega_0^2 + \kappa}\ . \tag{2.78}$$

Soustavu rovnic (**??**) řešíme tak, že obě rovnice sečteme a odečteme a označíme součet a rozdíl $x_1 + x_2 = x_+\ , \quad x_1 - x_2 = x_-$. Pro tyto funkce máme rovnice

$$\ddot{x}_+ + \omega_0^2 x_+ \ = \ 0\ , \qquad \ddot{x}_- + (\omega_0^2 + 2\kappa)x_- \ = \ 0\ . \tag{2.79}$$

To jsou dvě rovnice pro netlumené harmonické oscilátory o frekvencích ω_0 a $\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa}$. Dostáváme tedy řešení $x_+ = A_+ \sin(\omega_0 t + \varphi_{0+})\ , \quad x_- = A_- \sin(\Omega_0 t + \varphi_{0-})$ a přejdeme-li k funkcím $x_1\ , \quad x_2$, dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 \ &= \ \frac{1}{2}[A_+ \sin(\omega_0 t + \varphi_{0+}) + A_- \sin(\Omega_0 t + \varphi_{0-})] \\ x_2 \ &= \ \frac{1}{2}[A_+ \sin(\omega_0 t + \varphi_{0+}) - A_- \sin(\Omega_0 t + \varphi_{0-})]\ . \end{aligned} \tag{2.80}$$

obr. 2.17 obr. 2.18

Pro případ slabé vazby si budou úhlové frekvence ω_0, Ω_0 blízké a pohyb bude mít charakter rázů.

2.2.5 Matematické kyvadlo

Pod matematickým kyvadlem rozumíme hmotný bod m zavěšený na nehmotném vlákně délky l v tíhovém poli. Předpokládejme, že délka závěsu zůstává stálá a že jde tedy spíš o nehmotnou tuhou tyčku. V takovém případě je pohyb hmotného bodu v prostoru omezen, může se pohybovat jen po kulové ploše o poloměru l. Tato vazba způsobuje, že k popisu pohybu nejsou zapotřebí tři prostorové souřadnice, ale pouze dvě (například úhly φ , ϑ - viz Matematický aparát o sférických souřadnicích). Takový systém nazýváme **sférické kyvadlo** a jeho pohyb si umíme dobře představit udělíme-li obecnou výchylku a počáteční rychlost takto zavěšenému předmětu.

My se však omezíme na jednodušší případ, kdy se hmotný bod bude pohybovat pouze ve svislé rovině. Takový pohyb vznikne tak, že kyvadlo vychýlíme a volně pustíme nebo mu udělíme vodorovnou počáteční rychlost v rovnovážné poloze. Protože na kyvadlo pak působí už jen tíže, která nemá vodorovnou složku, zůstane pohyb kyvadla omezen na rovinu. Hmotný bod bude opisovat oblouk kružnice a k popisu pohybu pak stačí jen jedna souřadnice, polární úhel φ (viz obr. 2.17). Tento systém se nazývá **rovinné matematické kyvadlo**.

Ke studiu pohybu rovinného kyvadla použijeme polární souřadnice. Počátek umístíme v bodě závěsu a polární poloosu namíříme svisle dolů. Pro souřadnici r a φ máme pohybové rovnice

$$\begin{aligned} ma_r &= m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = mg\cos\varphi - F_n \\ ma_\varphi &= m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = -mg\sin\varphi\,. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Ve směru radiálním (podél souřadnice r) pohyb nenastává a z první rovnice můžeme určit sílu, jíž je napínán závěs kyvadla:

$$F_n \;=\; mg\cos\varphi + mr\dot{\varphi}^2 \;. \tag{2.82}$$

Tento vztah vyjadřuje skutečnost, že dostředivá síla, která realizuje nerovnoměrný kruhový pohyb hmotného bodu je dána silou napětí závěsu zmenšenou o radiální složku tíhy.

Z druhé rovnice dostaneme pohybovou rovnici pro úhel φ, výkyv:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi \;=\; 0 \;. \tag{2.83}$$

Tato diferenciální rovnice je ovšem obtížně řešitelná. Zkusíme proto využít toho, že tíhové pole je konzervativní a zapíšeme zákon zachování energie:

$$E \;=\; \frac{1}{2}mv^2 + U(\varphi) \;=\; \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi \;=\; -mgl\cos\varphi_0 \;, \tag{2.84}$$

kde φ_0 je počáteční výchylka. Nulu potenciální energie jsme zvolili pro úhel $\varphi = \pi/2$. Pohyb matematického kyvadla můžeme tedy považovat za pohyb v kosinové potenciálové jámě $U(\varphi) = -mg\cos\varphi$ (obr. 2.18). Řešením rovnice pro energii dostaneme

$$\dot{\varphi} \;=\; \frac{d\varphi}{dt} \;=\; \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} \;, \tag{2.85}$$

odkud

$$t \;=\; \sqrt{\frac{l}{2g}}\;\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} \;+\; C \;. \tag{2.86}$$

Tím jsme sice vyřešili úlohu "v kvadraturách", dostali jsme závislost času na úhlu φ vyjádřenu pomocí integrálu, ale tento integrál se nedá obecně řešit pomocí elementárních funkcí, vede na tzv. integrály eliptické. Nebudeme se zajímat o časový průběh $\varphi(t)$, ale pokusíme se určit periodu pohybu T jako čtyřnásobek doby potřebné k pohybu kyvadla mezi nulovou a maximální výchylkou. Pro malá φ můžeme příslušný eliptický integrál rozložit do řady a dostaneme [12]

$$T \;=\; 2\sqrt{2}\,\sqrt{\frac{l}{g}}\;\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\;\left(\,1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \cdots\right) \;. \tag{2.87}$$

Pro malé výkyvy je tedy matematické kyvadlo *izochronní*, [13] tj. jeho perioda nezávisí na amplitudě a je rovna

$$T \;=\; 2\,\pi\,\sqrt{\frac{l}{g}} \;. \tag{2.88}$$

---

[12] Jest $T = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(\sin\frac{\varphi_0}{2})$, kde eliptický integrál prvního druhu $K(x)$ je definován jako funkce $K(x) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\xi}}$. Jeho rozklad do řady pro malé hodnoty x lze nalézt v tabulkách speciálních funkcí; viz například příručku K. Rektorys a spolupracovníci: "Přehled užité matematiky", SNTL Praha 1981.

[13] Tento poznatek zjistil poprvé Galilei, když pozoroval kývání lucerny zavěšené na stropě chrámu v Pise. V téže době ho publikoval i náš Marcus Marci.

obr. 2.19

K témuž výsledku jsme však mohli dojít i jednodušeji tak, že rozložíme funkce $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ do řady a vezmeme pouze členy do druhé mocniny φ:

$$\sin\varphi \;=\; \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \cdots\;, \qquad \cos\varphi \;=\; 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} - \cdots\;.$$

Pak dostáváme pohybovou rovnici

$$\ddot{\varphi} \;+\; \frac{g}{l}\varphi \;=\; 0\;. \tag{2.89}$$

To je ovšem rovnice harmonického oscilátoru a pro jeho periodu okamžitě plyne (**??**). Poloviční periodu $\tau = T/2$ nazýváme *dobou kyvu.*

Přiblížení malých kyvů vlastně znamená, že aproximujeme kosinovou potenciálovou jámu parabolickou (viz obr. 2.19). Položíme-li přitom nulovou potenciální energii do $\varphi = 0$, dostaneme pro energii

$$E \;=\; \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgl\varphi^2 \;=\; \frac{1}{2}mgl\varphi_0^2\;. \tag{2.90}$$

Odtud určíme $\dot{\varphi}$ a po separaci proměnných integrací dostaneme periodu jako

$$T \;=\; 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2-\varphi^2}} \;=\; 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\arcsin\frac{\varphi}{\varphi_0}\right]_0^{\varphi_0} \;=\; 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\;. \tag{2.91}$$

Úloha (cykloidální kyvadlo)

Protože matematické kyvadlo je izochronní jen pro malé amplitudy, znamená to, že kyvadlové hodiny půjdou přesně jen při malých rozkyvech. To by ovšem značně omezovalo jejich použitelnost k přesnému měření času, o něž fyzika a astronomie usilovaly. Ch. Huygens v 17. století zjistil, že kdyby hmotný bod tvořící zátěž kyvadla místo oblouku kružnice

obr. 2.20

opisoval oblouk cykloidy, kyvadlo by bylo izochronní pro libovolně velké amplitudy. Můžeme to snadno ověřit. Rovnici cykloidy jsme uváděli v souvislosti se skládáním pohybů (1.40). Nyní trochu pozměníme umístění cykloidy - změníme orientaci osy y, umístíme počátek ve vrcholu cykloidy a místo úhlu α přejdeme k úhlu $\varphi = \alpha - \pi$ - viz obr. 2.20.

Tak dostaneme parametrické rovnice cykliody

$$x \;=\; a\;(\;\varphi + \sin\varphi\;)\;, \qquad y \;=\; a\;(1 - \cos\varphi\;)\;.$$

Zapíšeme nyní energii takového kyvadla:

$$E \;=\; \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \;=\; \frac{1}{2}ma^2(\dot{\varphi} + \dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + \frac{1}{2}ma^2\;(\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + mga\;(1 - \cos\varphi) \;=$$

$$=\; \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2\;(\;1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\;) + mga\;(\;1 - \cos\varphi) \;=$$

$$=\; ma^2\dot{\varphi}^2\;(1 + \cos\varphi\;) + mga\;(\;1 - \cos\varphi\;) \;=\; 2ma^2\dot{\varphi}^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2mga\sin^2\frac{\varphi}{2}\;.$$

Označíme-li nyní

$$q \;=\; 4a\sin\frac{\varphi}{2}\;, \qquad \dot{q} \;=\; 2a\dot{\varphi}\cos\frac{\varphi}{2}\;,$$

můžeme energii zapsat ve tvaru

$$E \;=\; \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \;+\; \frac{1}{2}\frac{mg}{4a}q^2\;.$$

To je ovšem energie harmonického oscilátoru vzhledem k souřadnici q a jeho perioda

$$T \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$$

nezávisí na amplitudě. Zbývá ještě vyřešit technický problém, jak přimět kyvadlo, aby místo kružnice opisovalo cykloidu. K tomu stačí upevnit v blízkosti závěsu dva plíšky tvarované do takové křivky (evoluty cykloidy) aby závěs kyvadla se při větších výkyvech na tyto křivky pokládal a pak se od nich tečně odvíjel (obr. 2.18). Tímto konstrukčním zdokonalením zvýšil Huygens přesnost kyvadlových hodin, což umožnilo další rozvoj experimentální fyziky a astronomie. Teorii pohybu kyvadla Huygens podrobně rozpracoval se svém slavném spise "Horologium oscillatorium" z r. 1673.

2.3 Pohyb v centrálním poli

2.3.1 Obecné vlastnosti pohybu částice v centrálním poli

Dosud jsme se zabývali jednorozměrným pohybem částice, který bylo možno popsat jednou souřadnicí, kartézskou nebo polární. Přejdeme nyní k pohybu částice v prostoru, v němž působí nějaké silové pole. Je-li toto **pole homogenní**, je síla v každém bodě konstantní co do velikosti i směru. Pohybovou rovnici

$$m \, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \;=\; \vec{F} \;=\; \mathbf{konst} \tag{2.92}$$

s počátečními podmínkami

$$t \;=\; t_0 \;, \quad \vec{r} \;=\; \vec{r}_0 \;, \quad \vec{v} \;=\; \vec{v}_0 \tag{2.93}$$

pak můžeme řešit přímo ve vektorovém tvaru jako

$$\vec{v} \;=\; \vec{v}_0 \;+\; \frac{1}{m}\,(t-t_0)\,\vec{F} \;, \qquad \vec{r} \;=\; \vec{r}_0 \;+\; (t-t_0)\,\vec{v}_0 \;+\; (t-t_0)^2\,\frac{1}{2m}\,\vec{F} \;. \tag{2.94}$$

Považujeme-li za homogenní například tíhové pole Země v nějakém místě na zemském povrchu a vedeme-li kartézskou osu z svisle vzhůru, položíme $\vec{F} = (0,\ 0,\ -mg)$, $U = mgz + U_0$ a z (**??**) dostaneme všechny případy pádů a vrhů v tíhovém poli, jimiž jsme se už dříve zabývali.

Homogenní silové pole v celém nekonečném prostoru ovšem nemůže existovat, je vždy jen aproximací nějakého lokálního pole. Zemské tíhové pole není homogenní, působící síla míří přibližně do středu Země a při pohybech na vzdálenosti srovnatelné se zemským poloměrem jej musíme považovat za pole centrální.

Centrální silové pole je nejdůležitějším případem silových polí a je buzeno bodovými nebo sféricky symetrickými částicemi a tělesy. Budeme se jím nyní zabývat. Předpokládejme, že existuje silové centrum, s nímž můžeme spojit počátek vztažné soustavy a že tato vztažná soustava bude přitom inerciální. Protože síla působící v centrálním poli na částici hmotnosti m míří do tohoto centra (nebo od něho), můžeme pohybovou rovnici $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ vynásobit *zleva* vektorově polohovým vektorem $\vec{r}$ a dostaneme

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \;=\; \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \;-\; \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \;=\; \vec{r} \times \vec{F} \;. \tag{2.95}$$

Snadno nahlédneme, že součin

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0} \ ,$$

a stejně tak **moment síly vzhledem k počátku**

$$\vec{N} \ = \ \vec{r} \times \vec{F} \ = \ 0 \ ,$$

neboť síla a polohový vektor leží v téže přímce.

