Předmluva

Předkládaná skripta jsou určena studentům prvního ročníku Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze jako pomůcka při studiu základního kursu fyziky v prvním semestru. Mohou ovšem sloužit i dalším zájemcům a studentům vyšších ročníků k vyhledání potřebné informace.

Mechanika je základem a vstupní branou do fyziky. Proto je skriptům předeslán krátký úvod seznamující s postavením fyziky jako vědy v systému lidského poznání, s charakterem práce a způsobem myšlení fyziků a také s hlavními etapami vývoje fyziky. Studenti se zde poprvé seznamují s vysokoškolským způsobem studia fyziky, který se liší od středoškolského matematickou náročností, vyžaduje osvojit si schopnost řešit fyzikální úlohy a experimentální návyky ve fyzikální laboratoři.

Matematický aparát fyziky je založen na diferenciálním a integrálním počtu. Ke studiu mechaniky je třeba se seznámit s derivováním a integrováním funkcí, a to i funkcí více proměnných a výpočtem některých integrálů, včetně integrálů křivkových, plošných a objemových. Často je třeba přitom používat i jiné souřadnice než kartézské - polární, cylindrickéh, sférické. Rovnice popisující pohyb částic jsou obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu a proto je třeba se naučit řešit alespoň nejjednodušší typy takových rovnic. Mechanika v základním kursu fyziky je pojímána jako vektorová (Newtonova), na rozdíl od mechaniky v pojetí teoretické fyziky, která je založena na variačních principech a skalárních funkcích. Student se tedy musí seznámit s vektorovou algebrou a analýzou a také se základními vlastnostmi některých tenzorů. Částice se v mechanice často pohybují po trajektoriích, které jsou kuželosečkami, rotující pružné těleso kulového tvaru získává tvar elipsoidu, rotující vazká kapalina v nádobě vytváří povrch ve tvaru rotačního paraboloidu, vlastnosti symetrických tenzorů se dají názorně geometricky vyjádřit pomocí elipsoidů a hyperboloidů. Je tedy třeba znát i rovnice a geometrické vlastnosti kuželoseček a kvadrik, i některých jiných geometrických křivek a ploch, jimž někdy není v matematice věnována dostatečná pozornost.

Protože výuka matematiky se za fyzikou zpravidla opožďuje a také fundovaný matematický výklad se liší od způsobu, jakým jsou matematické poznatky ve fyzice aplikovány, je do skript zařazena kapitola Matematický aparát, kde jsou potřebné matematické poznatku stručně shrnuty. Neznamená to samozřejmě, že by je student musel hned na počátku zvládnout, spíše se k nim bude vracet při řešení konkretních fyzikálních úloh.

Látka z mechaniky je rozčleněna do pěti kapitol a postupně je probírána mechanika částice (hmotného bodu), soustavy hmotných bodů, tuhého tělesa a kontinua (pružných těles, kapalin a plynů). Pohyb částic, jejich soustav a tuhého tělesa je popsán obyčejnými diferenciálními rovnicemi (jsou to soustavy s konečným počtem stupňů volnosti), pohyb kontinua, spojitého prostředí o nekonečně velkém počtu stupňů volnosti, parciálními diferenciálními rovnicemi. Výklad je vždy veden tak, aby byl co nejstručnější a nejsouvislejší a jednotlivé konkretní fyzikální problémy a úlohy jsou pak řešeny na konci příslušného odstavce. Na konci každé kapitoly jsou uvedeny příklady k samostatnému řešení. Velká část jich byla převzata ze sbirky autorů Dibelka, Havránková, Legová: Sbírka příkladů z fyziky I (Mechaniky), na fakultě používané. Na závěr skript jsou pak uvedeny otázky, které mohou sloužit k opakování a zkoušení látky.

K řešení mnoha zajímavých fyzikálních úloh stačí znalosti fyziky z gymnázia. Takové úlohy s podrobným řešením byly shromážděny ve skriptech autorů Havránkové, Janouta a Štolla Úvod do fyziky v řešených příkladech (ČVUT 1995) v nichž lze nalézt i 68 úloh z mechaniky. Většina z nich byla zadávána na jaderné a fyzikálně inženýrské fakultě ČVUT u přijímacích zkoušek. Některé z těchto úloh jsou uváděny i v těchto skriptech jako příklady k řešení. S mnoha zajímavými fyzikálními problémy, jejich historickými souvislostmi a podstatou fyzikálního myšlení je možno se seznámit také v knížce I. Štolla Svět očima fyziky, Prometheus Praha l995.

Vysokoškolské studium se nemůže omezovat jen na látku uvedenou ve skriptech. Studenti musí záhy začít tvůrčím způsobem pracovat, zapojovat se do odborné a výzkumné práce. Musí proto používat i další odbornou literaturu, ať už učebnice a monografie nebo články v odborných časopisech. Důkladné vysokoškolské učebnice mechaniky českých autorů jsou dnes již klasické knihy V. Trkala (Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa , NČSAV Praha l956) a M. Brdičky (Mechanika kontinua, NČSAV Praha l959). Nejnovější učebnice mechaniky základního kursu fyziky je kniha J. Kvasnica a kol. Mechanika, Academia, Praha l988, kterou je proto možno doporučit k paralelnímu studiu. Existuje velké množství cizojazyčných kursů vysokoškolské mechaniky. Zajímavý pokus o nové pojetí výuky představoval kdysi tzv. Berkeleyský kurs a jeho první díl Ch. Kittel Mechanics, Mc Graw-Hill Book Co. l965 je k dispozici i v ruském a slovenském překladu. Mnoho inspirace ovšem přinášejí i známé Feynmanovy přednášky o fyzice, dostupné v angličtině a ruštině.

Autor děkuje všem, kdo v průběhu mnoha let přispívali ke zdokonalování výuky tohoto předmětu na fakultě a z jejichž zkušeností čerpal, spolupracovníkům na katedře fyziky, studentům a zejména recenzentovi.

Praha, červen 1995

I. Štoll

Obsah

Úvod do fyziky

Matematický aparát

1. Kinematika částice

2. Dynamika částice

3. Mechanika soustavy částic

4. Mechanika tuhého tělesa

5. Mechanika kontinua

ÚVOD DO FYZIKY

1. Postavení fyziky a její členění

Název fyzika pochází z řeckého slova fysis, příroda. Původně tedy fyzika znamenala vědu o přírodě vůbec, v protikladu k umělému světu vytvořenému člověkem, technice (řec. techné). V antice byla fyzika vlastně součástí filozofie a téměř každý z antických filozofů zanechal nějaký spis o přírodě. Toto chápání fyziky jako filozofie přírody přetrvává v určitém smyslu dodnes; v angličtině, ale i v jiných jazycích spojení "přírodní filosofie", "Natural Philosophy" znamená fyziku.

Postupem času se vědy o přírodě diferencovaly. Filosofie se stala samostatnou vědou o lidském myšlení a světě vůbec. Matematika, kterou dnes nepovažujeme za přírodní vědu, se rozvinula do abstraktních výšin jako věda o kvantitativních a prostorových vztazích věcí a algoritmech a má blízko k logice. S rozvojem počítačové techniky nabyla matematika nových dimenzí a možností. Fyzika se tak stala vědou o základních, nejobecnějších zákonitostech přírody. Speciálními zákonitostmi na vyšších úrovních organizace hmoty se zabývají další přírodní i společenské vědy - chemie, biologie, psychologie, sociologie. Všechny tyto vědy musí ovšem fyzikální zákonitosti respektovat a také hojně využívají fyzikálních metod a přístrojů. Například biologické zákonitosti se týkají jen živé hmoty, která je ve vesmíru vzácným jevem. Fyzikálnímu zákonu všeobecné gravitace se však musí podřizovat všechny přírodní objekty.

Fyzika má zvláštní, úzké sepětí s matematikou - využívá jejích metod a také obohacuje matematiku novými myšlenkami a pojmy. Není náhodou, že jeden z objevitelů diferenciálního a integrálního počtu byl právě Newton, tedy fyzik. Jako věda o nejobecnějších zákonitostech přírody je fyzika v úzkém vztahu i k filozofii, a také mnoho fyziků filozofuje. Mezi fyzikou a filozofií je ovšem zásadní rozdíl. Fyzika se vždy musí opírat o experimentální data a zabývá se jen problémy, které může dříve či později experimentálně ověřit. K fyzikálním poznatkům tedy nedocházíme pouhým myšlením, spekulací, ale konfrontací s výsledky měření a pozorování.

V posledních desetiletích se fyzika stala základem pro nesmírně rychlý rozvoj moderní techniky, která stále více ovlivňuje náš život. Technika přináší společnosti nejen dobrodiní, ale také potenciální hrozby a je těžko předvídat, jak se lidstvo s těmito problémy vypořádá. Někdy je fyzika činěna zodpovědnou i za tyto hrozivé jevy naší civilizace a jindy zas je na ní požadováno, aby dala návod, jak všechny tyto problémy vyřešit. Fyzikové se samozřejmě nezříkají své společenské zodpovědnosti, ale na druhé straně nejsou to oni, kdo o konečném využití či zneužití fyzikálních objevů rozhodují.

Fyzikální výzkum má dnes i výrazné ekonomické aspekty. Je nákladný, a zejména experimentální zařízení, která počítáme k tzv. "velké vědě", obří urychlovače, zařízení pro výzkum termojaderné energie, pro kosmický výzkum apod. si mohou dovolit jen ekonomicky silné státy. Většinou jsou tato zařízení využívána v mezinárodní spolupráci, jako například v evropském středisku pro jaderný výzkum CERN v Ženevě, jehož členem je také naše republika. Některé zvláště nákladné projekty, jako například amerického superobřího urychlovače SSC, byly z finančních důvodů zrušeny. Tato velká experimentální zařízení slouží samozřejmě k ukojení zvědavosti fyziků a hlubšímu poznání přírody. Na druhé straně z takového poznání, jak ukazuje historie, může lidstvu kynout nečekaný užitek. Vysílání umělých družic Země se zpočátku také jevilo jako nákladná prestižní záležitost a dnes si těžko představíme světovou ekonomiku a spoje bez využití blízkého kosmu. Kdo dnes může říci, jaký užitek přinese lidstvu cesta na Mars nebo objev nové elementární částice!

Z toho, co bylo řečeno, je zřejmé, že fyzika má v systému lidského poznání a jeho využívání do značné míry klíčovou úlohu. Anekdotickým způsobem to bylo vyjádřeno takto: *Každý odborník se domnívá, že jeho věda je ta nejdůležitější. Fyzik se však liší od všech ostatních odborníků tím, že jeho věda skutečně nejdůležitější je.* V následujícím schematu je znázorněn vztah a vzájemné propojení jednotlivých vědních oblastí, a postavení fyziky mezi nimi.