Zavedeme nyní novou veličinu, **moment hybnosti částice vzhledem k počátku**

$$\vec{l} \ = \ \vec{r} \times \vec{p} \ .$$

Z (**??**) plyne, že moment hybnosti částice vzhledem k silovému centru se v centrálním silovém poli zachovává:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) \ = \ \frac{d\vec{l}}{dt} \ = \ 0 \implies \quad \vec{l} \ = \ \textbf{konst} \ . \tag{2.96}$$

Zachování momentu hybnosti částice v centrálním poli má závažné důsledky. Protože se zachovává *směr* vektoru $\vec{l}$, plyne odtud, že vektory $\vec{r}$ a $\vec{p}$, tedy polohy a rychlosti, zůstávají stále v téže rovině. Částice tedy vykonává **rovinný pohyb** a je možné se omezit na dvě souřadnice. Obyčejně volíme polární souřadnice r , φ s počátkem v silovém centru a odečítání polárního úhlu od zvoleného směru provádíme proti směru hodinových ručiček.

Protože Země se pohybuje v centrálním silovém poli sluneční gravitace, probíhá její pohyb v rovině, které se říká *rovina ekliptiky.* Poloha roviny ekliptiky ovšem souvisí s počátečními podmínkami vzniku sluneční soustavy. V rovině ekliptiky se pohybuje většina planet s menší nebo větší úhlovou odchylkou. Dráha Měsíce je je skloněna vůči ekliptice asi o 5^0; kdyby obíhal v rovině ekliptiky, měli bychom zatmění Slunce a Měsíce každý měsíc. Je zajímavé, že dráhy komet v rovině ekliptiky neleží. [14]

Vedle směru musí se zachovávat i *velikost* momentu hybnosti částice. Podle definice vektorového součinu a vzhledem k vyjádření složek polohového vektoru a rychlosti v polárních souřadnicích (1.12) máme

$$\vec{l} \ = \ m\,\vec{r} \times \vec{v} \ = \ m \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi & 0 \\ \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi & \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \ = \ m\,r^2\,\dot{\varphi}\,\vec{z}_0 \ = \ \textbf{konst} \ . \tag{2.97}$$

Zákon zachování velikosti momentu hybnosti planety pohybující se v gravitačním poli Slunce objevil Kepler na základě podrobného zkoumání pohybu Marsu podle měření Tychona Braha. Tehdy ovšem ještě nebyly definovány pojmy hybnosti a momentu

[14] Atom bývá často znázorňován v tzv. planetárním modelu, kdy například elektron v atomu vodíku obíhá kolem protonu jako planeta kolem Slunce. Kvantová fyzika však ukázala, že pohyb elektronů nelze popisovat jako pohyb částice po trajektorii. Kromě toho, podle Newtonovy mechaniky by elektron musel konat rovinný pohyb, podobně jako planeta. To je v rozporu s tím, že atom vodíku je sféricky symetrická soustava.

obr. 2.21

hybnosti a Kepler stanovil *zákon stálosti plošné rychlosti planety.* Podle druhého Keplerova zákona plochy opsané průvodičem planety za stejnou dobu jsou stejné, je -li planeta blíže Slunci, pohybuje se rychleji, je-li dále od Slunce, pohybuje se pomaleji. Určíme tuto plošnou rychlost.

Na obr. 2.21 vidíme plochu opsanou průvodičem částice za malou dobu dt; průvodič se přitom pootočí o úhel $d\varphi$. Plocha opsaná průvodičem bude v limitě rovna polovině obsahu rovnoběžníka vytvořeného vektory $\vec{r}$, $d\vec{r}$, tedy s použitím (**??**)

$$dS \;=\; \frac{1}{2}\,|\vec{r}\times d\vec{r}|\;.$$

Označíme-li plošnou rychlost jako w, dostaneme

$$w \;=\; \frac{dS}{dt} \;=\; \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \;=\; \frac{1}{2}\,|\vec{r}\times\vec{v}| \;=\; \frac{l}{2m} \;=\; \frac{1}{2}\,r^2\dot{\varphi} \;=\; \text{konst}\;. \tag{2.98}$$

Zákon zachování momentu hybnosti částice, a tedy i druhý Keplerův zákon, platí v libovolném centrálním poli (nejen gravitačním). Položme si nyní otázku, kdy bude centrální pole konzervativní. Na obr. 2.22 jsou znázorněny siločáry dvou centrálních polí; větší hustota siločar znamená větší velikost působící síly. Na obr. 2.22a je centrální pole izotropní, siločáry jsou rozloženy rovnoměrně ve všech směrech, na obr. 2.22b je pole neizotropní. Uvažme dále uzavřenou dráhu tvořenou dvěma radiálními úseky a dvěma oblouky kružnice se středem v počátku a určeme práci, kterou vykoná centrální silové pole při přemisťování částice podél této uzavřené dráhy. V případě centrálního pole bude tato práce nulová, protože podél oblouků kružnic síla práci nekoná a práce podél radiálních úseků se vzájemně vyruší - velkost síly je stejná a úseky procházíme v protichůdných směrech. Takové pole bude zřejmě konzervativní. V případě neizotropního pole působí podél radiálních úseků síla nestejné velikosti a práce po uzavřené dráze bude nenulová - pole konzervativní není.

Uvedená ilustrace naznačuje, že **izotropní centrální pole**, jehož síla bude záviset jen na vzdálenosti od počátku, bude konzervativní a bude ho možno vyjádřit pomocí potenciální energie $U(r)$:

$$F_r(r) \;=\; -\,\frac{dU(r)}{dr}\;. \tag{2.99}$$

a) b)

obr. 2.22

Zapíšeme nyní pohybové rovnice částice v izotropním centrálním poli:

$$m\ a_r\ =\ m\ (\ \ddot{r} - r\ \dot{\varphi}^2\ )\ =\ F_r(r)$$

$$m\ a_\varphi\ =\ m\ (\ 2\dot{r}\ \dot{\varphi} + r\ \ddot{\varphi}\ )\ =\ 0 \tag{2.100}$$

Na první pohled je zřejmé, že řešení takové soustavy dvou diferenciálních rovnic bude obtížné. Můžeme však využít toho, že máme k dispozici dvě konstanty, dva integrály pohybu: energii a velikost momentu hybnosti, které se při pohybu zachovávají:

$$l\ =\ m\ r^2\ \dot{\varphi}\ =\ \text{konst}$$

$$E\ =\ \frac{1}{2}m\ v^2 + U(r)\ =\ \frac{1}{2}m\ \dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\ r^2\ \dot{\varphi}^2 + U(r)\ =\ \frac{1}{2}m\ \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)\ =\ \text{konst}\ . \tag{2.101}$$

Člen

$$\frac{l^2}{2mr^2}$$

vystupující ve výrazu pro energii závisí pouze na vzdálenosti r a říká se mu odstředivá energie. Můžeme jej spojit s potenciální energií $U(r)$ v novou funkci r, kterou nazýváme *efektivní potenciální energie*

$$U_{ef}(r)\ =\ U(r)\ +\ \frac{l^2}{2mr^2}\ .$$

Potom bude energie

$$E\ =\ \frac{1}{2}m\dot{r}^2\ +\ U_{ef}(r)\ =\ \text{konst}\ . \tag{2.102}$$

Soustavu rovnic (**??**) můžeme nyní řešit separací proměnných:

$$\dot{r}\ =\ \frac{dr}{dt}\ =\ \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{ef}(r)]}\ ,$$

odkud

$$t(r) \;=\; \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{ef}(r)]}} \;+\; C_1 \;. \tag{2.103}$$

Tvar trajektorie,tj. závislost úhlu φ na r určíme z

$$\dot{\varphi} \;=\; \frac{d\varphi}{dt} \;=\; \frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dt} \;=\; \frac{l}{mr^2} \tag{2.104}$$

jako

$$\varphi(r) \;=\; \pm \int \frac{\frac{l}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E - U_{ef}(r)]}} \;+\; C_2 \;. \tag{2.105}$$

Tím je úloha o pohybu částice v centrálním izotropním poli obecně vyřešena. Vztah (**??**) nám udává zákon pohybu, tj. závislost souřadnice r na čase a vztah (**??**) rovnici trajektorie v polárních souřadnicích. Řešení závisí na čtyřech integračních konstantách: dvěma z nich jsou konstanty E a l, konstanty C_1 , C_2 musíme určit z počátečních podmínek. Abychom dostali řešení pro konkretní silové pole, museli bychom zadat potenciální energii $U(r)$ a tím $U_{ef}(r)$.

Z nalezeného řešení můžeme usoudit na některé společné vlastnosti pohybu ve všech centrálních izotropních polích. Shrneme je:

1. Pohyb je *rovinný*.

2. *Plošná rychlost pohybu je konstantní*.

3. *Úhel φ se mění v čase monotónně*, částice musí obíhat centrum stále v témž smyslu a nemůže se vracet. Plyne to z toho, že $mr^2\dot{\varphi} =$ konst a derivace úhlu podle času nemůže měnit znaménko.

4. Při $\dot{r} = 0$ tzv. *body obratu*, kdy se částice přestává vzdalovat a začíná se opět přibližovat k centru) mění odmocnina v integrálech (**??**) a (**??**) znaménko. Časový průběh pohybu i tvar trajektorie jsou tedy *symetrické* vzhledem k okamžikům a směrům do bodů obratu.

5. Pohyb částice je možný pouze za podmínky $E \geq U_{ef}(r)$ a podle průběhu funkce $U_{ef}(r)$ může být buď *infinitní* (částice se může vzdalovat od centra do nekonečna) nebo *finitní* (probíhat v jámě efektivní potenciální energie).

6. Obecně důležitá je otázka tzv. **pádu na centrum**, tj vyjasnění podmínek, za nichž se částice může neomezeně přiblížit silovému centru, tj. "spadnout" na ně. Z rovnice pro energii dostáváme nerovnost

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - U_{ef}(r) = E - U(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \geq 0 \;.$$

Vynásobíme toto nerovnost r^2 a zapíšeme ve tvaru

$$r^2U(r) + \frac{l^2}{2m} \leq r^2E \;.$$

Podmínka pádu na centrum vyžaduje, aby se r, a tedy i pravá strane této nerovnosti, mohlo neomezeně blížit nule. To je zřejmě možné v těchto případech:

1) $l = 0$, $U(r) < 0$. Jinými slovy síla musí být přitažlivá a moment hybnosti nulový. To nastane, dostane-li částice počáteční rychlost buď nulovou nebo radiální. Případ je triviální.

2) $r^2 U(r) < -\frac{l^2}{2m} < 0$. To nastává při

a) $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$, $\alpha > \frac{l^2}{2m}$

b) $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$, $\alpha > 0$, $n > 2$.

V případě Newtonovy gravitační síly je

$$U(r) \;=\; -\;\frac{\alpha}{r}\;, \quad \alpha = \kappa\; M\; m \;>\; 0\;, \tag{2.106}$$

takže k pádu Země či planety na Slunce dojít nemůže. To ovšem platí jen neuvažujeme-li další vlivy a zkoumáme-li pouze Newtonovu sílu mezi Sluncem a Zemí. Pokud by centrální síla byla silnější, její potenciální energie by by rostla s přibližováním k centru nepřímo úměrně vyšší mocnině vzdálenosti, částice by se po stále rychleji se zavíjející spirále neomezemě blížila k centru.

7. Mimořádně zajímavou je otázka, kdy bude trajektorie částice v centrálním izotropním poli tvořena *uzavřenou křivkou* a kdy ne. Představme si finitní pohyb v potenciálové jámě vzhledem k r, který probíhá v mezikruží omezeném minimální a maximální vzdáleností od centra (obr. 2.23).

Trajektorie částice, která splňuje všechny výše uvedené obecné vlastnosti, nemusí být obecně uzavřenou křivkou a může růžicově vyplňovat mezikruží, aniž se konec a počátek trajektorie kdy spojí. Při každém oběhu se přitom bod obratu posune o $\Delta\varphi$; v astronomii se tomu říká posun perihelia planety. Trajektorie se uzavře, bude-li $\Delta\varphi$ racionálním násobkem 2π. Teoretická analýza ukazuje [15] že existují pouze dva případy, kdy trajektorie částice je uzavřena. Je to případ, kdy potenciální energie klesá nepřímo úměrně první mocnině vzdálenosti (**Keplerova úloha**) a kdy potenciální energie roste se čtvercem vzdálenosti (**úloha o prostorovém oscilátoru**):

$$U(r) \;=\; -\;\frac{\alpha}{r}\;, \alpha > 0 \qquad\qquad U(r) \;=\; \frac{1}{2}\; k\; r^2\;, k > 0\;. \tag{2.107}$$

V obou případech bude trajektorie eliptická. V Keplerově úloze bude ovšem silové centrum ležet v ohnisku elipsy, zatímco v úloze o prostorovém oscilátoru v jejím středu.

Na obr. 2.24 je znázorněna efektivní potenciální energie pro Keplerovu úlohu (křivka 1):

$$U_{ef}(r) \;=\; -\;\frac{\alpha}{r} \;+\; \frac{l^2}{2mr^2}\;. \tag{2.108}$$

[15] Viz např. Appell P.: "Traité de mécanique rationelle" I, Paris 1953, rus. překl. 1960.

obr. 2.23

Jak snadno zjistíme derivováním efektivní potenciální energie dosahuje minima při

$$r_{min} \;=\; \frac{l^2}{\alpha m}\,, \qquad \text{a to} \qquad U_{efmin} \;=\; -\,\frac{\alpha^2 m}{2l^2}\,. \tag{2.109}$$

Funkce $U_{ef}(r)$ tedy vytváří potenciálovou jámu, v níž je možný finitní pohyb. Křivka 2 odpovídá odpudivé síle pro $\alpha < 0$. S přitažlivou silou se setkáváme u Newtonova gravitačního pole, s přitažlivou i odpudivou silou nepřímo úměrnou čtverci vzdálenosti se setkáváme u Coulombova elektroststického pole. Vidíme, že efektivní potenciální energie odpudivých sil potenciálovou jámu nevytváří a neumožňuje tak finitní pohyb.

Na obr. 2.25 vidíme efektivní potenciální energii prostorového oscilátoru. Ta dosahuje minima při

$$r_{min} \;=\; \sqrt[4]{\frac{l^2}{mk}}\,, \qquad \text{a to} \qquad U_{efmin} \;=\; l\,\sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{2.110}$$

2.3.2 Gravitační centrální pole

Uvažujme nyní gravitační centrální pole velké sféricky symetrické homogenní hmoty (nebo alespoň tvořené sféricky symetrickými vrstvami), například Země. Tělesa, která se v takovém poli budou pohybovat, nechť mají mnohem menší hmotnost než Země, takže počátek vztažné soustavy umístíme do zemského středu a budeme ji považovat za inerciální.

Newton odvodil velmi důležitý poznatek, který dnes matematicky formulujeme jako tzv. *Gaussův zákon*. Podle tohoto zákona, sféricky symetrické gravitující těleso poloměru

obr. 2.24

obr. 2.25

R se navenek, pro $r > R$, silově projevuje jako hmotný bod téže hmotnosti umístěný ve středu symetrie. Uvnitř tělesa ve vzdálenosti $r < R$ od středu se pak uplatní jen ta část hmotnosti tělesa, která leží uvnitř koule poloměru r. Znamená to, že gravitační pole uvnitř kulové slupky je nulové! [16]

Zapíšeme nyní Newtonův gravitační zákon (**??**) pro sílu, jíž Země působí na částici hmotnosti m ve vzdálenosti $r > R_Z$. Poloměr Země jak známo činí $R_Z = 6\ 378$ km a lze jej snadno změřit současným pozorováním výšky Slunce nebo hvězdy nad obzorem ze dvou různých míst poledníku. Složku síly mířící do středu Země budeme označovat F_r a protože míří ve směru zmenšující se vzdálenosti, budeme ji brát jako zápornou. Máme tedy

$$F_r(r) \;=\; -\kappa\,\frac{mM_Z}{r^2} \;=\; -\,\frac{\alpha}{r^2}\;, \quad \alpha = \kappa mMZ > 0\;. \tag{2.111}$$

Potenciální energie částice v tomto poli bude

$$U(r) \;=\; -\,\kappa\,\frac{mM_Z}{r} \;=\; -\,\frac{\alpha}{r} + C\;. \tag{2.112}$$

Konstantu můžeme zvolit tak, aby potenciální energie částice při nekonečném vzdálení od Země byla nulová, což je smysluplné; potom zřejmě $C = 0$.

Mějme nyní částici m pod zemským povrchem, například v myšlené šachtě provrtané středem Země. Pak na ni bude působit jen část hmotnosti Země a určíme-li hustotu Země jako

$$\rho \;=\; \frac{M_Z}{\frac{4}{3}\pi R_z^3} \tag{2.113}$$

dostaneme pro sílu na částici působící

$$F_r(r) \;=\; -\,\kappa m\,\frac{4}{3}\pi r^3\rho\,\frac{1}{r^2} \;=\; -\,\kappa\frac{mM_Z}{R_Z^3}\,r \;=\; -\,\frac{\alpha}{R_Z^3}\,r\;. \tag{2.114}$$

Této síle odpovídá potenciální energie

$$U(r) \;=\; \frac{\alpha}{2R_Z^3}\,r^2 + C\;. \tag{2.115}$$

Vidíme, že pohyb nad Zemí odpovídá případu úlohy Keplerovy, pohyb pod Zemí případu prostorového oscilátoru; síla působící zde na částici je kvazielastická, podobná síle harmonického oscilátoru. [17] Konstantu C ovšem nyní nemůžeme položit rovnu nule, musíme ji určit tak, aby potenciální energie byla v celém rozsahu r spojitá a aby na povrchu Země při $r = R_Z$ dávaly (**??**) a (**??**) touž hodnotu. Tak dostaneme

$$C \;=\; -\,\frac{3\alpha}{2R_Z}$$

a souhrnně tedy můžeme napsat pro potenciální energii částice v zemském gravitačním poli

$$\begin{aligned} r \ge R_Z: &\qquad U(r) \;=\; -\,\tfrac{\alpha}{r} \\ r \le R_Z: &\qquad U(r) \;=\; \tfrac{\alpha}{2R_Z^3}\,r^2 \;-\; \tfrac{3\alpha}{2R_Z}\;. \end{aligned}$$

obr. 2.26

obr. 2.27

Tento průběh potenciální energie a síly zemské gravitace je znázorněn na obr. 2.26.

Vztáhneme-li gravitační sílu a potenciální energii k jednotce hmotnosti částice, dostaneme *intenzitu gravitačního pole* $\vec{\Gamma}$ a *gravitační potenciál* φ_g nad zemí:

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = -\,\kappa\,\frac{M_Z}{r^2}\vec{r}_0\ , \qquad \varphi_g = \frac{U}{m} = -\,\kappa\,\frac{M_Z}{r}\ , \qquad \vec{\Gamma} = -\,\nabla\varphi_g\ . \tag{2.116}$$

Zatím jsme neurčili gravitační konstantu κ, kterou je možno najít pouze experimentálně. V blízkosti zemského povrchu, nebudeme-li rozlišovat gravitační a tíhové zrychlení, máme pro přitažlivou sílu

$$\kappa\,\frac{mM_Z}{R_Z^2} = m\,g\ , \quad \text{odkud} \quad \kappa M_Z = gR_Z^2\ , \quad \kappa\rho = \frac{3g}{4\pi R_Z}\ . \tag{2.117}$$

Známe-li tedy tíhové zrychlení a poloměr Země, můžeme určit součin gravitační konstanty a hmotnosti Země nebo gravitační konstanty a střední hustoty Země. Zatímco rozměry Země byly známy už starým Řekům, její hmotnost nemohla být určena bez znalosti gravitační konstanty. Určit gravitační konstantu tedy znamená zvážit Zemi.

Newton (1687), mohl pouze odhadovat střední hustotu Země, a tedy i gravitační konstantu z hustoty hornin zemské kůry.

Bouguer (1738), pokusil se zjistit gravitační konstantu z odchylky olovnice na úpatí Chimboraza způsobenou gravitací hory.

[16] Tento výsledek platící analogicky i pro pole elektrostatické dokážeme při výkladu elektřiny a magnetismu.

[17] První z těchto sil se zabýval Newton, druhou jeho soupeř Hooke.

Maskelyne a Hutton (1774), měřili rozdíly ve výšce hvězd přístroji nivelovanými na jižním a severním úbočí horského hřbetu ve Skotsku, stanovili střední hustotu Země v rozmezí 4 500 - 5 000 kg.m^{-3}.

Další měření tíhového zrychlení pomocí kyvadel v různých výškách nad mořem.

Henry Cavendish (1797), poprvé změřil gravitační konstantu v laboratoři pomocí upravených Coulombových torzníh vah a zvážil tak Zemi s velkou přesností (obr. 2.27). [18] Cavendish měřil přitažlivou sílu mezi olověnými koulemi o hmotnostech 730 g a 158 kg. Lehčí kuličky byly umístěny na koncích lehké tyčky z jedlového dřeva, která byla zavěšena na tenkém stříbrném drátku. Těžké koule vyvolávaly svou gravitační silou torzní moment a zkrut vlákna. Systémam pák bylo možno těžké koule přemístit do protilehlé polohy a torzní váhy tak rozkmitat. Z pozorování bodů obratu bylo možno určit rovnovážnou polohu vah. Cavendish, jeden z nejlepších experimentátorů v historii fyziky, určil tak střední hustotu zeměkoule na 5 480 kg.m^{-3} a gravitační konstantu na $\kappa = 6,754.10^{-11}\ SI$.

Jolly (1879), měřil rozdíly v údaji dvouramených vah umístěných nad a pod velkou hmotnou koulí.

Boys (1895), využil měření periody torzních kmitů vybuzených hmotnými tělesy.

Luther, Towler (1981), z amerického Národního úřadu pro standardy provedli zatím nejpřesnější měření gravitační konstanty pomocí periody torzních vah s využitím moderních fyzikálních metod. Na křemenném vlákně průměru 10 mikrometrů a délky 40 cm byla zavěšena wolframová tyčka průměru 1 mm a délky 28 mm, na jejíchž koncích byly umístěny wolframové válečky průměru 7 mm a výšky 2,5 mm. Celý systém hmotnosti 7 g byl torzně rozkmitán gravitačním účinkem dvou wolframových koulí hmotnosti 10 kg. Váhy byly umístěny za tlaku 10^{-3} Pa, kmity detekovány pomocí 1024 fotodiod s elektronickým vyhodnocováním. Tato měření dala dnes používanou hodnotu gravitační konstanty

$$\kappa \ = \ 6,672\ 59\ .\ 10^{-11}\ \ \mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-2}.\mathrm{kg}^{-1}\ .$$

Tomu odpovídá hmotnost a střední hustota Země

$$M_Z \ = \ 5,976.10^{24}\ \mathrm{kg} \ \approx \ 6.10^{24}\ \mathrm{kg}\ , \qquad \rho \ = \ 5\ 518\ \mathrm{kg.m}^{-3}\ .$$

Srovnejte tyto údaje s měřeními Cavendishovými.

2.3.3 Keplerova úloha

Keplerova úloha je úloha o pohybu tělesa (planety) v centrálním gravitačním poli. Průběh efektivní potenciální energie pro tento případ je na obr. 2.28, kde jsou též vedeny různé hladiny energie. Je odtud zřejmé, že pohyb tělesa bude možný jen při energii $E \geq U_{efmin}$ dané (**??**). Tato minimální energie odpovídá vzdálenosti od centra zde označené jako r_0. Při záporné energii

$$E_1 \ = \ U_{efmin} \ = \ - \ \frac{\alpha^2 m}{2l^2}\ , \quad \alpha \ = \ \kappa M m$$

bude zůstávat vzdálenost od centra neměnná a pohyb bude tedy probíhat po kružnici o poloměru

$$r_0 \ = \ \frac{l^2}{\alpha m}\ .$$

[18] O podrobnostech viz Brož J., Roskovec V.: "Základní fyzikální konstanty", SPN Praha 1987, str. 202 - 210.

obr.2.28

Vzhledem k symetrii systému musí být pohyb po kružnici rovnoměrný. Jeho periodu snadno zjistíme z podmínky (**??**) jako

$$T = \frac{4\pi^2}{\kappa M}\, r_0^{3/2}\,. \tag{2.118}$$

Bude-li energie tělesa ležet v mezích $U_{efmin} < E_2 < 0$, bude pohyb finitní a bude probíhat v oblasti mezikruží vymezeného hodnotami r_{min} , r_{max}. Při hodnotě energie $E_3 = 0$ stane se pohyb právě infinitním, těleso se může přiblížit z nekonečna k centru na vzdálenost

$$r'_{min} = \frac{l^2}{2\kappa m^2 M} \tag{2.119}$$

(v tomto bodě je $\dot{r} = 0$). Konečně při energii $E_4 > 0$ bude pohyb také infinitní.

Všechny tyto výsledky jsme zjistili, aniž bychom znali tvar trajektorie, po níž se bude těleso v gravitačním poli pohybovat. Abychom jej určili, musíme do obecného řešení (**??**) dosadit efektivní potenciální energii (**??**):

$$\varphi = \int \frac{\frac{l}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E + \frac{\alpha}{r} - \frac{l^2}{2mr^2}\right]}} + C = \int \frac{\frac{l}{r^2}dr}{\sqrt{2mE + \left(\frac{\alpha m}{l}\right)^2 - \left(\frac{l}{r} - \frac{\alpha m}{l}\right)^2}} + C\,.$$

Provedeme-li substituci

$$u = \frac{l}{r} - \frac{\alpha m}{l}\,, \qquad u_0^2 = 2mE + \left(\frac{\alpha m}{l}\right)^2\,,$$

přejde hrozivě vyhlížející integrál pro φ v

$$\varphi = -\int \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} + C = \arccos\frac{u}{u_0} + C\,.$$

Konstantu C musíme určit z počáteční polohy polární osy, kdy $\varphi = 0$. Položíme ji rovnu nule a z konečného výsledku pak zjistíme, že jsme tím volili směr polární osy k periheliu, nejbližšímu bodu trajektorie. Upravíme nyní získaný vztah

$$\frac{u}{u_0} = \frac{\frac{l}{r} - \frac{\alpha m}{l}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{\alpha m}{l}\right)^2}} = \cos\varphi$$

tak, že zlomek zkrátíme výrazem $\frac{\alpha m}{l}$ a rozdělíme jej na součet dvou zlomků:

$$\frac{\frac{l^2}{\alpha m}}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}}} \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}}} + \cos\varphi \, .$$

V této rovnici už vidíme polární rovnici kuželosečky (M. 82). Označíme-li její parametr a excentricitu

$$p = \frac{l^2}{\alpha m} \, , \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}} \tag{2.120}$$

máme

$$\frac{p}{r} = 1 + e \, \cos\varphi \, . \tag{2.121}$$

To je tedy obecná rovnice trajektorie při pohybu tělesa v Newtonově gravitačním poli nebo nabité částice v přitažlivém Coulombově elektrostatickém poli. Bude-li síla Coulombova odpudivá, změní se znaménko $\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, Q \, q$ $(Q, q$ jsou elektrické náboje, ε_0 permitivita vakua), v rovnici kuželosečky se změní znaménko u jedničky na pravé straně a dostaneme rovnici (M.83).