		SOCIOLOGIE		F
		$\Uparrow$		I
		PSYCHOLOGIE		L
		$\Uparrow$		O
		BIOLOGIE		S
		$\Uparrow$		O
		CHEMIE		F
		$\Uparrow$		I
				E
MATEMATIKA	$\Leftrightarrow$	FYZIKA	$\Leftrightarrow$	TECHNIKA

Fyzika je dnes velmi rozsáhlá vědní disciplina a žádný fyzik ji nemůže ovládat v celé šíři. Můžeme ji dělit podle různých hledisek. Tak zpravidla rozlišujeme podle metody výzkumu a zaměření
a) fyziku teoretickou
b) fyziku experimentální
c) fyziku aplikovanou .
Každá z nich má opět své dílčí oblasti. Převládá-li důraz na matematickou metodu, mluvíme o fyzice matematické, využíváme-li počítače k simulování fyzikálních procesů, o fyzice počítačové.

Podle druhu jevů, jimiž se fyzika zabývá můžeme rozlišovat
a) mechaniku (a gravitační pole)
b) elektřinu a magnetismus (a elektromagnetické pole)
c) termiku
d) optiku

Podle fyzikálních soustav, které fyzika zkoumá
a) fyziku molekulovou, atomovou, jadernou a částicovou
b) fyziku pevných látek
c) fyziku tekutin (kapalin a plynů)
d) fyziku plazmatu.

Další důležité dělení je na fyziku *klasickou* a *kvantovou.* Klasická fyzika se zabývá zákonitostmi makrosvěta, tedy světa našich rozměrů a smyslové zkušenosti. Kvantová fyzika je fyzikou mikrosvěta, kde platí jiné fyzikální zákonitosti. Charakteristickým parametrem v mikrosvětě je Planckova konstanta $h = 6,626.10^{-34}$ J.s. U jevů a pohybů u nichž můžeme Planckovu konstantu považovat za zanedbatelně malou, odpovídají (korespondují) zákonitosti kvantové fyziky zákonitostem fyziky klasické. Říkáme tomu *princip korespondence.* Kvantová fyzika je tedy obecnější, ale u makroskopických pohybů můžeme kvantové jevy zanedbat (i když ne vždy). V těchto skriptech se budeme zabývat mechanikou klasickou, s kvantovou mechanikou se seznámíte později.

Podobně můžeme rozlišit fyziku *nerelativistickou* a *relativistickou.* Jevy, které popisuje speciální teorie relativity, se projevují, pohybují-li se částice nebo tělesa rychlostmi blízkými rychlosti světla ve vakuu $c = 2,997\ 924\ 58$ m.s^{-1}. Mechanika, kterou se budeme zabývat, je mechanika nerelativistická. Opět zde platí princip korespondence - při rychlostech podstatně menších než je rychlost světla ve vakuu, tedy můžeme-li považovat tuto rychlost za nekonečně velkou, přecházejí zákony relativistické mechaniky v zákony mechaniky nerelativistické. Budeme-li se však zabývat vlastnostmi elektromagnetického pole, musíme používat zákony speciální teorie relativity. Podobně ve velmi silných gravitačních polích, která se vyskytují v okolí velkých hmotných těles ve vesmíru, se uplatní zákony obecné teorie relativity.

Zvláštní částí fyziky je *je termodynamika*, která zkoumá stavy fyzikálních soustav z hlediska jejich pravděpodobnosti a má úzký vztah k teorii informace. Některé termodynamické zákony (například druhá věta termodynamická) mají pravděpodobnostní charakter - netvrdí zda nějaký jev nastane či ne, nýbrž pouze zda nastane s větší či menší pravděpodobností. Termodynamikou tedy vstoupila do fyziky náhoda, ne vždy je možno výsledek nějakého jevu předpovědět jednoznačně. Také termodynamické zákonitosti lze vysvětlit z mikroskopického hlediska statistickými metodami. Těmi se zabývá důležitá část fyziky, *fyzika statistická.*

2. Fyzikální principy

Několik slov o metodách práce a způsobu myšlení fyziků. Fyzika jako věda o přírodě vychází z pozorování a experimentů, zobecňuje zjištěná fakta a formuluje obecné *fyzikální zákony.* Těmto fyzikálním zákonům dává matematickou formu. Takový poznávací proces zobecňování jednotlivých fakt se nazývá metoda *vědecké indukce.* Na základě znalosti obecných fyzikálních zákonů může pak fyzika usuzovat, jaký bude výsledek konkretního experimentu v daném zvláštním případě. Řešením rovnic vyjadřujících fyzikální zákony předvídá tyto výsledky a znovu je ověřuje. To je proces *vědecké dedukce.* Tak fyzika teoreticky zdůvodnila, že při výbuchu jaderné bomby dojde k uvolnění obrovského množství energie a experiment v Alamogordo v Novém Mexiku v roce 1945 tuto fyzikální předpověď plně potvrdil.

Na rozdíl od matematiky musí fyzika stále konfrontovat svá tvrzení s experimentální skutečností; fyzikální objevy nelze dělat pouhými spekulacemi, jak se občas leckdo pokouší. Rozdíl mezi přístupem matematiky a fyziky lze názorně ukázat na příkladu velkého německého přírodovědce minulého století Gausse, který byl jak matematikem, tak fyzikem. Jako matematik dospěl k objevu neeuklidovské geometrie a zjistil, že je možno logicky konstruovat prostory, v nichž neplatí věta o tom, že součet úhlů v trojúhelníku je roven 2π. Matematik by se s tím spokojil a věnoval by se dále logickému rozvíjení takové myšlenkové konstrukce. Fyzika však zkoumá náš reálný svět a geometrie tohoto světa je vlastně součástí fyziky. Jako fyzik si proto Gauss položil otázku, zda uvedená věta v reálném světě skutečně platí a začal proměřovat velké trojúhelníky, jejichž vrcholy tvořily vrcholy Harckého pohoří. Později se skutečně ukázalo, že díky gravitaci je náš prostor zakřiven a tato geometrická poučka v trojúhelnících velkých rozměrů neplatí.

Jedním z ústředních principů, jímž se fyzika řídí, je *princip symetrie* (někdy též mluvíme o principu dostatečného důvodu). Na počátku vždy analyzujeme symetrii úlohy a tato analýza ukáže cestu k dalšímu řešení. Z důvodu symetrie musí gravitační pole kulové hmoty působit v radiálním směru, síla musí směřovat do středu koule, podobně pole nekonečného válce bude působit kolmo k ose válce. Z mnoha různých možností volí příroda vždy takovou, která se něčím odlišuje od ostatních, má nějakou význačnou vlastnost. Síla by mohla například působit pod obecným úhlem k ose válce, ale vzhledem k symetrii není k tomu "dostatečný důvod", nelze preferovat jeden obecný směr před jiným. Kdyby síla působila rovnoběžně s osou válce, nebylo by opět možno rozhodnout, kterým ze dvou možných směrů, neboť osa válce není orientována.

Princip symetrie se projevuje v invarianci, neměnnosti pohybu fyzikální soustavy vzhledem k některým transformacím prostoru a času. K takovým transformacím patří translace (posunutí soustavy souřadnic ve směru některé z os), rotace (pootočení soustavy souřadnic), časová translace, inverze (zrcadlové zobrazení). Bylo dokázáno, že takové transformace odpovídající příslušným symetriím vedou k *zákonům zachování* různých fyzikálních veličin. V mechanice se seznámíme se zákony zachování hybnosti, momentu hybnosti, energie, rychlosti těžiště izolované soustavy. Ve fyzice existuje celá řada dalších zákonů zachování, například zákon zachování elektrického náboje aj. Zákon zachování energie, který má ve fyzice klíčový význam, byl objeven až ve čtyřicátých letech minulého století. Pro mechanickou energii byl však užíván již mnohem dříve, a sice v podobě tvrzení, že nemůže existovat perpetuum mobile, zařízení, které by konalo mechanickou práci bez dodávání vnější energie.

Zákony zachování mají velký praktický význam při řešení konkretních fyzikálních pohybů. Udávají totiž, že některá fyzikální veličina se za pohybu nemění, je invariantem, nebo jak říkáme integrálem pohybu. Při integrování pohybových rovnic musíme totiž určit hodnoty integračních konstant z daných počátečních podmínek. Znalost zákonů zachování nám to usnadňuje a někdy nás zbavuje nutnosti řešit pohybovou rovnici vůbec.

K dalším fyzikálním principům patří *principy variační*. Podle nich z možných variant stavů nebo pohybů se bude realizovat takový, který odpovídá extrému (maximu nebo minimu) nějaké fyzikální veličiny. Je známo, že rovnováha nějaké fyzikální soustavy se ustaví vždy tak, aby potenciální energie nabývala minimální nebo maximální hodnoty. V prvním případě jde o rovnováhu stabilní, ve druhém je to rovnováha labilní. Podobně například světelný paprsek volí vždy takovou dráhu, aby čas potřebný k proběhnutí mezi počátečním a koncovým bodem byl minimální. Tato podivuhodná "úspornost" přírody je opět důsledkem obecného principu dostatečného důvodu - právě extrémní hodnota je význačná, odlišuje se od ostatních možností. Teoretická fyzika je budována právě na variačních principech, z nichž plynou pohybové rovnice obecnější a elegantnější než jsou rovnice
Newtonovy. S teoretickou (analytickou) mechanikou se seznámíte později v kursu teoretické fyziky.

Vedle těchto principů se fyzikové řídí i dalšími hledisky, z nichž některé jsou intuitivní, heuristické, ale často umožňují "uhádnout" správné řešení. To se pak samozřejmě musí matematicky a experimentálně ověřit. Konec konců tak postupoval i Archimedes, když objevil svůj zákon v lázni a s výkřikem Heuréka! (Našel jsem!) jej spěchal oznámit ostatním. Známa je i legenda o Newtonovi, který prý objevil gravitační zákon při pozorování pádu jablka. Problém je ovšem v tom, že mnoho jiných lidí také pozorovalo pád jablka, ale gravitační zákon neobjevili. Intuice fyziků jde tak daleko, že předpokládají, že matematická rovnice vyjadřující nějaký nový fyzikální zákon musí být vnitřně krásná a přitom dostatečně šílená. Ale to už se dostáváme do oblasti čistě subjektivní.

3. Fyzikální veličiny a jednotky, rozměrová analýza

Aby fyzika mohla být exaktní vědou, musí pracovat s přesně definovanými pojmy. Přírodní objekty, jako je například elektron, atom nebo elektromagnetické pole nelze vyčerpat slovní definicí, protože fyzika objevuje stále nové a nové vlastnosti těchto objektů. Základní pojmy jako je hmotnost, délka, čas, síla, elektrický náboj apod. není ovšem možno definovat pomocí pojmů ještě jednodušších. Proto je však důležité jednoznačně udat, jakým způsobem lze tyto pojmy experimentálně zkoumat, měřit jejich vlastnosti.