Na základě (**??**) podle třídění kuželoseček provedeného odstavci M 4. (str. 32) můžeme okamžitě rozlišit trajektorie tělesa podle energie takto:

1. $e = 0$, $E = E_{min}$ - pohyb po **kružnici**.

$$E = -\frac{\alpha^2 m}{2l^2} \, , \qquad r = p = \frac{l^2}{\alpha m} \, .$$

2. $0 < e < 1$, $E_{min} < E < 0$ - pohyb po **elipse** s ohniskem v silovém centru.

Pro velkou a malou poloosu, vzdálenost perihelia a afelia máme

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|} \, , \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{l}{\sqrt{2m|E|}}$$

$$r_{min} = \frac{p}{1 + e} = a\,(\,1 - e\,) \, , \qquad r_{max} = \frac{p}{1 - e} = a\,(\,1 + e) \, . \tag{2.122}$$

Všimněte si, že velká poloosa elipsy závisí jen na energii tělesa, zatímco malá poloosa jak na energii tak na momentu hybnosti. Energie tedy určuje celkovou velikost elipsy, moment hybnosti její protáhlost.

3. $e = 1$, $E = 0$ - pohyb po **parabole**.

$$r_{min} = \frac{p}{2} = \frac{l^2}{2\alpha m} \, .$$

4. $e > 1$, $E > 0$ - pohyb po **bližší větvi hyperboly**.

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} = a\,(\,e-1\,)\,.$$

5. V případě odpudivé síly pro $\alpha < 0$ opět $e > 1$, $E > 0$ a rovnice trajektorie

$$\frac{p}{r} = -\,1 \,+\, e\,\cos\varphi$$

představuje **vzdálenější větev hyperboly**.

Připomeneme nyní formulaci tří slavných Keplerových zákonů, které umožnily Newtonovi objevit zákon gravitace a vytvořit tak první vědeckou fyzikální teorii. První dva zákony publikoval Kepler ve spise "Astronomia nova" v roce 1609 v Praze, třetí ve spise "Harmonices mundi" ("Harmonie světa") v roce 1619 v Linci.

1. zákon

Planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách a Slunce leží v jejich společném ohnisku.

2. zákon

Plochy opsané průvodičem planety za stejné doby jsou stejné.

3. zákon

Čtverce oběžných dob planet jsou úměrné třetím mocninám velkých poloos.

Především je třeba podotknout, že Kepler považoval Slunce za nehybné a tedy vztažná soustava spojená se středem Slunce vystupuje jako inerciální. První Keplerův zákon tvrdí, že trajektorie planety tvoří elipsu se Sluncem v ohnisku. Kepler to zjistil pečlivým proměřováním trajektorie Marsu na základě dlouholetých pozorování Tycha Braha. Do té doby panovalo přesvědčení, které sdílel i Koperník a Kepler, že planety se pohybují po kruhových drahách, jsou spojeny s nebeskými sférami. Dráha Marsu se od kruhové příliš neliší, odchylka činí asi 8 úhlových minut. Tycho Brahe, jako nejpřesnější pozorovatel předdalekohledové éry v astronomii, však dosáhl přesnosti vyšší než 4' a tato přesnost umožnila Keplerovi nakonec tvar dráhy určit jako eliptický. Znamenalo to oprostit se od starověkých a středověkých představ o "dokonalosti" kruhového pohybu a učinit nelehký krok do novověku.

Planeta se bude pohybovat po uzavřené elipse jen tehdy, bude-li na ni působit přesně jen Newtonova gravitační síla nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti. Ve skutečnosti na ni působí i další planety a nebeská tělesa a také Newtonův zákon nepopisuje přesně sluneční gravitaci - např. z toho důvodu, že Slunce je mírně zploštělé a není dokonale sféricky symetrické. To se projeví tak, že eliptická trajektorie planety se začne pomalu stáčet a přestane tvořit uzavřenou křivku. Zadáme-li malou odchylku od Newtonova zákona, např. závislost $1/r^{2{,}0001}$, dostaneme počítačovou simulací křivku na obr. 2.29. Stáčení perihelia planet je astronomům dobře známo a jeho měřením můžeme ověřovat, jak se skutečná síla působící na planetu liší od Newtonovy.

obr. 2.29

obr. 2.30

Druhý Keplerův zákon stanoví rychlost, jakou se planeta po své dráze pohybuje - v blízkosti Slunce rychleji, dále od Slunce pomaleji (obr. 2.30). Jde o nerovnoměrný pohyb po elipse a chceme-li vyjádřit závislost např. vzdálenosti planety na čase, museli bychom řešit integrál (**??**). Obyčejně se zákon pohybu planety vyjadřuje parametricky následujícím způsobem

$$r - a = - a\, e\, \cos\xi \;, \qquad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\; (\, \xi - e\, \sin\xi \,)\; . \tag{2.123}$$

K danému časovému okamžiku t najdeme hodnotu parametru ξ a k němu pak hodnotu r a φ. Pomocí počítačů je to dnes snadné.

Třetí Keplerův zákon stanoví úměrnost mezi čtverci oběžných dob a třetími mocninami velkých poloos planet. Odtud, a ze znalosti zákona pro dostředivou sílu, který objevil Huygens 1673, je možno odvodit Newtonův gravitační zákon. Pro případ kruhové dráhy planety je to snadné:

$$F = ma = m\, r\, \omega^2 = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} = \frac{\text{konst}}{r^2}\; . \tag{2.124}$$

Newton však provedl odvození i pro eliptické dráhy a dokázal tak, že z Keplerova zákona vyplývá, že gravitační síla klesá se čtvercem vzdálenosti. Předpokládal ekvivalenci obou tvrzení, tedy že i zpětně z platnosti gravitačního zákona plyne, že se planeta musí pohybovat po elipse. My jsme to dokázali integrováním tvaru trajektorie s Newtonovou potenciální energií při řešení Keplerovy úlohy. V Newtonových Principiích však tento důkaz ještě chybí.

Zbývá určit konstantu úměrnosti mezi T^2 a r^3 a zjistit, zda je pro všechny planety stejná (jak předpokládal Kepler), či pro každou planetu jiná. Ze zákona plošné rychlosti máme celkovou plochu elipsy

$$S = w\, T = \frac{l}{2m_p}\, T = \pi\, a\, b\; . \tag{2.125}$$

Dosadíme-li za a a b

$$a = \frac{\alpha}{2|E|}\;, \quad b = \frac{l}{\sqrt{2m|E|}} = \frac{l}{\sqrt{m\alpha}} a^{1/2}\;,$$

máme

$$T = \frac{2\pi m_p ab}{l} = 2\pi\sqrt{\frac{m_p}{\alpha}}\, a^{3/2} = 2\pi\, \sqrt{\frac{1}{\kappa M_S}}\, a^{3/2}\;, \tag{2.126}$$

takže

$$T^2 \;=\; \frac{4\,\pi^2}{\kappa\,M_S}\,a^3\,. \tag{2.127}$$

Za předpokladu, že Slunce je nehybné, je tedy konstanta úměrnosti ve třetím Keplerově zákoně stejná pro všechny planety a závisí jen na hmotnosti Slunce.

Pro informaci uvedeme údaje o parametrech planet, z nichž můžete platnost 3. Keplerova zákona snadno ověřit:

	a [10^6 km]	T [r]	e	m_p [kg]
Merkur	58	$0,241$	$0,205$	$3,3.10^{23}$
Venuše	108	$0,615$	$0,006$	$4,9.10^{24}$
Země	150	1	$0,016$	$6,0.10^{24}$
Mars	228	$1,881$	$0,093$	$6,4.10^{23}$
Jupiter	778	$11,86$	$0,048$	$1,9.10^{27}$
Saturn	1 427	$29,46$	$0,056$	$5,7.10^{26}$
Uran	2 870	$84,01$	$0,047$	$8,7.10^{25}$
Neptun	4 497	$167,8$	$0,009$	$1,0.10^{26}$
Pluto	5 900	$248,4$	$0,248$	$6,6.10^{23}$

2.3.4 Kosmické rychlosti

Mějme těleso hmotnosti m ve vzdálenosti $R_0 > R_Z$ od středu Země a udělme mu vodorovnou rychlost v_0. Budeme se zajímat o to, po jaké trajektorii se těleso bude pohybovat. Víme, že rovnicí trajektorie bude rovnice kuželosečky, počáteční bod bude bodem obratu ($\dot{r} = 0$) a z počátečních podmínek stanovíme energii a moment hybnosti tělesa:

$$E \;=\; \frac{1}{2}\,m\,v_0^2\,, \qquad l \;=\; m\,v_0\,R_0\,. \tag{2.128}$$

Určíme závislost excentricity trajektorie na počáteční rychlosti:

$$e \;=\; \sqrt{1+\frac{2El^2}{m\alpha^2}} \;=\; \sqrt{1+\beta^2 v_0^4 - 2\beta v_0^2} \;=\; |1-\beta v_0^2|\,, \quad \text{kde} \quad \beta = \frac{m\,R_0}{\alpha}\,. \tag{2.129}$$

obr. 2.31

Závislost excentricity na čtverci rychlosti je na obr 2.31.

Odtud snadno dostaneme následující klasifikaci:

1. Je-li $v_0 = 0$, bude $l = 0$, $p = 0$, $\cos\varphi = -1$ a těleso spadne na povrch Země volným pádem (trajektorie 1 na obr. 2.32).

2. Je-li

$$v_{0k} \;=\; \sqrt{\frac{\alpha}{mR_0}} \;=\; \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_0}} \;=\; \sqrt{g\frac{R_Z^2}{R_0}} \tag{2.130}$$

bude $e = 0$ a těleso se bude pohybovat po kruhové dráze. Rychlost v_{0k} pak nazýváme **kruhovou rychlostí** (trajektorie 5 na obr. 2.32). [19] Je-li $R_0 = R_Z$, tj. vystřelujeme-li těleso nízko nad Zemí, nazývá se kruhová rychlost **první kosmickou rychlostí**:

$$v_{01} \;=\; \sqrt{gR_Z} \;=\; 7,91 \text{ km.s}^{-1} \;. \tag{2.131}$$

První kosmické rychlosti, tedy kruhové dráze nízko nad Zemí odpovídá oběžná doba $T = 5\ 065 \text{ s} = 84,4 \text{ min}$.

3. Je-li

$$0 < v_0 \;<\; \sqrt{\frac{\alpha}{mR_0}} \;,$$

bude $0 < e < 1$ a těleso se bude pohybovat po eliptických trajektoriích (2, 3, 4 na obr. 2.32). Přitom $1 - \beta v_0^2 > 0$, odkud

$$r_{max} \;=\; \frac{p}{1-e} \;=\; R_0 \;,$$

[19] Podmínku pro kruhovou rychlost dostaneme ovšem snadno, přirovnáme-li Newtonovu gravitační sílu síle dostředivé

$$\kappa\frac{mM_Z}{R_0^2} \;=\; \frac{mv_0^2}{R_0} \;.$$

Odtud přímo plyne (1.22).

takže výchozí bod leží v apogeu, střed Země je ve vzdálenějším ohnisku elipsy.

4. Při takzvané kritické rychlosti těleso již nedopadne na zemský povrch, elipsa právě Zemi obepne (trajektorie 3 na obr. 2.32). Podmínkou k tomu je, aby se vzdálenost perigea právě rovnala poloměru Země:

$$r_{min} \; = \; \frac{p}{1+e} \; = \; R_Z \; .$$

Vyloučíme-li nyní ze vztahů $r_{max} = R_0$, $\quad r_{min} = R_z$ excentricitu e, dostaneme

$$p \; = \; \frac{2R_0 R_Z}{R_0 + R_Z} \; = \; \frac{m^2 v_0^2 R_0^2}{\alpha m} \; = \; \frac{v_0^2}{v_{01}^2} R_0$$

a kritická rychlost bude

$$v_{kr} \; = \; v_{01} \sqrt{\frac{2R_Z}{R_0 + R_Z}} \; . \tag{2.132}$$

Vidíme, že při $R_0 = R_Z$, tj. vystřelujeme-li těleso nízko nad zemí, je kritická rychlost právě rovna první kosmické rychlosti.

5. Je-li

$$v_{0p} \; = \; \sqrt{\frac{2\alpha}{mR_0}} \; = \; \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_0}} \; = \; \sqrt{2g\frac{R_Z^2}{R_0}} \; , \tag{2.133}$$

bude $e = 1$ a těleso se bude pohybovat po parabolické dráze. Rychlost v_{0p} pak nazýváme **parabolickou, únikovou rychlostí** (trajektorie 7 na obr. 2.32). [20]

Je-li $R_0 = R_Z$, tj. vystřelujeme-li těleso nízko nad Zemí, nazývá se parabolická rychlost **druhou kosmickou rychlostí**:

$$v_{02} \; = \; \sqrt{2gR_Z} \; = \; \sqrt{2} v_{01} \; = \; 11,2 \text{ km.s}^{-1} \; . \tag{2.134}$$

6. Je-li

$$\sqrt{\frac{\alpha}{mR_0}} \; < \; v_0 \; < \; \sqrt{\frac{2\alpha}{mR_0}} \; ,$$

bude $0 < e < 1$ a těleso se bude opět pohybovat po eliptické trajektorii (6 na obr. 2.32). Na rozdíl od případu 3 bude však tentokrát $1 - \beta v_0^2 < 0$, odkud

$$r_{min} \; = \; \frac{p}{1+e} \; = \; R_0 \; ,$$

takže výchozí bod leží v perigeu.