Vlastnosti, které mají jak kvalitativní tak kvantitativní stránku, tj. dají se porovnávat s obdobnými vlastnostmi jiných objektů a měřit po zavedení příslušné fyzikální jednotky, se nazývají *fyzikální veličiny.* Fyzikální veličiny nejsou mezi sebou nezávislé, platí mezi nimi obecné vztahy, které mohou mít povahu fyzikálních zákonů.

To také umožňuje vytvořit *soustavy fyzikálních jednotek.* Některé veličiny zvolíme za základní a ostatní veličiny jsou pak od nich odvozeny pomocí příslušných matematických vztahů vyjadřujících fyzikální zákony. I když se ve fyzice stále používají různé soustavy jednotek, normativně byla zavedena Mezinárodní soustava SI, které se také budeme přidržovat. Základní mechanické veličiny jsou v ní délka, hmotnost a čas a z nich jsou všechny ostatní veličiny odvozeny. Základní veličiny budeme označovat velkými písmeny: délku L, hmotnost M a čas T a odvozené veličiny budou pak charakterizovány svým *fyzikálním rozměrem*, tj. vztahem k základním veličinám. Tak rychlost bude mít rozměr $[v] = \mathrm{LT}^{-1}$, síla $[F] = \mathrm{LMT}^{-2}$ apod.

V soustavě SI jsou základními jednotkami, jimiž se měří základní mechanické veličiny metr (m), kilogram (kg) a sekunda (s). Rovinný úhel se měří v radiánech (rad), prostorový ve steradiánech (sr); tyto jednotky byly dříve řazeny do zvláštní skupiny vedlejších jednotek, dnes jsou považovány za bezrozměrné odvozené jednotky.

Metr je podle posledního rozhodnutí Mezinárodní konference pro míry a váhy z r. 1983 definován jako "délka rovnající se vzdálenosti, kterou uběhne světlo ve vakuu za 1/299 792 458 s". Za jeden *kilogram* je vzata hmotnost prototypu, válečku z platiny a iridia, který je od r. 1889 uložen v Sèvres u Paříže. *Sekunda* je definována od r. 1967 jako "doba trvání 9 192 631 770 period záření, které přísluší přechodu mezi dvěma velmi jemnými hladinami základního stavu atomu cesia 133".

S dalšími základními a odvozenými veličinami a jednotkami soustavy SI se postupně seznámíme při studiu elektřiny a magnetismu, termiky, optiky, atomové a jaderné fyziky. Uveďme ještě, že vedle základních a od nich odvozených jednotek v rámci soustavy SI je normami trvale povoleno užívání i některých jednotek vedlejších. Jsou to minuta, hodina, den, úhlový stupeň, úhlová minuta a úhlová vteřina, hektar, litr, tuna, Celsiův stupeň, elektronvolt, atomová hmotnostní jednotka, astronomická jednotka a parsek.

Fyzikální rozměr není jen formálním vyjádřením vztahu fyzikálních veličin k veličinám základním, ale má i velký význam ověřovací a heuristický. Chceme-li zkontrolovat, zda nějaká rovnice vyjadřující vztah mezi fyzikálními veličinami je správná, jako první krok vždy zjistíme, zda fyzikální rozměr veličin na levé straně rovnice souhlasí s rozměrem veličin na pravé straně. Jindy můžeme prostou úvahou na základě fyzikálního rozměru uhádnout fyzikální závislost nebo zákonitost. Taková systematická úvaha na základě fyzikálního rozměru je předmětem *rozměrové analýzy.* Její použití budeme ilustrovat na příkladu matematického kyvadla.

Matematické kyvadlo představuje idealizovaný model tvořený hmotným bodem zavěšeným na nehmotném vlákně v tíhovém poli. Jedinými charakteristikami kyvadla jsou hmotnost bodu m a délka vlákna l, jedinou charakteristikou pole jeho intenzita (tíhové zrychlení) velikosti g mířící svisle k zemi. Pohyb kyvadla bude záležet též na počátečních podmínkách. Pokud kyvadlo vychýlíme z dolní stabilní polohy do určité výše h a volně pustíme, začne vykonávat kyvy ve svislé rovině dané směrem počáteční výchylký a směrem svislým. Protože na něj nepůsobí žádná další síla, která by ho z této roviny vychylovala, není důvodu, proč by tuto rovinu opouštělo. Jeho pohyb tedy bude rovinný (plyne to i ze zákona zachování momentu hybnosti). Zanedbáme-li odpor vzduchu a případně tření v místě upevnění závěsu, bude podle zákona zachování energie při pohybu kyvadla směrem dolů klesat jeho potenciální energie a poroste energie kinetická. Po průchodu dolní polohou začne kyvadlo opět stoupat a to do původní výše. Bude tedy vykonávat periodický pohyb a nás bude zajímat perioda tohoto pohybu.

Tato perioda může záviset pouze na výše uvedených veličinách $m, \quad l, \quad g$ a mohla by též záviset na počáteční výchylce. To je složitější otázka, kterou může rozřešit buď experiment nebo podrobnější matematický výpočet. Mladý Galileo Galilei při pozorování kyvů lucerny zavěšené na dlouhém závěsu na stropě pisánského kostela dospěl k závěru, že pohyb kyvadla je izochronní, tj. že jeho perioda nezávisí na výchylce. Přijměme tedy hypotézu, která se nabízí z pozorování, že alespoň při malých výchylkách je perioda pohybu kyvadla konstantní a pokusme se jí určit z rozměrové analýzy.

Předpokládejme, že perioda bude záviset na parametrech soustavy jako mocninná funkce vztahem

$$T \;=\; C\, l^{\alpha}\, m^{\beta}\, g^{\gamma} \;\;,$$

kde C je bezrozměrná konstanta. Protože fyzikální rozměr na levé a pravé straně rovnice musí být týž, dostaneme podmínku

$$[T] \;=\; \mathrm{L}^{\alpha}\, \mathrm{M}^{\beta}\, (\mathrm{LT}^{-2})^{\gamma} \;=\; \mathrm{L}^{\alpha+\gamma}\, \mathrm{M}^{\beta}\, \mathrm{T}^{-2\gamma} \;=\; \mathrm{T}\,.$$

Odtud dostáváme soustavu rovnic $\alpha + \gamma = 0, \quad \beta = 0, \quad -2\gamma = 1$, z níž plyne $\alpha = 1/2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -1/2$. Z rozměrové analýzy dostáváme výraz pro periodu kyvadla jako

$$T \;=\; C\,\sqrt{\frac{l}{g}}\;.$$

Tímto způsobem nemůžeme ovšem určit bezrozměrnou konstantu C. Protože však bod na konci závěsu kyvadla koná pohyb po oblouku kružnice, je logické očekávat, že tato konstanta bude obsahovat číslo π. Dále fyzik intuitivně předpokládá, že konstanta bude obsahovat malá celá čísla, například 2, 3, 1/2 apod. a nikoli například 896/2379. Tímto způsobem můžeme "uhádnout" správný výsledek

$$T \;=\; 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\;.$$

Uvedený postup není samozřejmě odvozením a správnost výsledku by se musela teprve přesným výpočtem dokázat a experimentálně potvrdit. Je však ilustrací heuristického postupu jímž se fyzikové dobírají předběžných výsledků - pomocí obecných fyzikálních principů, rozměrové analýzy a intuice.

4. Hlavní etapy vývoje fyziky

Fyzika prošla dlouhým historickým vývojem a znalost tohoto vývoje pomáhá lépe pochopit logiku soustavy fyzikálních poznatků a dokonce docházet k poznatkům novým. Historie fyziky je ovšem samostatným vědním oborem, který zde nemůžeme probírat. Zmíníme se proto pouze o hlavních etapách tohoto vývoje a později při probírání mechaniky upozorníme stručně na některé důležité historické okolnosti.

Dějiny fyziky můžeme rozdělit na tři hlavní etapy:
a) *Stará fyzika* - od starověku do počátku 17. století (orientačně do roku 1600).
b) *Klasická fyzika* - 1600 - 1900
c) *Moderní fyzika* - 1900 - dosud

Starou fyziku nemůžeme považovat za vědu ve vlastním smyslu, i když se dobrala celé řady významných vědeckých poznatků. První z nich znali již staří Sumerové, Babyloňané, Egypťané a Číňané. Šlo zejména o poznatky astronomické a geometrické (Pythagorova věta) a také o metody měření některých fyzikálních veličin (délka, hmotnost, čas). Fyzika ve starém Řecku byla jako součást filosofie převážně spekulativní a tento charakter si pod vlivem aristotelismu udržela až do počátku novověku. Skutečný fyzikální výzkum prováděli až helenističtí Řekové, kdy se centrem vědy a kultury antického světa stala Alexandrie. V Alexandrii studoval největší fyzik starověku Archimedes, který dospěl k důležitým poznatkům o statické rovnováze těles a plování těles a v matematice se těsně přiblížil objevu diferenciálního a integrálního počtu. Alexandrijští Řekové znali také zákon odrazu světla (nikoli lomu) a prováděli první měření teploty. Poznatky antiky byly středověké Evropě zprostředkovány Araby, kteří se též intenzivně zabývali optikou (Alhazen) a určováním měrné hmotnosti látek. Zatímco ve středověky byly hlavní přírodovědné poznatky čerpány z Euklidových "Základů" (geometrie), "Almagestu" Klaudia Ptolemaia (geocentrický výklad astronomie sluneční soustavy) a spisů Aristotelových (mj. "Fysika"), vešly práce Archimedovy v Evropě ve známost až teprve začátkem novověku. Ve starověku a středověku však fyzika neprováděla systematické experimenty, nevyužívala matematický aparát k popisu přírodních jevů a neměla ani přesně definovány základní pojmy (rychlost, zrychlení, síla apod.)

Zrod fyziky jako vědy se datuje začátkem 17. století. Na základě astronomických výzkumů Keplerových (1571-1630) a pozemských mechanických experimentů Galileiových (1564-1642) mohl Isaac Newton (1643-1727) vytvořit první fyzikální teorii, klasickou mechaniku, využívající matematický aparát diferenciálního a integrálního počtu. Newton přišel s koncepcí všeobecné gravitace a ukázal, že není přehrady mezi nebeskou a pozemskou fyzikou, že síla, která udržuje planety na jejich drahách kolem Slunce je táž jako síla, která nutí jablko padat k zemi. Základní Newtonovo dílo z r. l687 nese název "Matematické základy přírodní filosofie" ("Philosophiae naturalis principia mathematica") a představuje pravděpodobně nejvýznamnější vědeckou knihu, která byla kdy napsána. Newton se zabýval též optikou a rozpracoval teorii rozkladu bílého světla do spektra. V té době byl již zásluhou Snellovou a Descartovou znám i zákon lomu světla.

Z roku 1600 pochází první vědecký spis o elektřině a magnetismu od anglického lékaře a fyzika Gilberta. Výzkumem těchto jevů se v následujících stoletích zabývala celá řada fyziků (Coulomb, Volta, Oersted, Ampère a další). Tento výzkum pak završil Faraday (1791-1867) svým objevem zákona elektromagnetické indukce a svou koncepcí siločar elektromagnetického pole. Úlohu Newtona elektromagnetismu pak sehrál James Clerk Maxwell (1831-1879), který ve svém "Traktátě o elektřině a magnetismu" z r. 1873 sestavil slavné Maxwellovy rovnice popisující vlastnosti elektromagnetického pole. Maxwell zároveň teoreticky zdůvodnil elektromagnetickou povahu světla a ukázal, že jevy spojené s vlastnostmi elektrického náboje ("elektřina"), elektrického proudu ("galvanismus"), magnetického pole a světla (optika), jsou jedné a téže elektromagnetické povahy.

V devatenáctém století byl tak dovršen výzkum mechanických jevů a elektromagnetismu a klasická fyzika tím uzavřena. V přírodě tedy existovaly pouze dvě síly, dva způsoby vzájemné interakce mezi částicemi: *gravitační* a *elektromagnetická*. Mezi nimi se však projevoval určitý rozpor. Jak Newtonovy tak Maxwellovy rovnice platí v libovolné inerciální vztažné soustavě. Při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé se však Newtonovy rovnice transformují pomocí tzv. Galileiho transformací a Maxwellovy rovnice pomocí Lorentzových transformací. Fyzika se tak rozdvojila, mechanické a elektromagnetické děje se zdály být neslučitelné. Kromě toho existovaly některé experimenty, jejichž výsledek nedokázala klasická fyzika vysvětlit: průběh spektra rovnovážného elektromagnetického záření (tzv. záření absolutně černého tělesa) a pokus Michelsonův, který svědčil o neexistenci světelného éteru.

Tyto zdánlivě nepodstatné rozpory vyústily ve 20. století ve vznik moderní fyziky, tj. fyziky kvantové a relativistické. Právě koncem roku 1900 vyslovil Planck tzv. kvantovou hypotézu, jíž vysvětlil záření absolutně černého tělesa, a v r. 1905 publikoval Einstein (1879, rok Maxwellovy smrti - 1955) práci o speciální teorii relativity. V ní překlenul rozpor mezi Newtonovou a Maxwellovou fyzikou a fyziku opět sjednotil. Předpoklad o existenci světelného éteru se teorií relativity stal zbytečným. V roce 1916 vytvořil Einstein i obecnou teorii relativity jako moderní teorii gravitace. Gravitační síly podle této teorie souvisejí se zakřivením prostoročasu. Jak speciální, tak obecná teorie relativity přecházejí při rychlostech objektů podstatně menších než je rychlost světla ve vakuu a při slabých gravitačních polích v teorii Newtonovu.

Přelom 19. a 20. století je též poznamenán objevem radioaktivity a vznikem jaderné fyziky, která tak významným způsobem zasáhla do života celého lidstva. V jaderné fyzice se uplatní další dvě přírodní síly - tzv. silná, která udržuje nukleony v atomových jádrech a slabá, která se projevuje při radioaktivní přeměně beta za vzniku neutrin. Moderní fyzika odhalila v kosmickém záření a pomocí urychlovačů obrovské množství částic, jejichž vlastnosti studuje a snaží se je utřídit a vysvětlit. Mezi všemi těmito částicemi působí čtyři základní síly přírody: gravitační, elektromagnetická, silná a slabá.

V nedávné době se podařilo prokázat, že i elektromagnetická a slabá interakce jsou téže podstaty a tvoří jedinou sílu elektroslabou. V průběhu historie fyziky od Newtona a Maxwella k dnešku tak probíhá úsilí o *sjednocování interakcí*, které pokračuje i dnes. Fyzika se pokouší prokázat, že i silná a elektroslabá interakce jsou téže povahy, a že k nim konečně přistupuje i síla gravitační. Tím by vznikla idea jediné přírodní síly sjednocující všechny přírodní jevy a děje. Fyzika ovšem nemůže k takovému závěru dojít pouhým uvažováním, musí matematicky vypracovat a zdůvodnit příslušnou teorii a její závěry experimentálně ověřit. To vede ke snaze budovat stále větší a větší urychlovače a také k intenzivnímu výzkumu jevů v kosmu. Sjednocování interakcí má totiž těsnou návaznost na vývoj vesmíru podle hypotézy o tzv. "velkém třesku". Právě v počátcích vývoje vesmíru by se měly všechny čtyři (resp. tři) interakce uplatňovat rovnocenným způsobem a teprve v průběhu dalšího vývoje a rozpínání vesmíru se postupně oddělovat. Tak jako počátky vzniku vědecké fyziky v 17. století jsou spjaty s astronomickými pozorováními sluneční soustavy, je i dnes fyzika stále více propojena s astrofyzikou. Vesmír zůstává největší fyzikální laboratoří.

M A T E M A T I C K Ý   A P A R Á T

1. Diferenciální a integrální počet

Derivace funkce jedné reálné proměnné $f(x)$ v bodě x_0 je definována jako

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 \,+\, \Delta x) \,-\, f(x_0)}{\Delta x} \,. \qquad \text{(M.1)}$$

Z obr. M 1 je vidět, že tato derivace vyjadřuje směrnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 rovnou tg α. Derivace funkce je tedy sama opět funkcí a lze ji zapisovat ve tvaru

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \,, \qquad \text{(M.2)}$$

kde dx nazýváme *diferenciálem nezávisle proměnné* a df *diferenciálem funkce*. Zatímco pod diferenciálem nezávisle proměnné dx můžeme rozumět prostě libovolnou nekonečně malou změnu proměnné x, diferenciál funkce df již podstatně závisí na vlastnostech této funkce. Vlastnostmi funkcí, podmínkami existence a vlastnostmi jejich derivací a diferenciálů se zabývá matematická analýza a nebudeme je zde rozebírat. Důležité je si však uvědomit, že nekonečně malé veličiny dx, df nejsou nulové, a proto je možno jimi násobit i dělit.

obr. M 1

Při počítání s derivacemi platí pravidla pro derivaci lineární kombinace funkcí (C_1, $C_2, \ldots$ jsou konstanty), součinu a podílu funkcí a derivaci funkce složené:

$$\begin{array}{ll} f \;=\; C_1\, f_1 \,+\, C_2\, f_2 \,+\, \ldots \,, & f' \;=\; C_1\, f_1' \,+\, C_2\, f_2' \,+\, \ldots \\[2ex] f \;=\; f_1\, f_2 \,, & f' \;=\; f_1'\, f_2 \,+\, f_1\, f_2' \\[2ex] f \;=\; \frac{f_1}{f_2} \,, & f' \;=\; \frac{f_1'\; f_2 \,-\, f_1\; f_2'}{f_2^2} \\[2ex] f \;=\; [\; g(x)\;] \,, & \frac{df}{dx} \;=\; \frac{df}{dg}\,\frac{dg}{dx} = f'(g)\; g'(x). \end{array} \qquad \text{(M.3)}$$

Čárkou zde vždy označujeme derivaci funkce podle celého argumentu. Vidíme, že poslední vztah jsme vlastně dostali rozšířením výrazu pro derivaci $\frac{df}{dx}$ diferenciálem dg.

Ve fyzice se nejčastěji setkáváme s funkcemi více proměnných, závislých na prostorových souřadnicích a na čase. Potom zavádíme pojem *parciální (částečné) derivace* podle jedné z proměnných; ostatní proměnné přitom považujeme za konstanty. Jsou-li například x, y, z kartézské souřadnice a t čas, bude parciální derivace funkce $f(x, y, z)$ podle souřadnice x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x}. \tag{M.4}$$

Vidíme, že přírůstek dostává pouze proměnná x, ostatní proměnné se nemění. Se symboly ∂f, ∂x už nemůžeme zacházet jako se samostatnými veličinami a výraz $\frac{\partial f}{\partial x}$ nemůžeme chápat jako podíl dvou diferenciálů, ani ho označovat čárkou. Můžeme ovšem zavést diferenciály nezávisle proměnných dx, dy, dz, dt a sestavit takzvaný *totální (úplný) diferenciál* funkce (nověji úplnou diferenciální formu) ve tvaru

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt. \tag{M.5}$$

Ve fyzice bývají souřadnice x, y, z zpravidla funkcemi času $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$; funkce proměnných $f\ [x(t),\ y(t),\ z(t),\ t]$ je tedy vlastně složenou funkcí času. Závisí na čase jednak přímo (explicitně), jednak nepřímo (implicitně) prostřednictvím souřadnic x, y, z. Můžeme ji tedy derivovat podle času jako složenou funkci a dostaneme

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{M.6}$$

To je vlastně *úplná (totální) derivace* funkce f podle času a ve fyzice ji označujeme tečkou. Tečkou označujeme také derivace funkcí jedné proměnné závislé na čase:

$$\dot{f}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{M.7}$$

Odtud je též patrný rozdíl mezi časovými derivacemi $\frac{df}{dt}$ a $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Derivace funkcí jsou opět funkcemi a lze je dále derivovat. Tím dostáváme derivace vyšších řádů. U funkcí jedné proměnné je označujeme

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}\ ,\ f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3}, \tag{M.8}$$

atd.

Se symboly v čitateli a jmenovateli opět nemůžeme zacházet samostatně. U funkcí více proměnných pak dostáváme vyšší derivace buď podle jedné proměnné nebo derivace smíšené:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ ,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \tag{M.9}$$

apod.

Dalo by se očekávat, že derivování u smíšených derivací nebude záviset na pořadí proměnných. Není to sice samozřejmé, ale v matematické analýze se dokazuje, že pokud jsou příslušné derivace spojité, platí *Schwarzova věta* o smíšených derivacích

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\ , \dots \tag{M.10}$$

Tato věta je důležitou praktickou kontrolou toho zda nějaká lineární diferenciální forma je nebo není úplná. Máme-li například malou změnu funkce ve tvaru

$$\delta f \;=\; a\;(x,y,z)\;dx \;+\; b\;(x,y,z)\;dy \;+\; c\;(x,y,z)\;dz, \tag{M.11}$$

stačí prověřit, zda se funkce $a,\ b,\ c$ chovají jako parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}$,tj. zda pro ně platí vztahy (M.10). Potom můžeme formu δf označit jako totální diferenciál df.