[20] Podmínku pro parabolickou rychlost dostaneme ovšem snadno, položíme-li energii tělesa rovnu nule

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \kappa \frac{m M_Z}{R_0} \; .$$

Odtud přímo plyne (**??**).

obr. 2.32

7. Je-li

$$v_0 > \sqrt{\frac{2\alpha}{mR_0}} \,,$$

bude $e > 1$ a těleso se bude pohybovat po hyperbolické trajektorii (8 na obr. 2.32).

Na obr. (2.33) vidíme počítačovou simulaci trajektorií tělesa vrženého vodorovně ve výšce 3 000 km nad zemským povrchem rychlostmi 5,5; 6,0; 6,5; 7,0; 7,5; 8,0; 8,5 km.s^{-1}.

Chceme-li vystřelit těleso takovou rychlostí, aby opustilo sluneční soustavu, měli bychom mu udělit parabolickou rychlost odpovídající sluneční gravitaci:

$$v_{0pS} = \sqrt{\frac{2\kappa M_S}{R_S}} = 42,1 \mathrm{km.s}^{-1} \,,$$

kde $M_S = 1,97.10^{30}$ kg je hmotnost Slunce a $R_S = 1,5.10^8$ km je střední vzdálenost Země od Slunce. To je příliš velká rychlost. Můžeme však využít toho, že se Země na své dráze pohybuje značnou rychlostí $v_Z = 29,7$ km.s^{-1} a vystřelit těleso ve směru pohybu Země jen rychlostí

$$v_{0pS1} = v_{0pS} - v_Z = 12,2 \text{ km.s}^{-1} \,.$$

Přitom jsme ale nebrali v úvahu gravitaci zemskou; tělesu totiž musíme dodat dostatek kinetické energie k opuštění Země. Tak dostáváme konečnou rychlost potřebnou k vystřelení tělesa za hranice sluneční soustavy

$$v_{03} = \sqrt{v_{0p}^2 + v_{0pS1}^2} = 16,6 \text{ km.s}^{-1} \,. \qquad (2.135)$$

obr. 2.33

Této rychlosti se říká **třetí kosmická rychlost**.

2.3.5 Izotropní prostorový oscilátor

Druhý případ, kdy se při pohybu v centrálním izotropním poli setkáváme s uzavřenou trajektorií, je úloha o izotropním prostorovém oscilátoru. V tom případě je vhodnější použít kartézské souřadnice s počátkem v silovémn centru a s osami x a y (rovinný pohyb!). Pro energii částice pak dostaneme podle (**??**)

$$E \;=\; \frac{1}{2}\;m\;v^2\;+\;\frac{1}{2}\;k\;r^2\;=\;\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}ky^2\;. \tag{2.136}$$

To je ovšem součet energií dvou lineárních harmonických oscilátorů ve směrech kartézských os o stejných vlastních frekvencích $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Takovou superpozicí pohybů jsme se již zabývali v kapitole 1 (str. 47) a víme, že výslednou trajektorií bude elipsa se středem v počátku.

<u>Úloha</u> (pád meteoru)

Položme si nejprve otázku, jakou rychlostí musíme vrhnout nebo vystřelit těleso na povrchu Země svisle vzhůru, aby se už nevrátilo na zem. Musíme mu zřejmě dodat takovou kinetickou energii, abychom vykompenzovali jeho zápornou energii potenciální:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \;=\; \kappa\frac{mM_Z}{R_Z}\;,$$

odkud

$$v_0 \;=\; \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z}}\;. \tag{2.137}$$

Musíme mu tedy dodat druhou kosmickou rychlost. Můžeme očekávat, že takovou rychlostí dopadne na zem i nebeské těleso, které začne padat z velké výšky s nulovou počáteční rychlostí. Odpor nepatrné vrstvy atmosféry v poslední fázi letu přitom můžeme zanedbat.

Bude-li těleso (meteor) padat z konečné výšky h, opět s nulovou počáteční rychlostí, dostaneme pro něj ze zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - mg\frac{R_Z^2}{r} \;=\; -mg\frac{R_z^2}{R+h}\;. \tag{2.138}$$

odkud

$$\dot{r} \;=\; -\sqrt{\frac{2gR_Z^2(R_Z+h-r)}{r(R_Z+h)}}\;. \tag{2.139}$$

To je rychlost volného pádu s velké výšky h ve vzdálenosti r od středu Země. Rychlost dopadu na zem odtud dostaneme, položíme-li $r = R_Z$:

$$v_d \;=\; \sqrt{\frac{2gR_Zh}{R_Z+h}}\;. \tag{2.140}$$

Snadno se přesvědčíme, že v limitě malé výšky dostaneme známou rychlost dopadu $\sqrt{2gh}$ a v limitě nekonečně velké výšky druhou kosmickou rychlost $\sqrt{2gR_Z}$. Separací proměnných a integrací (**??**) bychom mohli určit i časový zákon pádu s velké výšky a celkovou dobu pádu. Je to však matematicky náročnější. [21]

<u>Úloha</u> (hmotnost Slunce a Měsíce)

Známe-li gravitační konstantu, potom k určení hmotnosti Slunce stačí udat vzdálenost některé planety od Slunce r a její oběžnou dobu T. Podle 3.Keplerova zákona pak máme (dosadíme třeba údaje pro vzdálenost a oběžnou dobu Země)

$$M_S \;=\; \frac{4\pi^2r^3}{\kappa T^2} \;=\; 1,97.10^{30}\ \mathrm{kg} \;\approx\; 2.10^{30}\ \mathrm{kg}\;. \tag{2.141}$$

Pokud jde o hmotnost Měsíce, je úloha obtížnější - museli bychom znát vzdálenost a oběžnou dobu nějaké umělé družice Měsíce. Jinak můžeme považovat Zemi a Měsíc za soustavu dvou těles, která na sebe působí silami akce a reakce a obě se vzájemně pohybují kolem společného hmotného středu ve vzdálenostech r_M , r_Z, kde $r_M + r_Z = r =$

[21] Viz např. Trkal V.: "Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa", NČSAV Praha 1956, str. 32.

$3,6.10^8$ m je vzdálenost Měsíce od Země. Oběžná doba obou těles kolem hmotného středu je jeden měsíc, tj. $T = 2,36.10^6$ s. Zapíšeme rovnice pro dostředivé síly působící na Měsíc a Zemi:

$$M_M r_M \frac{4\pi^2}{T^2} = \kappa \frac{M_Z M_M}{r^2} , \qquad M_Z r_Z \frac{4\pi^2}{T^2} = \kappa \frac{M_M M_Z}{r^2} .$$

Zkrátíme první rovnici M_M, druhou M_Z a sečteme je:

$$r \, \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\kappa}{r^2}(M_Z + M_M) .$$

Odtud již plyne

$$M_M = \frac{4\pi^2 r^3}{\kappa T^2} - M_Z = 7,34.10^{22} \text{ kg} . \tag{2.142}$$

Tato metoda je ovšem tím méně přesná, čím je obíhající těleso lehčí než těleso kolem kterého obíhá (na pravé straně (**??**) je rozdíl dvou velmi blízkých čísel).

<u>Úloha</u> (geostacionární dráha)

Určete výšku v jaké musí obíhat geostacionární družice a její rychlost. Geostacionární družice obíhá po kruhové trajektorii v ekvatoriální (rovníkové) rovině stejnou úhlovou rychlostí s jakou rotuje Země. Družice tedy stále jakoby "visí" nad stejným bodem nad rovníkem a může být využita k telekomunikačním účelům. Musí platit

$$T = \frac{2\pi R_0}{v_{0k}} = 2\pi R_0 \sqrt{\frac{R_0}{g R_Z^2}} = 1 \text{ den} .$$

Odtud

$$R_0 = \left(\frac{g R_Z^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} , \qquad h = R_0 - R_Z = 35\ 800 \text{ km} . \tag{2.143}$$

Kruhová rychlost na geostacionární dráze je $v_{0k} = 3,076$ km.s^{-1}.

<u>Úloha</u> (šachta středem Země)

Představte si šachtu provrtanou napříč zeměkoulí a procházející středem Země a uvažujte, jak se bude pohybovat těleso, které do takové šachty spadne (obr.2.34). Na těleso bude působit kvazielastická síla (**??**)

$$F_r = -\, m\kappa \frac{M_Z}{R_Z^3}\, r = -\, m \frac{g}{R_Z}\, r = -\, kr.$$

To je kvazielastická síla, která vyvolává harmonické kmity s periodou

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_Z}{g}} .$$

Na druhou stranu zeměkoule se tedy těleso propadne za půl periody $\tau = \pi\sqrt{R_Z/g} = 2\ 500$ s, tedy asi 42 minut. Je to zřejmě nejrychlejší způsob dopravy do Austrálie.

Určíme ještě rychlost tělesa při průletu středem Země. Na počátku bude mít vzhledem ke středu Země energii

$$E = \frac{1}{2}\, kR_Z^2 = \frac{1}{2}\, mgR_Z \,.$$

Při průletu středem Země se tato potenciální energie změní na kinetickou, takže těleso dostane první kosmickou rychlost $v_{01} = \sqrt{gR_Z} = 7,9$ km.s^{-1}.

Úloha (pád na Slunce)

Jedna z možností, jak se zbavovat nepohodlného odpadu, včetně radioaktivního, je odhazovat jej na Slunce. Pomineme ekonomické a etické aspekty a určíme, jakou nejmenší rychlost musíme odpadkům dodat, aby spadly na Slunce. Jde zřejmě o to zbavit je momentu hybnosti vůči Slunci, tj. zastavit je na zemské dráze a zároveň jim dodat energii potřebnou k opuštění Země. Je-li v_{02} druhá kosmická rychlost a v_Z rychlost Země na její dráze kolem Slunce, je potřebná rychlost

$$v_{04} = \sqrt{v_{02}^2 + v_Z^2} = 31,8 \text{ km.s}^{-1} \,.$$

Tato rychlost se někdy nazývá čtvrtou kosmickou rychlostí. Je značná a takový způsob likvidace odpadků by byl zřejmě nákladný.

Uvažme ještě, co by se stalo, kdyby se Země náhle zastavila na své dráze a začala padat na Slunce. Určíme jak dlouho by takový pád trval.Zdálo by se, že je to obtížná úloha, protože jde o pád z velké výšky v centrálním gravitačním poli. Můžeme však takový pád považovat za oběh Země kolem Slunce po velmi protáhlé, zdegenerované elipse o velké poloose rovné polovině poloměru zemské dráhy r (obr.2.35). Potom podle 3. Keplerova zákona máme

$$\frac{T}{T_Z} = \frac{r^3}{8r^3} \quad \text{kde} \quad T_Z = 1 \text{ rok} \,.$$

Pád by zřejmě trval půl periody, tj.

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} T_Z = 65 \ \text{ dní} \,.$$

Zbývaly by nám tedy asi dva měsíce na uspořádání našich posledních záležitostí, při čemž by nám bylo stále tepleji.

2.4 Pohyb v neinerciální vztažné soustavě

2.4.1 Setrvačné síly

1. **Translační pohyb soustavy**

Předpokládejme nyní, že vztažná soustava, v níž pohyb částice studujeme, je neinerciální. Někdy je vhodné, a dokonce nezbytné s takovou soustavou pracovat. Spojujeme-li

obr. 2.34 obr. 2.35

naši kartézskou soustavu souřadnic se zemským povrchem, považujeme ji v prvním přiblížení za inerciální. Víme však, že Země rotuje a obíhá kolem Slunce. Je-li vztažná soustava spojená se Sluncem a stálicemi inerciální, potom soustava spojená se Zemí inerciální nebude. To ovšem nevadí, pokud jsme si toho vědomi a jsme připraveni na možné efekty, které neinerciálnost vztažné soustavy může způsobit. Obecně lze říci, že můžeme používat i neinerciální vztažnou soustavu, ale musíme do ní uměle zavést další síly, síly setrvačné, aby výsledek našich výpočtů souhlasil s pozorovanými jevy. V tomto odstavci odvodíme tvar těchto setrvačných sil. Odkud se tyto síly berou je otázka, jíž se zabývá obecná teorie relativity.