Ve fyzice řešíme takzvané *pohybové rovnice*. Pro fyzikální soustavy, které mají konečný počet stupňů volnosti s (volný hmotný bod 3, soustava N volných hmotných bodů 3N, tuhé těleso 6) jsou to obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, resp. jejich soustavy. Mají nekonečně mnoho řešení závislých na $2s$ integračních konstantách jako parametrech. V daném konkretním případě jsou tyto konstanty určeny tzv. *počátečními podmínkami.* Pro daný okamžik (např. pro $t\;=\;0$) musíme přitom zadat souřadnice a složky rychlostí všech bodů tvořících soustavu, což dá právě $2s$ potřebných vztahů. Pro soustavy o nekonečném počtu stupňů volnosti, jako jsou pružná tělesa, tekutiny nebo pole, musíme řešit parciální diferenciální rovnice s tzv. *okrajovými (hraničními) podmínkami.*

Řešení diferenciálních rovnic je obecně složitá záležitost. Uvedeme si pouze dva jednoduché, často se vyskytující případy. Často je možno u diferenciální rovnice provést tzv. *separaci proměnných.* Mějme například rovnici

$$\frac{dx}{dt} \;=\; f(x)\;g(t)\;, \tag{M.12}$$

kde f , g jsou zadané funkce. Tuto rovnici můžeme uvést na tvar

$$\frac{dx}{f(x)} \;=\; g(t)\;dt, \tag{M.13}$$

kde se na levé straně rovnice vyskytují pouze funkce proměnné x a na pravé straně rovnice funkce proměnné t. Integrací obou stran rovnice můžeme dostat hledanou funkci $x(t)$; přitom nesmíme zapomenout přičíst integrační konstanty.

Jiným častým případem jsou *lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty.* Uvažme například neznámou funkci času $x(t)$, která má splňovat rovnici

$$a_2\ddot{x} \;+\; a_1\dot{x} \;+\; a_0 x \;=\; b(t). \tag{M.14}$$

Tato rovnice je *nehomogenní*, neboť na pravé straně vystupuje zadaná, známá funkce času $b(t)$. V teorii diferenciálních rovnic se dokazuje, že obecné řešení takové rovnice je součtem obecného řešení $x_o(t)$ příslušné *homogenní* rovnice (která vznikne položíme-li pravou stranu $b(t) = 0$) a partikulárního (zvláštního) řešení $x_p(t)$ původní *nehomogenní* rovnice. Pod obecným řešením rozumíme řešení závislé na (v daném případě dvou) integračních konstantách, které musíme nakonec určit z počátečních podmínek, partikulární řešení je libovolné konkretní řešení splňující původní nehomogenní rovnici. Toto řešení musíme prostě uhádnout; i na to ovšem existují ovšem metody. Někdy je to snadné; je-li například funkce $b(t)\;=\;b_0$ konstantní, bude hledané partikulární řešení zřejmě rovno $x_p(t)\;=\;b_0\;/\;a_0$, jak se lze přesvědčit dosazením. Výsledné obecné řešení nehomogenní rovnice bude tedy

$$x(t) \;=\; x_o(t) \;+\; x_p(t) \;=\; C_1\;x_{o1}(t) \;+C_2\;x_{o2}(t) \;+\; x_p(t). \tag{M.15}$$

Řešení homogenní rovnice x_{o1}, x_{o2} hledáme ve tvaru funkce $x(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$. Po dosazení do homogenní rovnice a zkrácení (vždy nenulovou) veličinou $\mathrm{e}^{\alpha t}$ dostaneme takzvanou charakteristickou algebraickou rovnici

$$a_2\,\alpha^2 + a_1\,\alpha + a_0 = 0, \tag{M.16}$$

kterou snadno vyřešíme. Má obecně dva kořeny α_1, α_2, jimž odpovídají dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice. Máme tedy

$$x_o(t) = C_1\,\mathrm{e}^{\alpha_1(t)} + C_2\,\mathrm{e}^{\alpha_2(t)}\,. \tag{M.17}$$

K tomuto řešení přičteme $x_p(t)$ a pak určíme integrační konstanty z počátečních podmínek.

Připomeneme nyní derivace a integrály nejčastěji používaných elementárních funkcí:

funkce	def. obor	derivace	funkce	def. obor	derivace
C	$(-\infty,\ \infty)$	0	x^n	$(-\infty,\ \infty)$	nx^{n-1}
a^x	$(-\infty\ \infty)$	$a^x \ln a\ (a > 0)$	e^x	$(-\infty,\ \infty)$	e^x
$\log_a x$	$(0, \infty)$	$\frac{1}{x}\ \log_a \mathrm{e}\ (a, x > 0)$	$\ln x$	$(0,\ \infty)$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$(-\infty,\ \infty)$	$\cos x$	$\cos x$	$(-\infty,\ \infty)$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}x$	$[x \neq (n + \frac{1}{2})\pi]$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{cotg}x$	$[x \neq n\pi]$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Při derivování funkce x^n předpokládáme pro $x > 0$ n reálné a pro $x < 0$ n celé. Připomeňme ještě přibližné hodnoty čísla $\mathrm{e} = 2,71828...$ a $\log_{10} \mathrm{e} = 0,43429...$.

Kromě těchto funkcí známých ze střední školy se často setkáváme s funkcemi inverzními k funkcím trigonometrickým; jsou to takzvané *funkce cyklometrické*: arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens. Protože goniometrické funkce jsou periodické, musíme se při definování funkcí k nim inverzních omezit na interval, kde je příslušná goniometrická funkce prostou. Hodnoty jednoznačně definovaných cyklometrických funkcí nazýváme hlavními hodnotami (viz obr. M 2).

Mezi trigonometrickými a exponenciálními funkcemi platí důležité vztahy

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}}{2}\,, \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}^x}}{2\,\mathrm{i}}\,. \tag{M.18}$$

Podobně lze definovat *funkce hyperbolické* vztahy

$$\mathrm{cosh}x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \quad \mathrm{sinh}x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \quad \mathrm{tgh}x = \frac{\mathrm{sinh}x}{\mathrm{cosh}x}\,, \quad \mathrm{cotgh}x = \frac{\mathrm{cosh}x}{\mathrm{sinh}x}\,, \tag{M.19}$$

obr. M 2

které nazýváme kosinus hyperbolický, sinus hyperbolický, tangens hyperbolický a kotangens hyperbolický. Platí pro ně vztah

$$\cosh^2 x \;-\; \sinh^2 x \;=\; 1 \qquad (\text{porovnejte s} \;\; \cos^2 x \;+\; \sin^2 x \;=\; 1)\;. \tag{M.20}$$

K hyperbolickým funkcím lze opět definovat funkce inverzní, které nazýváme *funkce hyperbolometrické* a nazýváme argument kosinu hyperbolického, atd. Tyto funkce mají těsné vztahy k funkci logaritmické:

$$\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{pro} \quad -\infty < x < +\infty \tag{M.21}$$

$$\operatorname{argcosh} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{pro} \quad 1 \leq x < \infty \tag{M.22}$$

$$\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} , \quad \text{pro} \quad -1 < x < 1 \tag{M.23}$$

$$\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1} , \quad \text{pro} \quad |x| > 1 . \tag{M.24}$$

Průběh funkcí hyperbolických a hyperbolometrických je znázorněn na obr. M 3 a M 4.

Uvedeme nyní tabulku derivací cyklometrických, hyperbolických a hyperbolometrických funkcí:

$y = \arcsin x$, $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ pro $|x| < 1$ $\quad$ $y = \arccos x$, $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ pro $|x| < 1$

$y = \operatorname{arctg} x$, $y' = \frac{1}{1 + x^2}$ $\quad$ $y = \operatorname{arccotg} x$, $y' = -\frac{1}{1 + x^2}$

$y = \sinh x$, $y' = \cosh x$ $\quad$ $y = \cosh x$, $y' = \sinh x$

$y = \operatorname{tgh} x$, $y' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ $\quad$ $y = \operatorname{cotgh} x$, $y' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$

$y = \operatorname{argsinh} x$, $y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ $\quad$ $y = \operatorname{argcosh} x$, $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ pro $x > 1$

$y = \operatorname{argtgh} x$, $y' = \frac{1}{1 - x^2}$ pro $|x| < 1$ $\quad$ $y = \operatorname{argcotgh} x$, $y' = \frac{1}{1 - x^2}$ pro $|x| > 1$

Všechny uvedené funkce, s nimiž jsme se zatím setkali, patří mezi tzv. funkce elementární. Jsou tabelovány, jejich grafy a vlastnosti jsou dobře známy. Při řešení některých fyzikálních úloh se mohou vyskytnout i další funkce, které mezi elementární nepatří; nazýváme je funkce speciální. Tak například při řešení některých pohybových diferenciálních rovnic můžeme dospět k integrálu, který nemůže být vyjádřen pomocí elementárních funkcí. Přesto však považujeme úlohu za vyřešenu a říkáme, že jsme nalezli její řešení "v kvadraturách". Je-li totiž řešení dovedeno do tvaru integrálu, můžeme tento integrál vždy vyjádřit buď v podobě některé speciální funkce, případně ho rozvinout do konvergující řady a omezit se podle požadované přesnosti na několik prvních členů anebo, jde-li o určitý integrál, spočítat jej numericky na počítači.

Neurčité integrály některých jednoduchých často se vyskytujících funkcí se nazývají "tabulkové". Patří k nim tyto integrály :

obr. M 3

obr. M 4

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$, při $x < 0$ přiroz. n) | $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ ($x \neq 0$)

$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0)$ | $\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ | $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}\ x + C$ $(x \neq n\pi)$ | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\ x + C$ $(x \neq \frac{1}{2}\pi + n\pi)$

$\int \mathrm{tg}\ x\,dx = -\ln|\cos x| + C$ | $\int \mathrm{cotg}\ x\,dx = \ln|\sin x| + C$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\ \mathrm{arccotg}\ \frac{x}{a} + K$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x+a}{x-a}| + C$ $(|x| \neq |a|)$ | $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$ $(|x| \neq |a|)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos x + K$ $(|x| < |a|)$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$ $(|x| > |a|)$

$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$ | $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$

$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\mathrm{cotgh}\ x + C$ $(x \neq 0)$ | $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \mathrm{tgh}\ x + C$

(C, K jsou libovolné konstanty).

Při integrování platí, že integrál součtu je součet integrálů a konstantní koeficient lze vytknout před integrál:

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\ , \qquad \int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx\ . \quad \text{(M.25)}$$

Při výpočtu integrálů složitějších funkcí se uplatní zejména metoda *substituce*, kdy přejdeme od proměnné x k nové proměnné t:

$$x = \varphi(t),\quad dx = \varphi'(t)\,dt,\quad \int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\ , \qquad \text{(M.26)}$$

a metoda *integrování per partes* (po částech) podle pravidla

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx\ . \qquad \text{(M.27)}$$

obr. M 5 obr. M 6 obr. M 7

2. Souřadnice ve fyzice

Fyzikální pohyb musí být popisován vzhledem k nějaké vztažné soustavě - třem prostorovým a jedné časové souřadnici. Uvažme napřed pohyb *v rovině.* V ní můžeme zvolit počátek O a dvě vzájemně kolmé osy *kartézských souřadnic* x, y (název podle francouzského matematika René Descarta, latinsky Cartesia). Na těchto osách pak vynášíme kladné, resp. záporné souřadnice bodů v rovině. Vzdálenost bodu A od počátku a vzdálenost bodů A, B jsou podle Pythagorovy věty rovny (obr. M 5)

$$r \;=\; OA \;=\; \sqrt{x^2+y^2}\;, \qquad AB \;=\; \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\;. \tag{M.28}$$

Často je výhodné používat místo kartézských souřadnic *polární souřadnice.* Jsou to vzdálenost bodu od počátku $r > 0$ a polární úhel $0 \le \varphi < 2\pi$, který odečítáme od dané poloosy vycházející z počátku, např. podél osy x, proti směru hodinových ručiček (obr. M 6).

Mezi polárními a kartézskými souřadnicemi platí jednoduché převodní vztahy

$$x \;=\; r\;\cos\varphi\;, \quad y \;=\; r\;\sin\varphi\;; \qquad r \;=\; \sqrt{x^2+y^2}\;, \quad \mathrm{tg}\;\varphi \;=\; \frac{y}{x}\;. \tag{M.29}$$

Při integrování v rovině potřebujeme znát diferenciální element plochy, tj. plošku, která vznikne, dostanou-li souřadnice malé, diferenciální přírůstky. V kartézských a polárních souřadnicích jsou zřejmě tyto elementy (obr. M 7)

$$dS \;=\; dx\;dy\;, \qquad dS \;=\; r\;dr\;d\varphi\;. \tag{M.30}$$

obr. M 8 obr. M 9

Přejdeme nyní do *prostoru.* Opět zde můžeme zavést *kartézské souřadnice* $x, \; y, \; z$ a určit vzdálenost dvou bodů jako

$$r \; = \; \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \; . \tag{M.31}$$

V trojrozměrném případě musíme dávat pozor na vzájemnou orientaci os v pořadí $x, \; y, \; z$. Máme-li pravotočivý šroub a budeme jím otáčet od kladného směru osy x nejkratší cestou ke kladnému směru osy y a bude-li se šroub přitom posunovat v kladném směru osy z, nazýváme takovou kartézskou soustavu *pravotočivou.* Změníme-li u pravotočivé kartézské soustavy smysl jedné nebo všech tří os, dostaneme soustavu *levotočivou.* Všechny prostorové kartézské soustavyu se tedy rozpadají na dvě velké skupiny, soustavy pravotočivé a levotočivé, které nelze navzájem převést pouhým posouváním a natáčením (obr. M 8). Abychom se vyhnuli možným problémům se znaménky různých fyzikálních veličin, budeme soustavně používat například pravotočivé kartézské soustavy.

V případech, kdy fyzikální soustava vykazuje válcovou symetrii, je vhodnější používat *válcové* neboli *cylindrické* souřadnice $R, \; \varphi, \; z$. Je to vlastně kombinace polárních souřadnic $R, \; \varphi$ v rovině kolmé k ose válce a kartézské souřadnice z ve směru osy. Konečně v případě kulové symetrie jsou vhodné *kulové* neboli *sférické* souřadnice $r, \; \varphi, \; \theta$ (obr. M 9). Souřadnice $r \geq 0$ představuje vzdálenost bodu od počátku, $0 \leq \varphi < 2\pi$ je polární úhel v rovině $x, \; y$ odečítaný od osy x a $0 \leq \theta \leq \pi$ úhel odečítaný od směru osy z. Úhel φ je tedy vlastně zeměpisná délka odečítaná od nulového poledníku východním směrem do 360^0 a θ zeměpisná šířka odečítaná nikoli od rovníku ale od severního pólu. Označíme dále vzdálenost projekce bodu do roviny $x, \; y$ od počátku jako $R = r \; \sin\theta$. Pak dostáváme vztahy

$$x \; = \; R \; \cos\varphi \; = \; r \; \sin\theta \cos\varphi \; , \qquad y \; = \; R \; \sin\varphi \; = \; r \; \sin\theta \sin\varphi \; , \qquad z \; = \; r \; \cos\theta \tag{M.32}$$

$$r \; = \; \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \; , \qquad \mathrm{tg}\, \varphi \; = \; \frac{y}{x} \; , \qquad \cos\theta \; = \; \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \; . \tag{M.33}$$

obr. M 10 obr. M 11

Uvedeme ještě diferenciální element na válcové ploše v cylindrických souřadnicích a na kulové ploše ve sférických souřadnicích:

$$dS = R\, d\varphi\, dz\ , \qquad dS = r^2\, \sin\theta\, d\varphi d\theta \tag{M.34}$$

a diferenciální element objemu v kartézských, cylindrických a sférických souřadnicích:

$$dV = dx\, dy\, dz\ , \quad dV = R\, dR\, d\varphi\, dz\ , \quad dV = r\, d\theta\, R\, d\varphi\, dr = r^2\, \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta\ . \tag{M.35}$$

Ve fyzice je důležité zkoumat, jak se mění matematické vyjádření jednotlivých fyzikálních veličin při *transformacích souřadnic.* Uvažme nyní kartézské souřadnice v prostoru a provádějme jejich transformace. Budeme přitom uvažovat jen tzv. euklidovské transformace, při nichž zůstávají zachovány vzdálenosti mezi dvěma body a úhly mezi dvěma směry. Jednou z možných takových transformací je *translace*, rovnoběžné posunutí všech tří os do nového počátku (obr. M 10). Je-li $\vec{o}$ vektor spojující původní počátek O a nový počátek O', dostáváme mezi původními souřadnicemi $x,\ y,\ z$ a novými souřadnicemi $x',\ y',\ z'$ transformační vztahy

$$x' = x - o_x\ , \quad y' = y - o_y\ , \quad z' = z - o_z\ . \tag{M.36}$$

Dalším důležitým případem transformace souřadnic je *rotace*, pootočení jedné kartézské soustavě vůči druhé, přičemž obě mají týž počátek $O \equiv O'$. Všimneme si napřed pootočení čárkované soustavy vůči nečárkované kolem osy z o úhel φ. Z obr. M 11 snadno odvodíme transformační vztahy

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi & x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\
y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi & y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi . \\
z' &= z & z &= z'
\end{aligned}
\tag{M.37}
$$

Je-li kartézská soustava pravotočivá (levotočivá), bude i soustava vzniklá pootočením rovněž pravotočivá (levotočivá). Přechod od pravotočivé k levotočivé soustavě můžeme dosáhnout další transformací, kterou nazýváme *inverze*. Při ní se změní znaménka všech tří souřadnic:

$$x' = -x\,, \quad y' = -y\,, \quad z' = -z\,. \tag{M.38}$$

Ve fyzice místo označení souřadnic $x,\ y,\ z$ často používáme zápisu $x_i,\ i = 1,2,3$, kde $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$. Současně pro zjednodušení zápisu používáme tzv. *Einsteinovo sumační pravidlo*, podle kterého výraz, v němž se objevuje nějaký index dvakrát, je třeba považovat za sumu a sčítat podle tohoto indexu od 1 do 3. Tak například $x_i x_i = x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ se rovná čtverci vzdálenosti daného bodu od počátku.

Rotace v prostoru (kolem libovolné osy procházející počátkem) a inverze tvoří třídu *obecných ortogonálních transformací*, které zachovávají vzdálenosti a kolmost (ortogonalitu). Tyto transformace můžeme zapsat pomocí transformační matice α_{ik} (je to vlastně čtvercová tabulka devíti čísel udaných indexy $i,\ k$):

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}\, x_k = \alpha_{ik}\, x_k\,. \tag{M.39}$$

Pro výše uvedený případ rotace soustavy kolem osy z je transformační matice rovna

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{M.40}$$

Aby trasformace zachovávala vzdálenosti, musí platit pro transformační matici podmínka ortogonality. Přirovnáme-li čtverec vzdálenosti bodu od počátku v čárkované a nečárkované soustavě, dostaneme podmínku

$$r'^2 = x'_i x'_i = \alpha_{ij} x_j \alpha_{ik} x_k = \alpha_{ij}\alpha_{ik} x_j x_k = x_j x_j = r^2\,. \tag{M.41}$$

(uvědomme si, že sčítací index, který se objevuje dvakrát, můžeme označit libovolným písmenem a máme-li součin dvou různých sum, musíme volit pro každou z nich jiné označení sčítacího indexu).

Aby podmínka ortogonality M.41 byla splněna, musí pro matice α_{ik} platit

$$\alpha_{ij}\, \alpha_{ik} = \delta_{jk}\,. \tag{M.42}$$

Tzv. *Kroneckerův symbol* δ_{ij} je definován jako rovný jedné, jsou-li oba jeho indexy stejné $i = j$, a nule, jsou li různé $i \neq j$. Představuje tedy diagonální matici

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{M.43}$$

Můžeme ještě zapsat obecné vyjádření pro zpětnou transformaci, od čárkovaných souřadnic k nečárkovaným. Vynásobíme-li transformační vztah M.39 maticí α_{ij}, dostaneme

$$\alpha_{ij}\, x'_i \;=\; \alpha_{ij}\, \alpha_{ik}\, x_k \;=\; \delta_{jk}\, x_k \;=\; x_j \;. \tag{M.44}$$

Pozměníme-li označení indexů (místo j napíšeme i a místo i k), dostaneme

$$x_i \;=\; \alpha_{ki}\, x'_k \;. \tag{M.45}$$

Srovnáme-li tento transformační vztah s přímou transformací M.39, vidíme, že matice zpětné transformace je vůči matici přímé transformace transponovaná (má zaměněno pořadí indexů, tj. řádky za sloupce a naopak).

3. Skaláry, vektory a tenzory

Z matematického hlediska mají fyzikální veličiny charakter skalárů, vektorů a tenzorů druhého případně vyšších řádů. Vektor můžeme přitom považovat za tenzor prvního řádu, skalár za tenzor nultého řádu. *Skaláry* (od latinského scala, škála) jsou dány číslem, většinou reálným, a jeho hodnota závisí pouze na zvolené jednotce. *Vektory* v třírozměrném eukleidovském prostoru představují uspořádané trojice čísel, které můžeme zapisovat pomocí jediného indexu jako $a_i,\ i = 1, 2, 3.$[1]. *Tenzory* druhého řádu zapisujeme pomocí dvou indexů a_{ik} (představují tedy čtvercovou matici), tenzory vyšších řádů mají pak tři a více indexů. Skalárem je třeba hmotnost nebo elektrický náboj, vektorem rychlost, zrychlení, síla apod., charakter tenzoru má např. moment setrvačnosti, mechanické napětí, elektromagnetické či gravitační pole aj.

Ve skutečnosti nejde pouze o to, kolika indexy je ta která veličina popsána, kolik má prvků (souřadnic). Důležité je jakým způsobem se tyto souřadnice transformují při ortogonálních transformacích soustavy souřadnic. Skaláry, které nazýváme též invarianty, se při transformacích souřadnic nemění: $a' = a$. Vedle pravých skalárů existují také *pseudoskaláry*, které při inverzi mění znaménko.