Uvažujme nejprve translační pohyb vztažné soustavy. Na obr. 2.36 je znázorněna inerciální kartézská soustava S a neinerciální soustava S', jejíž počátek má v soustavě S polohový vektor $\vec{R}(t)$. Ten je obecnou funkcí času, takže soustava S' se pohybuje vůči inerciální soustavě S se zrychlením. Odpovídající kartézské osy obou soustav však zůstávají stále souhlasně rovnověžné, takže soustava S' se vůči soustavě S neotáčí. Pro polohový vektor nějaké částice, její rychlost a zrychlení v nečárkované a čárkované vztažné soustavě pak máme:

$$\vec{r} \, = \, \vec{R} \, = \, \vec{r}\,' \; , \quad \vec{v} \, = \, \vec{V} \, + \, \vec{v}\,' \; , \quad \vec{a} \, = \, \vec{A} \, + \, \vec{a}\,' \; ,$$

kde

$$\vec{V} \; = \; \frac{d\vec{R}}{dt} \quad , \qquad \vec{A} \; = \; \frac{d\vec{V}}{dt} \; .$$

Vektor $\vec{A}$ je tedy translační zrychlení soustavy S'. Pohybová rovnice částice pak bude znít

$$m \, \vec{a}\,' \; = \; m \, \vec{a} \; - \; m \, \vec{A} \, . \tag{2.144}$$

V neinerciální soustavě se tedy na pravé straně pohybové rovnice objevil další člen $m\vec{A}$, který vyjadřuje setrvačnou sílu. Označíme-li výslednici pravých sil jako $\vec{F}$ a setrvačnou

obr. 2.36 obr. 2.37

sílu translačního pohybu jako $\vec{S}_s$, máme

$$m\,\vec{a}' \;=\; \vec{F} \,+\, \vec{F}_s \quad , \qquad \vec{F} \;=\; m\,\vec{a}\;, \quad \vec{F}_s \;=\; -m\,\vec{A}\,. \tag{2.145}$$

Existenci setrvačné síly známe dobře z praxe dopravních prostředků. Brzdí-li vagon metra, stává se neinerciální vztažnou soustavou a na pasažéry v něm začne působit setrvačná síla, která vrhá osoby ve směru jízdy (tedy opačným směrem než míří zrychlení soustavy). Paradoxní charakter setrvačných sil je zřejmý z toho, že narazí-li vagon metra náhle na betonovou stěnu a po krátkou dobu v něm bude působit katastrofálně obrovská setrvačná síla, jeví se situace v neinerciální soustavě tak, že vagon zůstává stále v klidu a betonová stěna je proti němu vržena obrovskou rychlostí. S hlediska soustavy spojené s vagonem si nemůžeme vznik této síly nijak vysvětlit. E. Mach se pokusil připsat vznik setrvačných sil celkovému rozložení hmot ve vesmíru (tzv. Machův princip). V denní praxi však tuto sílu spíše připisujeme neobratnosti strojvůdce než účinku vzdálených galaxií. Setrvačné síly nazýváme také silami zdánlivými, ale jejich reálné účinky mohou být leckdy nedozírné.

Souvislost setrvačných a gravitačních sil, která vedla k formulaci principu ekvivalence a vzniku obecné teorie relativity, ilustruje známý myšlený pokus s **Einsteinovou zdviží** (obr. 2.37). V tomto provedení je pokus skutečně lépe provádět pouze jako myšlený. Utrhne-li se výtah s pasažérem, působí na pasažéra v inerciální soustavě spojené s povrchem Země pouze pravá síla $\vec{F} = m\vec{g} = (0,\ 0,\ \ -mg)$, která vyvolává volný pád. V neinerciální soustavě spojené s výtahem padajícím se zrychlením $\vec{g}$ působí na pasažéra kromě pravé síly ještě setrvačná síla $\vec{F}_s = -m\vec{g} = (0,\ 0,\ mg)$, takže v neinerciální soustavě máme

$$m\,\vec{a}' \;=\; m\,\vec{g} \,-\, m\,\vec{g} \;=\; 0\,. \tag{2.146}$$

Vůči kabině výtahu je tedy pasažér v beztížném stavu. Podotýkáme, že nelze říci, že na pasažéra nepůsobí žádné síly (nejde o bezsilovou částici), ale výslednice síly tíhové a síly

obr. 2.38

setrvačné je nulová. Proto je tak důležitá otázka, kterou jsme se již zabývali, zda gravitační a setrvačná hmotnost jsou ekvivalentní. Pokud by se ukázalo, že dlouhodobý pobyt člověka v kosmu ve stavu beztíže, je zdraví škodlivý, bylo by třeba vytvářet umělou tíži působením setrvačných sil (například rotací kosmické stanice).

Rotační pohyb soustavy

Předpokládejme nyní, že inerciální a neinerciální vztažné soustavy mají společný počátek, a že soustava S' rotuje v soustavě S úhlovou rychlostí ω. Pro jednoduchost budeme uvažovat rotaci kolem osy z, takže osy z, z' splývají a zůstávají nehybné (obr. 2.38).

Mějme nyní částici o polohovém vektoru $\vec{r} \equiv \vec{r}'$ nehybnou v rotující neinerciální soustavě. V soustavě S se ovšem bude polohový vektor této částice v čase měnit spolu s rotací soustavy S'. Pootočí-li se osy x a y o malý úhel $\delta\varphi$, změní se polohový vektor $\vec{r}$ o

$$\delta\vec{r} \;=\; \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}\,. \tag{2.147}$$

Plyne to snadno z obr. 2.38. Jako $\delta\vec{\varphi}$ jsme označili vektor v pravotočivém směru osy rotace o velikosti malého úhlu pootočení $\delta\varphi$. Je-li θ úhel mezi polohovým vektorem $\vec{r}$ a osou z, bude zřejmě velikost vektoru $\delta\vec{r}$ rovna

$$\delta r \;=\; r\ \sin\theta\ \delta\varphi\,.$$

To je ovšem velikost vektorového součinu vektorů $\delta\vec{\varphi}$ a $\vec{r}$. Také směr vektorového součinu těchto vektorů odpovídá směru vektoru $\delta\vec{r}$, čímž jsme zdůvodnili (**??**). Lze snadno ukázat, že změna libovolného vektoru $\vec{a}$ v důsledku rotace bude $\delta\vec{a} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{a}$.

Přejdeme nyní k diferenciálům. Máme

$$d\vec{r} \;=\; d\vec{\varphi} \times \vec{r}\,, \qquad \vec{v} \;=\; \frac{d\vec{r}}{dt} \;=\; \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} \;=\; \vec{\omega} \times \vec{r}\,.$$

Uvažme nyní obecnější situaci, kdy se částice v rotující soustavě pohybuje, kdy třeba běžíme po roztočeném kolotoči nebo se pohybujeme na povrchu rotující Země. Potom se rychlost částice v inerciální soustavě bude skládat z rychlosti částice v neinerciální soustavě a rychlosti vzniklé rotací této soustavy:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,. \tag{2.148}$$

Symbolem $\frac{d'}{dt}$ jsme označili derivování podle času v rotující soustavě. Pro rychlosti částice v nehybné soustavě a v rotující soustavě tedy máme

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,. \tag{2.149}$$

Nyní využijeme toho, že vztah (**??**) musí platit pro *jakýkoliv vektor* a použijeme jej pro vektor $\vec{v}'$. Tímto trikem dostaneme zrychlení částice v rotující vztažné soustavě $\vec{a}'$ a s ním všechny setrvačné síly, které v této soustavě působí.

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \frac{d'\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{v}' = \frac{d}{dt}\left(\vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}\right) - \vec{\omega} \times \vec{v}' = \\ &= \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{v}' = \\ &= \vec{a} - \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \left(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}\right) - \vec{\omega} \times \vec{v}' = \\ &\quad \vec{a} - \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) - 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'\,. \end{aligned} \tag{2.150}$$

Pohybová rovnice v rotující soustavě tedy zní

$$m\,\vec{a}' = m\,\vec{a} - m\vec{a}_E - m\,\vec{a}_d - m\,\vec{a}_C\,. \tag{2.151}$$

Vedle pravých sil zde tedy působí tři další setrvačné síly, které mazýváme **síla Eulerova, síla odstředivá a síla Coriolisova**. Jsou to

síla Eulerova:	$\vec{F}_E = -m\,\vec{a}_E = -m\,\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$
síla odstředivá:	$\vec{F}_o = -m\,\vec{a}_d = -m\,\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$
síla Coriolisova:	$\vec{F}_C = -m\,\vec{a}_C = -2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{v}'\,.$

obr. 2.39

Zde $\vec{\varepsilon}$ je úhlové zrychlení soustavy, $\vec{a}_d$ je dostředivé zrychlení. [22]

2.4.2 Pohyb na povrchu Země

Budeme nyní ilustrovat účinky setrvačných sil při pohybu částice (tělesa) na povrchu Země . Počátek soustavy souřednic umístíme ve středu Země a osy pevně spojíme s rotující Zemí. Pohybová rovnice částice na povrchu Země pak je

$$m\vec{a}' \;=\; m\vec{a}_g - m\vec{A} - m\vec{\varepsilon} \times \vec{r} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \; . \qquad (2.152)$$

První člen na pravé straně (**??**) představuje jedinou uvažovanou pravou sílu působící na částici, gravitační působení Země. Mohli bychom do ní zahrnout i gravitační působení Slunce, Měsíce a planet, gravitační zrychlení $\vec{a}_g$ nadto závisí na přesném tvaru Země a lokálním rozložení hmot. Předpokládejme však, že se zajímáme o pohyb částice v malé oblasti prostoru na zemském povrchu, například vrh na malou vzdálenost, a že toto silové

[22] Zde bohužel dochází k určité terminologické nedůslednosti. Odstředivá síla odpovídající zrychlení $-\vec{a}_d$ zde vystupuje jako setrvačná síla vznikající v rotující vztažné soustavě a působící v ní na všechna tělesa. V inerciální soustavě existuje síla dostředivá, která vyvolává kruhový pohyb a k ní jako síla reakce síla odstředivá. To jsou ovšem pravé síly, z nichž každá působí na jiné těleso. Roztáčíme-li nad hlavou kámen uvázaný na provázku, působí dostředivá síla na kámen a odstředivou silou působí kámen prostřednictvím provázku na naši ruku. Rotuje-li však prádlo v odstředivce a je nehybné vůči neinerciální soustavě spojené s bubnem odstředivky, působí na kapky vody v prádle setrvačná odstředivá síla. Situace je o to komplikovanější, že matematický výraz pro odstředivou sílu jako pravou sílu reakce na sílu dostředivou a pro setrvačnou odstředivou sílu jsou stejné. Je dobré si tyto pojmy ujasnit.

pole zde budme považovat za homogenní.

Druhý člen vyjadřuje setrvačnou sílu způsobenou nerovnoměrností translačního pohybu Země na její dráze. Rychlost pohybu Země je $v_Z = (29,7 \pm 0,5)$ km.s^{-1} a odchylka směru činí v průměru 1^0 za den. Nerovnoměrnost je dána druhým Keplerovým zákonem, ale v krátkých časových intervalech se pochopitelně neprojevuje. Tuto sílu můžeme proto zanedbat.

Třetí člen vyjadřuje sílu Eulerovu, která by se projevila při zpomalování nebo zrychlování zemské rotace. Tyto změny jsou však zcela zanedbatelné a i Eulerovu sílu můžeme v tomto případě zanedbat. [23]

Čtvrtý člen je síla odstředivá. Míří kolmo od zemské osy, leží v rovině místního poledníku (obr. 2.39) a má velikost

$$F_o \;=\; m\; R_z\; \omega^2\; \cos\varphi' \;,$$

kde φ' je geocentrická šířka. Tato síla se sčítá vektorově se silou gravitační na sílu tíhovou (viz obrázek) a v místě o dané geocentrické šířce můžeme považovat výsledné tíhové pole opět za homogenní, tedy tíhu za konstantní. Experimentálně nemáme možnost rozlišit gravitační a odstředivou sílu a měřit můžeme jen sílu tíhovou. Olovnice nám tak ukazuje nikoli směr do středu Země, ale směr mírně odchýlený. Astronomickými přístroji nivelovanými podle vodováhy a olovnice tedy neurčujeme geocentrickou šířku φ', ale geografickou (zeměpisnou) šířku φ. [24]

Považujeme-li Zemi za kouli, vezmeme-li v úvahu, že její rotace je pomalá ve srovnání s krátkodobými pohyby na jejím povrchu ($\omega = 7,3.10^{-5}$ s^{-1}) a zanedbáme-li rozdíl mezi geocentrickou a geografickou šířkou, můžeme pomocí kosinové věty z trojúhelníka na obr. 2.39 odvodit vztah mezi tíhovým a gravitačním zrychlením:

$$g \;=\; \sqrt{\;a_g^2 + a_o^2 - 2a_g a_o \cos\varphi'} \;=\; \sqrt{a_g^2 + R_Z^2\omega^4\cos^2\varphi' - 2a_g R_Z\omega^2\cos^2\varphi'} \;=$$

$$=\; a_g \left(1 \;-\; \frac{2R_Z\omega^2\cos^2\varphi'}{a_g}\right)^{1/2} \;\approx\; a_g \;-\; R_Z\omega^2\cos^2\varphi \,. \qquad (2.153)$$

Rozdíl mezi tíhovým zrychlením na pólu a na rovníku by podle tohoto výpočtu měl být $R_Z\omega^2 = 0,034$ m.s^{-2}. Ve skutečnosti činí $0,0516$ m.s^{-2} vzhledem k tomu, že Země je geoid. [25]

[23] Změny délky dne jeví roční odchylky asi 22 ms v důsledku klimatického cyklu, půlroční odchylky kolem 10 ms související s excentricitou zemské dráhy a konečně se den prodlužuje asi o 1 s za 60 000 let slapovým působením.

[24] Závislost tíhového zrychlení na zeměpisné šířce poprvé zjistil francouzský astronom J. Richer, který byl v roce 1671 vyslán do Cayenne provádět astronomická měření. Po příjezdu do Cayenne na rovníku zjistil, že se mu kyvadlové hodiny nastavené v Paříži opožďují o 2 minuty za den. Seřídil je podle místního času a po návratu do Paříže se mu hodiny začaly opět o dvě minuty denně předcházet. Huygens správně vysvětlil tento efekt jako důsledek odstředivé síly vyvolané rotací Země.

[25] Na pólu bylo naměřeno $g_p = 9,8321$ m.s^{-2}, na rovníku $g_r = 9,7805$ m.s^{-2}. Normální tíhové zrychlení $g_n = 9,80665$ m.s^{-2} odpovídá přibližně zeměpisné šířce 45^0.

Podobně bychom mohli podle obr. 2.39 pomocí sinové věty určit rozdíl mezi směrem do středu Země a směrem tíhy:

$$\frac{a_o}{\sin(\varphi - \varphi')} = \frac{g}{\sin \varphi'} ,$$

odkud

$$\varphi - \varphi' \approx \sin(\varphi - \varphi') = \frac{a_o}{g} \sin \varphi' =$$

$$\frac{R_Z \omega^2 \cos \varphi' \sin \varphi'}{g} = \frac{R_Z \omega^2 \sin 2\varphi'}{2g} \approx 0,00173 \ \sin 2\varphi . \tag{2.154}$$

Maximální odchylka směru tedy nastává na 45^0 šířky, a to 0,00173 = 6'. Ve skutečnosti Země nemá kulový tvar a v prvním přiblížení můžeme brát, že se v důsledku rotace ještě tvárné Země vytvořil tvar rotačního elipsoidu a směr tíhy je kolmý k jejímu povrchu (kdyby nebyl, docházelo by k tečným pohybům na povrchu Země). Určíme-li směr normály k eliptickému poledníkovému řezu, zjistíme že maximální odchylka olovnice od směru do středu Země je opět na 45^0 a činí asi 11'.

Poslední síla vystupující v rovnici (**??**) je síla Coriolisova. Budeme-li nadále označovat rychlost částice vzhledem k rotující Zemi bez čárky jako $\vec{v}$, můžeme napsat pohybovou rovnici ve tvaru

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2\vec{v} \times \vec{\omega} . \tag{2.155}$$

Určíme napřed směr působení Coriolisovy síly (viz obr. 2.40 a), b), c), d)) na těleso pohybující se *na severní polokouli*; na jižní polokouli bude směr Coriolisovy síly opačný.

Pohybuje-li se těleso vodorovně ve směru poledníku ze severu na jih, bude Coriolisova síla o velikosti

$$F_C = 2m \ v \ \omega \ \sin \varphi \tag{2.156}$$

působit směrem na západ (obr. 2.40 a). Při pohybu z jihu na sever působí Coriolisova síla směrem na východ (obr. 2.40b). Pro pomalu se pohybující tělesa je tato síla přirozeně malá, ale mohou se projevit její dlouhodobé účinky (podemílání břehů řek tekoucích severojižním směrem, opotřebovávání jedné z kolejnic jednosměrných tratí.) V meteorologii je s Coriolisovou silou třeba počítat, protože ovlivňuje směr pohybu pasátních větrů a mořských proudů, smysl otáčení cyklonů apod.

Pohybuje-li se těleso po rovnoběžce, bude Coriolisova síla mířit kolmo k zemské ose, při pohybu na východ bude odstředivou sílu zvětšovat (obr. 2.40 c), při pohybu na západ zmenšovat (obr. 2.40d) o $2mv\omega$ a nebude záviset na zeměpisné šířce. Tíhové zrychlení tělesa při pohybu v rovnoběžkovém směru bude mít velikost

$$g' = a_g - (R_Z \omega^2 \cos \varphi \pm 2v\omega) \cos \varphi . \tag{2.157}$$

V následujících úlohách prostudujeme vliv Coriolisovy síly na některé pohyby na zemském povrchu. Soustavu souřadnic přitom zvolíme jako na obr. 2.41, tj. počátek ve vybraném místě zemského povrchu o zeměpisné šířce φ, osu z svisle vzhůru, osu x na východ a osu y na sever.

obr. 2.40

obr. 2.41

Potom budou vektory

$$\vec{g} = (\ 0,\ 0,\ -g\ )\ , \qquad \vec{\omega} = (\ 0,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi\ )$$

a pohybovou rovnici (**??**) můžeme rozepsat do složek jako

$$\ddot{x} = 2\dot{y}\omega\sin\varphi - 2\dot{z}\omega\cos\varphi\ , \quad \ddot{y} = -2\dot{x}\omega\sin\varphi\ , \quad \ddot{z} = -g + 2\dot{x}\omega\cos\varphi\ . \tag{2.158}$$

Po první integraci dostaneme

$$\dot{x} = 2y\omega\sin\varphi - 2z\omega\cos\varphi + C_1\ , \quad \dot{y} = -2x\omega\sin\varphi + C_2\ , \quad \dot{z} = -gt + 2x\omega\cos\varphi + C_3\ . \tag{2.159}$$

Úloha (volný pád na rotující Zemi)

Počáteční podmínky pro volný pád jsou $t = 0,\ x = y = 0,\ z = h,\ \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. Odtud určíme integrační konstanty $C_1 = 2h\omega\cos\varphi$, $C_2 = C_3 = 0$, funkce $\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}$ dosadíme do rovnic pro $\ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{z}$ a zanedbáme členy druhého řádu obsahující ω^2. V tomto přiblížení dostáváme v souhlase s počátečními podmínkami

$$x = \frac{1}{3}\,\omega\,g\,t^3\,\cos\varphi\ , \qquad y = 0\ , \qquad z = h - \frac{1}{2}gt^2\ . \tag{2.160}$$

Odtud je zřejmé, že padající těleso bude (na severní polokouli) vlivem Coriolisovy síly uchylováno směrem na východ. [26]. Vyloučíme-li z pohybových rovnic pro x a z čas, dostaneme rovnici trajektorie volného pádu

$$z = h - \frac{1}{2}\,g\,\left(\frac{3}{\omega g\cos\varphi}\right)^{2/3} x^{2/3}\ . \tag{2.161}$$

To je semikubická (Neilova) parabola (obr. 2.42).

Pro $z = 0$ dostaneme odchylku dopadu tělesa od paty kolmice

$$x_d = \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}\frac{\omega g\cos\varphi}{3}\ . \tag{2.162}$$

Úloha (svislý vrh vzhůru na rotující Zemi

Počáteční podmínky pro svislý vrh vzhůru jsou $t = 0,\ x = y = z = 0,\ \dot{x} = \dot{y} = 0,\ \dot{z} = v_0 > 0$. Integrační konstanty dostaneme $C_1 = C_2 = 0,\ C_3 = v_0$. Stejným postupem jako při řešení volného pádu dostaneme

$$x = \left(\frac{1}{3}\,\omega\,g\,t^3 - \omega\,v_0\,t^2\right)\cos\varphi\ , \qquad y = 0\ , \qquad z = v_0\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2\ . \tag{2.163}$$

[26] Ve vyšším přiblížení bychom dostali též malou odchylku na jih, ta je však neměřitelná a srovnatelná s vlivem gravitace Měsíce

obr. 2.42 obr. 2.43

Trajektorie je na obr. 2.43. Odchylka místa dopadu od místa vrhu bude nyní *západní*, a to

$$x_d \;=\; -\frac{4}{3}\;\frac{\omega v_0^3 \cos\varphi}{g^2}\;. \tag{2.164}$$

Podobně bychom mohli řešit i šikmý vrh s Coriolisovou silou. Pak záleží na směru výstřelu vzhledem ke světovým stranám. Kdybychom například stříleli ve směru s východním azimutem α vzhledem k severu a počáteční rychlost měla vodorovnou složku v'_{0y} a svislou v_{0z}, dostali bychom výsledek, že místo dopadu střely bude odchýleno od roviny výstřelu o

$$x'_d \;=\; \frac{4v_{0z}^2\omega}{g^2}\;\left(\,v'_{0y}\sin\varphi - \frac{1}{3}\;v_{0z}\cos\varphi\cos\alpha\,\right)\;. \tag{2.165}$$

To je v souladu s tím, že například při střelbě z jihu na sever pod nepříliš velkým elevačním úhlem bude střela snášena na východ.

Úloha (Foucaultovo kyvadlo)

Coriolisova síla způsobuje stáčení roviny kyvu matematického kyvadla. Tento pokus provedl J. Foucault a kyvadlo nese jeho jméno; je to názorná demonstrace rotace zemské.[27] Uvažme malé kyvy takového kyvadla, které budeme považovat za harmonický oscilátor pohybující se ve vodorovné rovině x, y. Jeho vlastní úhlová frekvence je $\omega_0 = \sqrt{l/g}$ a kromě toho na ně působí Coriolisova síla. Máme tedy pohybové rovnice

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \;=\; 2\dot{y}\omega \sin\varphi \;, \qquad \ddot{y} + \omega_0^2 y \;=\; -2\dot{x}\omega \sin\varphi \;. \tag{2.166}$$

Druhou z těchto rovnic vynásobíme imaginární jednotkou i, obě rovnice sečteme a přejdeme ke komplexní proměnné $\xi = x + \mathrm{i}y$. Potom máme

$$\ddot{\xi} + (2\mathrm{i}\omega \sin\varphi)\, \xi + \omega_0^2 \xi \;=\; 0 \;. \tag{2.167}$$

Řešení hledáme ve tvaru $\mathrm{e}^{\alpha t}$ a dostáváme charakteristickou rovnici

$$\alpha^2 + (2\mathrm{i}\omega \sin\varphi)\, \alpha + \omega^2 \;=\; 0 \;.$$

Jejím řešením najdeme pro $\omega \ll \omega_0$

$$\alpha_{1,2} \;=\; -\mathrm{i}\omega \sin\varphi \pm \sqrt{-\frac{\omega^2 \sin^2\varphi}{4} - \omega_0^2} \;\approx\; -\mathrm{i}\omega \sin\varphi \pm \mathrm{i}\omega_0 \;.$$

Výsledné řešení je tedy

$$\xi \;=\; \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\omega \sin\varphi)t} \left(C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\right) . \tag{2.168}$$

To je však řešení pro pohyb lineárního harmonického oscilátoru násobeného komplexní jednotkou

$$\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\omega \sin\varphi)\; t} \;.$$

Násobení komplexní jednotkou znamená otáčení o úhel $-(\omega \sin\varphi)t$, opačným směrem než rotuje Země. Na severním pólu se tedy Foucaultovo kyvadlo stočí za hodinu o 15^0, na zeměpisné šířce Prahy o 11^0 5'. [28]

[27] Jev byl znám již Galileiho žáku Vivianimu v 17.stol. J. Foucault předvedl své kyvadlo r. 1851 v pařížském Pantheonu; kyvadlo mělo hmotnost 30 kg, délku závěsu 67 m a dobu kyvu 8 s. Dnes jsou podobná kyvadla instalována v řadě světových muzeí a vhodných budov. Foucaultova kyvadla v podobě fyzických kyvadel v Cardanově závěsu lze použít i k přesným měřením.

[28] Samozřejmě jednodušší vysvětlení Foucaultova kyvadla bez zavedení Coriolisovy síly spočívá v tom, že kyvadlo zachovává rovinu kyvu a Země se pod ním otáčí. To ovšem vyžaduje, abychom se orientovali v inerciální vztažné soustavě podle hvězd, což málokdo v denním praktickém životě umí.

obr. 2.44 obr. 2.45

Příklady

2.1 Určete zrychlení těles a sílu napětí vláken v soustavách na obr. 2.44 a 2.45. Hmotnosti kladek a vláken považujte za nulové, tření vláken o kladky zanedbejte.

$$[a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \ , \quad F_n = 2\mu g \ , \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}]$$

$$[a = \frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2} g \ , \quad F_n = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g]$$

2.2 Určete zrychlení těles a sílu napětí vláken v soustavách na obr. 2.46 a 2.47. Tření těles o podložky zanedbejte.

$$[a = \frac{mg}{m+M} \ , \quad F_n = \frac{mMg}{m+M}]$$

$$[a = \frac{m - M\sin\alpha}{m+M} g \ , \quad F_n = \frac{mM(1+\sin\alpha)}{m+M} g]$$

2.3 Těleso o hmotnosti m pohybující se přímočaře rychlostí v_0 má být zabrzděno konstantní silou velikosti F na dráze s. Určete tuto sílu.

$$[f = \frac{mv_0^2}{2s}]$$

2.4 Po nakloněné rovině s úhlem sklonu α se smýká těleso a pohybuje se přitom konstantní rychlostí. Určete koeficient smykového tření.

obr. 2.46 obr. 2.47

[$f = \text{tg}\ \alpha$]

2.5 Raketa o hmotnosti 20 t dosáhne výšky 5 km za 10 s. Jaký je výkon jejích motorů?

[98 MW]

2.6 Těleso o hmotnosti 50 g pohybující se rychlostí 20 m.s^{-1} narazilo na pevnou stěnu pod úhlem 60^0 (obr. 2.48). Jakou průměrnou silu působilo na stěnu , šlo-li o pružný ráz a trval-li náraz 0,1 s?

[10 N]

2.7 Střela hmotnosti $m = 20$ g narazí rychlostí 600 m.s^{-1} na stěnu tloušťky $d = 12$ cm a vyletí z ní rychlostí 50 m.s^{-1}. Jaká průměrná síla působila na střelu uvnitř stěny?

[2,98 kN]

2.8 Jakou práci je třeba vykonat, aby vlak o hmotnosti 300 t zvětšil svou rychlost z 36 km.h^{-1} na 54 km.h^{-1}?

[18,7 MJ]

2.9 Určete nejmenší koeficient smykového tření mezi koly automobilu a asfaltem, aby vůz mohl projet zatáčku poloměru $r = 200$ m rychlostí $v = 100$ km.h^{-1}.

[$f = 0,39$]

2.10 Sedadlo kolotoče na závěsu délky l se otáčí kolem svislé osy úhlovou rychlostí ω (obr. 2.49). Určete úhel α, který svírá závěs s osou.

obr. 2.48

obr. 2.49

obr. 2.50

obr. 2.51

$[a = \arccos \frac{g}{l\omega^2}]$

2.11 Kuličku o hmotnosti $m = 100$ g zavěšenou na niti délky $l = 30$ cm roztočíme ve svislé rovině dvěma způsoby: 1. s konstantní obvodovou rychlostí 210 cm.s^{-1}, 2. tak, že jí udělíme v nejvyšším bodě trajektorie tečnou rychlost 210 cm.s^{-1}. Jakou silou bude tažena nit v nejnižším a nejvyšším bodě trajektorie v obou případech?