Pravé neboli polární vektory mají souřadnice, které se transformují stejně jako souřadnice bodů, tj. podle M.39:

$$a'_i \;=\; \alpha_{ik}\, a_k \;. \tag{M.46}$$

Při inverzi tedy souřadnice vektorů mění znaménko, směr vektoru se ovšem nemění. Existují též vektory nepravé neboli axiální (pseudovektory), které při inverzi znaménko nemění. Patří k nim například moment hybnosti, moment síly apod. Právě při počítání s pseudovektory musíme dbát, abychom používali důsledně pravotočivou soustavu souřadnic. [2]

[1] V teorii relativity přistupuje čtvrtá souřadnice a indexy vektorů v takovém čtyřrozměrném prostoru označujeme řeckými písmeny, např. a^μ nebo $a_\mu,\ \mu = 0, 1, 2, 3$

[2] Snadno se přesvědčíme, že skalární součin dvou polárních vektorů i dvou axiálních vektorů je skalár, skalární součin polárního a axiálního vektoru je pseudoskalár, vektorový součin dvou polárních vektorů je axiální vektor (pseudovektor).

Tenzory druhého řádu se transformují jako součiny souřadnic vektorů. Jednou z možností, jak získat tenzor je totiž vytvořit součin souřadnic dvou vektorů: $a_{ik} = b_i c_k$. Takový tenzor se pak bude transformovat podle pravidla

$$a'_{ik} \;=\; b'_i \; c'_k \;=\; \alpha_{ij} b_j \; \alpha_{kl} c_l \;=\; \alpha_{ij} \alpha_{kl} \; a_{jl} \; . \tag{M.47}$$

Všimneme si nyní blíže vlastností vektorů. V matematice je vektor (označíme ho $\vec{a}$) zcela obecně definován jako prvek množiny (vektorového prostoru), v níž je zavedena operace sčítání vektorů (součet dvou vektorů je opět prvkem této množiny) a násobení vektoru číslem (výsledný vektor je opět prvkem množiny). Pro tyto operace pak musí platit komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}, \quad \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a},$$

$$(\alpha + \beta)\ \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}, \quad \alpha\ (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b},$$

musí být definován nulový vektor $\vec{0}$ takový, že

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \quad 0\vec{a} = \vec{0}, \quad \alpha\vec{0} = \vec{0}$$

(rovnost $\alpha\vec{a} = \vec{0}$ nastane právě tehdy, když $\alpha = 0$ nebo $\vec{a} = \vec{0}$), dále ke každému vektoru opačný vektor $-\vec{a}$ tak, aby

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{b} - \vec{a} = \vec{x} \;\Rightarrow \vec{b} = \vec{a} + \vec{x}, \quad -(\alpha\vec{a}) = (-\alpha)\vec{a} = \alpha(-\vec{a})$$

(tím je vlastně definováno odečítání vektorů) a při násobení číslem 1 musí vektor zůstat beze změny: $1\vec{a} = \vec{a}$.

Takto definovaný vektorový prostor může být tvořen nejrůznějšími objekty - funkcemi, mnohočleny, uspořádanými n-ticemi čísel apod. Omezíme se na uspořádané trojice reálných čísel; tato čísla budeme nazývat kartézské souřadnice vektorů: $\vec{a} \equiv (a_1,\ a_2,\ a_3)$. Dva vektory budeme považovat za totožné, budou-li si jejich odpovídající kartézské souřadnice rovny. [3]

Součet dvou vektorů a součin vektoru a čísla zavedeme vztahy

$$\vec{a} \;+\; \vec{b} \;=\; (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)\ , \qquad \alpha\ \vec{a} \;=\; (\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \alpha a_3)\ , \tag{M.48}$$

nulový vektor jako $\vec{0} = (0,\ 0,\ 0)$ a vektor opačný k $\vec{a}$ jako $-\vec{a} = (-a_1,\ \ -a_2,\ \ -a_3)$. Snadno ověříme, že budou splněny výše uvedené požadavky na vektorový prostor.

Takto zavedený vektorový prostor má přímý vztah k bodům trojrozměrného eukleidovského prostoru a má názornou geometrickou interpretaci. Tyto vektory můžeme chápat jako uspořádané dvojice bodů ("šipky") $\vec{AB}$ a souřadnice vektoru jako rozdíly kartézských souřadnic těchto bodů. Vztahy mezi vektory pak můžeme vyjadřovat jak v souřadnicové podobě tak geometricky, při čemž geometrické vyjádření je obecnější, není závislé na druhu zvolených souřadnic. Tak sčítání dvou vektorů a násobení vektoru číslem můžeme názorně geometricky definovat pomocí pravidla rovnoběžníku a násobením úsečky (obr. M 12). Z

[3] Jde tedy o tzv. vektory volné, jejichž počáteční bod můžeme umístit v libovolném bodě. Vedle toho známe vektory vázané, které mají počáteční bod (působiště) vázáno na určitý bod a vektory klouzavé, které je možno libovolně přemisťovat podél jejich vektorové přímky.

obr. M 12

obr. M 13

asociativnosti sčítání vektorů též plyne, že při sčítání více vektorů můžeme postupně přikládat začátek dalšího vektoru ke konci předcházejícího a najít výsledný vektor spojením počátku prvního a konce posledního (obr. M 13a). Z pravidla o sčítání vektorů také snadno najdeme rozdíl vektorů (obr. M 13b).

Snadno se přesvědčíme, že délka úsečky reprezentující vektor, tj. podle Pythagorovy věty veličina

$$a \;=\; |\vec{a}| \;=\; \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \;=\; \sqrt{a_i a_i} \tag{M.49}$$

zůstává invariantní, neměnná při transformaci souřadnic vektoru M.46. Tak můžeme vektoru přiřadit invariant (skalár) M.49 nazývaný délka, velikost, absolutní hodnota, norma nebo modul vektoru. Vektor o délce rovné 1 nazveme jednotkový. Zavedeme-li ortonormální vektory kartézské báze (orty), tj. jednotkové vektory ve směru kartézských os souřadnic, označované $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$ nebo také $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, o souřadnicích $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$ můžeme každý vektor vyjádřit jako součet

$$\vec{a} \;=\; (a_1, a_2, a_3) \;=\; a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \;=\; \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \;, \tag{M.50}$$

tj. rozložit jej do složek $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ podél kartézských os. Takzvaný *polohový vektor* (nepěkně "rádiusvektor") daného bodu A spojuje počátek soustavy souřadnic s tímto bodem a má tedy souřadnice $\vec{r} = (x, y, z)$, kde $x,\ y,\ z$ jsou zároveň souřadnice bodu A.

obr. M 14

Eukleidovský trojrozměrný vektorový prostor je speciální typ vektorového prostoru, ve kterém můžeme kromě sčítání vektorů a násobení vektoru číslem zavést další vektorové operace, skalární a vektorové násobení vektorů (nikoli dělení).

Skalární součin dvou vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ je definován jako číslo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; a\; b\; \cos\gamma\;, \tag{M.51}$$

kde a, b jsou velikosti obou vektorů a γ úhel mezi nimi (obr. M 14a).

Odtud plyne, že je-li $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, musí být buď jeden z vektorů nulový nebo musí být oba vektory vzájemně kolmé. Pro vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ zřejmě platí $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$. Vyjádříme-li nyní vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve tvaru M.50 a skalárně vynásobíme, dostaneme pro skalární součin souřadnicové vyjádření

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \;=\; a_i b_i\;. \tag{M.52}$$

Je vidět, že absolutní velikost vektoru můžeme vyjádřit též jako $a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$. Snadno se přesvědčíme, že pro skalární součin platí komutativní a asociativní vztahy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; \vec{b} \cdot \vec{a}\;, \quad \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) \;=\; (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b}\;, \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \;=\; \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}\;, \tag{M.53}$$

ale obecně $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$!!.

Vektorový součin dvou vektorů je definován jako vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} \;=\; \vec{c}\,, \quad \text{kde} \qquad c \;=\; a\; b\; \sin\gamma \tag{M.54}$$

a jeho směr je kolmý k oběma vektorům $\vec{a}$, $\vec{b}$. Smysl vektorového součinu určíme tak, že se budeme pohybovat od vektoru $\vec{a}$ k vektoru $\vec{b}$ kratší cestou (tj. pro $0 \leq \gamma \leq \pi$) a vektor $\vec{c}$ pak bude mířit ve směru pohybu pravotočivého šroubu (používáme-li pravotočivou soustavu souřadnic!) (obr. M 14b) .V levotočivé soustavě bude mít směr opačný a vektorový součin dvou pravých vektorů je tedy pseudovektor. Velikost vektorového součinu je zřejmě rovna obsahu rovnoběžníku vytvořeného z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$. Je-li $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, musí být buď jeden z vektorů nulový nebo oba vektory rovnoběžné. Proto také $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Na rozdíl od skalárního součinu je vektorový součin *antikomutativní*:

$$\vec{d} \;=\; \vec{b} \times \vec{a} \;=\; b\; a\; \sin(2\pi - \gamma) \;=\; -\vec{a} \times \vec{b} \;=\; -\vec{c}\,. \tag{M.55}$$

Pro vektory $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ platí $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$, $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$. Vyjádříme- li vektory $\vec{a},\ \vec{b}$ ve složkách podle M.50 a vektorově vynásobíme, dostaneme

$$\vec{a}\times\vec{b} \;=\; (\ a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1\ )\ . \tag{M.56}$$

Vektorový součin M.56 můžeme také zapsat ve formě vektorového determinantu

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} . \tag{M.57}$$

Zavedeme-li *Levi-Civitův symbol* ε_{ijk} rovný nule, jsou-li kterékoli dva jeho indexy stejné, rovný jedné, jsou-li všechny tři indexy různé a tvoří sudou permutaci čísel 1, 2, 3 a rovný minus jedné, tvoří-li tyto indexy lichou permutaci, můžeme vektorový součin zapsat v elegantním tvaru

$$c_i \;=\; \varepsilon_{ijk}\ a_j\ b_k\ . \tag{M.58}$$

Přes indexy j a k se ovšem sčítá, výraz M.58 udává $i-$tou složku vektorového součinu.

Pro vektorový součin platí vztahy

$$\vec{a}\times b \;=\; -\vec{b}\times\vec{a}\ ,\quad \alpha(\vec{a}\times\vec{b}) \;=\; (\alpha\vec{a})\times\vec{b}\ ,\quad \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) \;=\; \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\ . \tag{M.59}$$

Obecně ovšem $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$!!.

Smíšený součin tří vektorů $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ definujeme jako skalár

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \;=\; |\vec{a}\times\vec{b}|\ |\vec{c}|\ \cos\gamma\ , \tag{M.60}$$

kdeγ je úhel, který svírá vektor $\vec{c}$ s kolmicí k rovině $\vec{a},\ \vec{b}$ (viz obr. M 15). Z obrázku je zřejmý názorný geometrický význam smíšeného součinu tří vektorů. Je-li $0 \le \gamma < \pi/2$, tj leží-li vektor $\vec{c}$ v témž poloprostoru jako vektorový součin $\vec{a}\times\vec{b}$, představuje smíšený součin objem rovnoběžnostěnu vytvořeného vektory $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$. Je-li $\gamma = \pi/2$, tj. leží-li všechny tři vektory v jedné rovině, je smíšený součin nulový. Je-li $\pi/2 < \gamma \le \pi$, bude mít smíšený součin záporné znaménko.