[1. 2,45 N, 0,49 N; 2. 6,38 N, 0,49 N]

2.12 Odstředivka má tvar koule o poloměru R a otáčí se kolem svislé osy konstantní úhlovou rychlostí ω (obr. 2.50). Určete výšku h do které vystoupí malá kulička hmotnosti m, vložíme-li ji do odstředivky. Jakou silou bude tlačit na stěnu odstředivky? Jak se změní situace v případě odstředivky kuželového tvaru?

$[h = R - \frac{g}{\omega^2}\ , \quad F = mR\omega^2\ , \qquad h = \text{konst}\frac{g}{\omega^2}]$

2.13 Z nejvyššího místa dokonale hladké koule poloměru R pustíme volně hmotný bod hmotnosti m a necháme jej klouzat po povrchu koule působením tíhové síly (obr. 2.51). V jaké výšce měřené od vrcholu koule opustí bod kouli a po jaké křivce se bude dále pohybovat?

$[h = \frac{R}{3}$, po parabole]

2.14 Hmotný bod se pohybuje po hladké dráze, která leží ve svislé rovině a přechází v kruhovou smyčku o poloměru R (obr. 2.52). Z jaké výšky h musíme spustit hmotný bod s nulovou počáteční rychlostí, aby se v nejvyšším bodě smyčky neodtrhl? Jakou rychlost v_0 mu musíme udělit ve výšce h_0?

$[h \geq \frac{5}{2}R\ , \quad v_0 \geq \sqrt{5gR - 2gh_0}]$

2.15 Z horního konce svislého průměru kružnice vycházejí žlábky ve směru tětiv. Do žlábků současně vložíme a necháme bez tření sklouznout kuličky (obr. 2.53). Za jakou dobu dosáhnou kuličky obvodu kružnice?

$[\sqrt{\frac{4R}{g}}]$

2.16 Těleso klouže bez tření po svislé dráze nakreslené na obrázku 2.54. Vlnovka je tvořena oblouky kružnice poloměru r. Rychlost tělesa v bodě A je rovna nule. Jaká omezení musí platit pro h a α, aby se těleso dostalo z bodu A do bodu C ?

$[\cos\alpha \geq 2/3\ , \quad h \geq 2r/3]$

2.17 Na hmotný bod m působil impuls síly $\vec{I}$, který vyvolal změnu rychlosti z $\vec{v}_1$ na $\vec{v}_2$. Dokažte, že změna kinetické energie je rovna $\frac{1}{2}\vec{I}\cdot(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$.

obr. 2.52

obr. 2.53

obr. 2.54

2.18 Částice opisuje v silovém poli elipsu $x = a\cos\omega t$, $y = b\sin\omega t$. Určete práci, kterou vykoná silové pole působící na tuto částici za dobu od $t = 0$ do t, konkretně pak do $t = \pi/4\omega$, $t = \pi/2\omega$, $t = \pi/\omega$.

$$[A = \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2\sin\omega t + b^2\cos\omega t - b^2)\ , \quad A = \tfrac{1}{4}m\omega^2(a^2 - b^2)\ , \quad A = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\ , \quad 0]$$

2.19 Určete potenciální energii částice, na kterou působí síla ve směru x nebo r o složce a) $F_x = -mg =$ konst , b) $F_x = -kx$, c) $F_x = -kx^2$, d) $F_x = -kx^3$, e) $F_r = -\frac{\alpha}{r^2}$, f) $F_r = -\frac{\alpha}{r^3}$ (s přesností na integrační konstantu).

$$[mgx\ , \quad \tfrac{1}{2}kx^2\ , \quad \tfrac{1}{3}kx^3\ , \quad \tfrac{1}{4}kx^4\ , \quad -\tfrac{\alpha}{r}\ , \quad -\tfrac{\alpha}{2r^2}]$$

2.20 Vypočítejte, jakou práci vykoná síla $\vec{F} = [2y^2,\ 4x^2,\ -6(x^2 + y^2)]$ (koeficenty v odpovídajících jednotkách SI) při přemístění částice hmotnosti $m = 0,2$ kg z bodu (0,-1,0) do bodu (0,1,0) po různých drahách: a) podél osy y, b) po třech úsecích podél osy x do bodu (1,-1,0), podél osy y do bodu (1,1,0) a podél osy x. Je toto silové pole konzervativní?

[0 J , 8 J, není]

2.21 Síla závislá na čase: Částice hmotnosti $m = 2$ kg se může pohybovat bez tření podél osy x. V čase $t = 0$ byla v klidu v bodě $x = 0$. Po dobu 6 sekund na ni pak působila síla $F_x = 2 + 6t$ (koeficienty v odpovídajících jednotkách SI). Určete zrychlení, rychlost, dráhu částice a výkon síly v okamžiku $t = 6$ s.

[19 m.s^{-2} , 60 m.s^{-1} , 126 m , 2 280 W]

2.22 Síla závislá na poloze: Částice hmotnosti $m = 2,4$ kg se může pohybovat bez tření podél osy x. V bodě $x = 0$ byla v klidu. Působením síly $F_x = 2 + 6x$ (koeficienty v odpovídajících jednotkách SI) byla uvedena do pohybu. Určete zrychlení a rychlost částice a výkon síly v bodě $x = 6$ m.

[$15,8$ m.s^{-2} , 10 m.s^{-1} , 380 W]

2.23 Síla závislá na rychlosti: Částice hmotnosti $m = 3$ kg se může pohybovat podél osy x. V čase $t = 0$ na ni začala působit síla $F_x = 2 - 6v_x$ (koeficienty v odpovídajících jednotkách SI). Určete (i graficky) závislost rychlosti a dráhy částice na čase. Na jaké hodnotě se rychlost částice ustálí?

$$[v_x = \tfrac{1}{3}(1 - \mathrm{e}^{-2t})\ , \quad x = \tfrac{1}{3}\left(t - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)\ , \quad \tfrac{1}{3}\ \mathrm{m.s^{-1}}]$$

2.24 Lano délky l_0 leží nataženo na hladké desce stolu. V okamžiku $t = 0$ visí úsek lana délky l přes okraj desky a rychlost lana je nulová. V tomto okamžiku začne lano s desky sklouzávat. Určete jak poroste jeho rychlost s časem a jak se bude měnit poloha konce lana. Můžete řešit i obecnější úlohu a vzít v úvahu tření lana o desku stolu.

$$[v = l\sqrt{\tfrac{g}{l_0}}\sinh\sqrt{\tfrac{g}{l_0}}t\ , \qquad x = l\left(\cosh\sqrt{\tfrac{g}{l_0}}t - 1\right)]$$

obr. 2.55

obr. 2.56

2.25 Těleso hmotnosti m je připevněno na pružině a otáčí se ve vodorovné rovině konstantní úhlovou rychlostí ω kolem svislé osy, která prochází koncem pružiny. Nezatížená pružina má délku l_0, pružinová konstanta je k. Určete poloměr l kružnice, po které se těleso pohybuje.

[$l = \frac{kl_0}{k-m\omega^2}$]

2.26 Hustoměr v podobě válcové trubky průměru d o hmotnosti m plave v kapalině hustoty ρ. Dáme mu malý vertikální impuls a rozkmitáme ho tak. Určete periodu kmitů hustoměru (obr. 2.55).

[$T = 4\sqrt{\frac{\pi m}{d^2 \rho g}}$]

2.27 Tlumený harmonický kmit má frekvenci 50 Hz a dekrement útlumu $2,3$ s^{-1}. Jak se změní jeho frekvence, vymizí-li tlumení?

[50,0013 Hz]

2.28 Těleso hmotnosti 200 g koná vynucené harmonické kmity. Amplituda vynucující síly je 2 N, doba vlastních kmitů tělesa je 0,785 s a koeficient útlumu 4 s^{-1}. Určete rezonanční frekvenci a amplitudu kmitů při rezonanci.

[0,9 Hz, 0,18 m]

2.29 Pro malé kmity matematického kyvadla, které v okamžiku $t = 0$ vychýlíme o úhel φ_0 a pustíme, určete úhlovou rychlost, úhlové zrychlení, tečné zrychlení a normálové zrychlení.

$[\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\varphi_0 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t \ , \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t \ , \quad a_t = -g\varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t \ , \quad a_n = -g\varphi_0^2 \sin^2\sqrt{\frac{g}{l}}t]$

2.30 Houpačka hmotnosti m na závěsu délky l byla vychýlena o úhel φ_0 a puštěna (obr. 2.56). Určete maximální namáhání závěsu a rychlost houpačky v dolní poloze.

$[(3 - 2\cos\varphi_0)mg \ , \quad \sqrt{2gl(1-\cos\varphi_0)}]$

2.31 Určete délku sekundového kyvadla na severním pólu, na rovníku a na zeměpisné šířce Prahy (kde je tíhové zrychlení $g = 9,81077$ m.s^{-2}).

[0,9962 m, 0,9909 m, 0,9940 m]

2.32 Předpokládejme, že vaše hmotnost je 100 kg. O kolik budete těžší, když si lehnete? O kolik budete lehčí, když spadnete do škarpy?

[+30 mg, -15 mg]

2.33 Najděte takovou vzdálenost h, aby ve výšce h nad zemí a v hloubce h pod zemí byla gravitační síla stejná.

$[h = 0 \ , \quad h = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R_Z = 0,618\ R_Z,$ poměr zlatého řezu]

2.34 Mějme gravitující těleso v podobě protáhlé homogenní tyče hmotnosti M a délky l ležící v ose x. Ve vzdálenosti x_0 od středu tyče leží na ose x částice hmotnosti m. Určete gravitační sílu, která na částici působí.

$[F_x = -\frac{\kappa m M}{x_0^2 - \frac{l^2}{4}}]$

2.35 Mějme gravitující těleso v podobě homogenní kružnice hmotnosti M a poloměru r a určete gravitační zrychlení na ose kružnice ve vzdálenosti h od roviny kružnice. V jaké vzdálenosti bude toto zrychlení maximální?

$[a_g = \frac{\kappa M h}{(r^2+h^2)^{3/2}} \ , \quad h_{max} = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}]$

2.36 Určete gravitační zrychlení ve výšce $h = 20$ km nad zemským povrchem.

$[9,75$ m.s$^{-2}]$

2.37 Jak velkou rychlost je třeba udělit nějakému tělesu ve výšce $h = 500$ km nad zemským povrchem, aby se pohybovalo jako umělá družice Země po kruhové trajektorii?

$[7,62.10^3$ m.s$^{-1}]$

2.38 Určete gravitační zrychlení na povrchu Slunce a Měsíce. Kolikrát jsme lehčí na Měsíci? Poloměr Slunce je $R_S = 6,96.10^8$ m, Měsíce $R_M = 1,74.10^6$ m.

[274 m.s^{-2} , 1,62 m.s^{-2} , 6×]

2.39 Na desce konající harmonický pohyb $x = A\sin\omega t$ ve vodorovném směru spočívá závaží hmotnosti m. Koeficient smykového tření je $f = 0,5$, $\omega = 10$ s^{-1}. Při jaké amplitudě A začne závaží po desce klouzat?

[$A \geq \frac{fg}{\omega^2} = 5$ cm]

2.40 V železničním voze pohybujícím se se zrychlením 0,3 m.s^{-2} nahoru po svahu se sklonem 10^0 visí na šňůře závaží. Určete úhel, který svírá šňůra se svislým směrem.

[$1^0\ 40'$]

2.41 Jaké je zrychlení výtahu, kývá-li v něm matematické kyvadlo délky 1 m s dobou kmitu a) $T = 2,3$ s, b) $T = 1,8$ s, c) krouží volně kolem závěsu, d) $T = 4,2$ s s rovnovážnou polohou kolmo nad bodem závěsu?

[2,3 m.s^{-2} dolů; 2,4 m.s^{-2} nahoru; g dolů; 12 m.s^{-2} dolů]

2.42 Ve výtahu jsou pružinové váhy, na kterých visí těleso hmotnosti 1 kg. Jakou sílu budou ukazovat váhy v těchto případech: a) výtah stoupá se zrychlením 4,9 m.s^{-2} mířícím dolů (zastavuje se), b) výtah klesá se zrychlením 4,9 m.s^{-2} mířícím vzhůru (zastavuje se), c) výtah klesá se zrychlením 1 m.s^{-2} mířícím dolů (rozjíždí se), d) výtah stoupá se zrychlením 1 m.s^{-2} mířícím vzhůru (rozjíždí se)?

[5 N, 15 N, 9 N, 11 N]

2.43 Porovnejte velikost Coriolisovy síly a tíhy tělesa, které se v zeměpisné šířce $\varphi = 50^0$ pohybuje rychlostí $v = 100$ km.h^{-1} po poledníku.

[$F_C/mg = 2v\omega\sin\varphi/g = 3,2.10^{-4}$]

2.44 Oč se změní tíhové zrychlení tělesa, které se pohybuje po rovníku rychlostí 1 km.s^{-1} působením Coriolisovy síly?

[o 0,15 m.s^{-2}]

2.45 Jak se odchýlí těleso od paty kolmice při volném pádu z Eiffelovy věže působením Coriolisovy síly?

[o 3 cm na východ]

2.46 V 17. století provedl francouzský matematik a fyzik M. Mersenne pokus s vertikálním výstřelem z děla, aby zjistil, kam náboj vzhledem k rotaci Země dopadne. Byl-li pokus prováděn na 48^0 severní šířky a počáteční rychlost střely byla 300 m.s^{-1}, kde mohl očekávat místo dopadu?

[18 m západně od místa výstřelu)

æ