Vzhledem ke svému geometrickému významu nemůže smíšený součin záležet na tom, které dva vektory násobíme vektorově, pokud dodržíme pořadí všech tří vektorů, resp. jejich sudou permutaci. Platí tedy

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \;=\; (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} \;=\; (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}\ . \tag{M.61}$$

Protože skalární součin je komutativní, nemusíme označení součinů uvádět a můžeme smíšený součin psát jen jako $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$. Změní-li se pořadí dvou sousedních vektorů, změní smíšený součin znaménko. Smíšený součin můžeme spočítat jako determinant

$$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot (c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}) \;=\; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} . \tag{M.62}$$

Nakonec ještě uvedeme některé užitečné vzorce vektorové algebry. Je to především vzorec pro *dvojitý vektorový součin* známý jako formule "bac minus cab":

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \;=\; \vec{b}\ (\vec{a}\cdot\vec{c})\ -\ \vec{c}\ (\vec{a}\cdot\vec{b})\ . \tag{M.63}$$

obr. M 15

Někdy se hodí i vzorce

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) \ = \ (\vec{a} \cdot \vec{c}) \ (\vec{b} \cdot \vec{d}) \ - \ (\vec{a} \cdot \vec{d}) \ (\vec{b} \cdot \vec{c}) \qquad \text{(M.64)}$$

(tzv. Lagrangeova identita), a dále

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) \ = \ [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d})] \ \vec{c} \ - \ [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})] \ \vec{d} \qquad \text{(M.65)}$$

a

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] \ = \ (\vec{a} \times \vec{c}) \ (\vec{b} \cdot \vec{d}) \ - \ (\vec{a} \times \vec{d}) \ (\vec{b} \cdot \vec{c}) \ . \qquad \text{(M.66)}$$

Krátce o některých vlastnostech *tenzorů*. V trojrozměrném eukleidovském prostoru má tenzor druhého řádu obecně devět prvků, souřadnic:

$$T_{ik} \ \equiv \ \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} . \qquad \text{(M.67)}$$

Důležitým příkladem tenzoru druhého řádu je Kroneckerův symbol δ_{ik} M.43. Je to diagonální tenzor (má nenulové souřadnice pouze na diagonále matice) a má tu vlastnost, že je invariantní (izotropní). Při přechodu od jedné kartézské soustavy souřadnic k druhé se jeho tvar nemění. Z tenzorů třetího řádu jsme poznali Levi-Civitův symbol ε_{ijk}, který je rovněž invariantní, avšak při inverzi mění znaménko. Je to tedy pseudotenzor.

Také pro tenzory můžeme definovat řadu algebraických operací, jako sčítání $T_{ik} = T_{ik}^{(1)} + T_{ik}^{(2)}$ (součet tenzorů je tenzor tvořený součty odpovídajících souřadnic) a násobení číslem $T_{ik} = \alpha T_{ik}^{(1)}$ (číslem násobíme všechny souřadnice tenzoru). Násobením tenzoru n-tého řádu a tenzoru m-tého řádu vzniká obecně tenzor (n+m)-tého řádu: $T_{ij} U_{klm} = V_{ijklm}$. Naproti tomu je možno provádět i operaci *úžení* tenzoru, sčítáme-li přes některé dvojice jeho indexů. Tím vznikají tenzory nižších řádů. Zúžením tenzoru třetího řádu dostaneme vektor, zúžením tenzoru druhého řádu skalár:

$$T_{iik} = a_k , \qquad T_{ii} = \mathrm{Sp}\, T_{ik} = a . \tag{M.68}$$

(dvakrát se opakující index je sčítací a ve výsledku se již neobjevuje). Suma T_{ii} je vlastně součet diagonálních prvků tenzoru a nazývá se *stopa* tenzoru. Označujeme ji symbolem Sp (z německého Spur) nebo Tr (z anglického trace). Stopa tenzoru je tedy invariant, nemění se při transformaci souřadnic.

Lze rozlišit tenzory symetrické, u nichž $S_{ik} = S_{ki}$ a tenzory antisymetrické pro něž platí $A_{ik} = -A_{ki}$. Vlastnost symetrie nebo antisymetrie je invariantní, tenzor zůstává symetrickým (antisymetrickým) i při transformacích souřadnic. Symetrický tenzor druhého řádu má obecně šest nezávislých, nenulových prvků - tři diagonální a tři nediagonální. Antisymetrický tenzor druhého řádu musí mít na diagonále prvky nulové a má tedy jen tři nezávislé prvky. Takový tenzor můžeme odvodit z prvků axiálního vektoru $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ jako

$$A_{ik} \equiv \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{M.69}$$

Říká se mu tenzor duální k axiálnímu vektoru. Příkladem antisymetrického tenzoru třetího řádu je tenzor Levi-Civitův; má celkem 27 prvků, z toho 21 nul, 3krát 1 a 3krát -1. Každý tenzor lze jednoznačně vyjádřit jako součet symetrického a antisymetrického tenzoru:

$$T_{ik} = \frac{1}{2}\,(T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2}\,(T_{ik} - T_{ki}) = S_{ik} + A_{ik} . \tag{M.70}$$

Ve fyzice se často setkáváme se symetrickými tenzory. Mají důležitou vlastnost: *Každý symetrický nenulový tenzor lze vhodnou ortogonální transformací diagonalizovat*, tj. vhodnou volbou souřadných os převést na diagonální tvar

$$S_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} . \tag{M.71}$$

Číslům λ_i se říká *hlavní hodnoty tenzoru* a osám souřadnic, v nichž má tenzor diagonální tvar, *hlavní osy souřadnic.* Z prvků symetrického tenzoru druhého řádu jako koeficientů můžeme sestavit rovnici symetrické kvadratické plochy (kvadriky):

$$S_{11}x^2 + S_{22}y^2 + S_{33}z^2 + 2S_{12}xy + 2S_{23}yz + 2S_{13}xz = \mathrm{sgn}(|S_{ik}|) ; \tag{M.72}$$

svislými čarami je zde označen determinant matice.

Také rovnici kvadriky lze jak známo vhodnou volbou souřadnic převést na kanonický tvar

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = \mathrm{sgn}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) . \tag{M.73}$$

Symetrický tenzor lze tedy názorně geometricky interpretovat pomocí symetrických kvadrik, k nimž patří elipsoid, jednodílný hyperboloid a dvojdílný hyperboloid. Jsou-li hlavní prvky tenzoru kladné, připadá v úvahu pouze elipsoid.

Je-li zadán symetrický tenzor S_{ik}, najdeme jeho hlavní prvky řešením tzv. *sekulární rovnice*

$$\begin{vmatrix} S_{11}-\lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22}-\lambda & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + A\lambda^2 - B\lambda + C = 0 . \tag{M.74}$$

Je to algebraická rovnice třetího stupně pro neznámou λ (výraz na levé straně je determinant, který čtenář jistě umí rozvinout) a ta nám dá právě tři kořeny, hledané hlavní hodnoty tenzoru. Koeficienty $A,\ B,\ C$ jsou invarianty tenzoru, nezávisí na soustavě souřadnic a mají hodnoty

$$A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = S_{11} + S_{22} + S_{33} = S_{ii} = \mathrm{Sp} S_{ik}$$

$$B = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{23} & S_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{13} & S_{33} \end{vmatrix}$$

$$C = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |S_{ik}| . \tag{M.75}$$

Symetrický tenzor má tedy tři invarianty: stopu, součet hlavních minorů a determinant příslušející matici tenzoru.

4. Kuželosečky a kvadriky

Kuželosečky jsou rovinné křivky, které vzniknou jako průsečnice roviny dvojitou kuželovou plochou; tento způsob vytváření kuželoseček znal a jejich vlastnosti podrobně popsal již starořecký matematik Apollonios z Pergy. Analyticky můžeme zapsat obecnou rovnici kuželosečky v kartézských souřadnicích jako

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \;=\; 0\;. \tag{M.76}$$

Zavedeme diskriminant kuželosečky Δ a diskriminant kvadratických členů kuželosečky δ jako

$$\Delta \;=\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad\qquad \delta \;=\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{M.77}$$

Je-li $\Delta = 0$, dostáváme nevlastní (degenerované) kuželosečky, které představují různé dvojice přímek, různoběžných, rovnoběžných či splývajících. Pro $\Delta \neq 0$ máme kuželosečky vlastní. Je-li $\delta \neq 0$ jsou to kuželosečky středové, středově symetrické: *elipsa* ($\delta > 0$) a *hyperbola* ($\delta < 0$). Je-li $\delta = 0$, máme *parabolu.*

Elipsu můžeme definovat jako množinu bodů v rovině, které mají týž součet vzdáleností od dvou daných bodů, ohnisek. Zvolíme-li osy souřadnic v osách symetrie elipsy, dostaneme rovnici elipsy v kartézských souřadnicích

$$\frac{x^2}{a^2} \;+\; \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1\;. \tag{M.78}$$

Konstanty $a,\ b$ jsou velká a malá poloosa elipsy.

Hyperbolu můžeme definovat jako množinu bodů v rovině, které mají týž rozdíl vzdáleností od dvou daných bodů, ohnisek. Zvolíme-li osy souřadnic v osách symetrie hyperboly, dostaneme rovnici hyperboly v kartézských souřednicích

$$\frac{x^2}{a^2} \;-\; \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1\;. \tag{M.79}$$

Konstanty $a,\ b$ jsou velká a malá poloosa hyperboly.

Parabolu můžeme definovat jako množinu bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu (ohnisko, fokus) a dané přímky (řídící přímka, direktrisa). Zvolíme-li osy souřadnic v osách symetrie paraboly, dostaneme rovnici paraboly v kartézských souřadnicích

$$y^2 \;-\; 2\,p\,x \;=\; 0\;. \tag{M.80}$$

Konstanta p se nazývá parametr paraboly a je rovna vzdálenosti ohniska od řídící přímky.

Ve fyzice je někdy výhodnější popisovat kuželosečku nikoli v kartézských, ale v polárních souřadnicích. K odvození rovnice kuželosečky v polárních souřadnicích vyjdeme z obecné definice, podle níž je kuželosečka rovinná křivka, jejíž body mají konstantní *podíl* vzdálenosti od ohniska (r) a od řídící přímky (l) (viz obr. M 16):

$$\frac{r}{l} \;=\; e \;=\; \text{konst}\;. \tag{M.81}$$

obr. M 16

Tento podíl se nazývá *excentricitou* e kuželosečky a podle ní můžeme kuželosečky klasifikovat následujícím způsobem :

$e = 0$	–	kružnice	
$0 < e < 1$	–	elipsa	(křivka 1)
$e = 1$	–	parabola	(křivka 2)
$e > 1$	–	bližší větev hyperboly	(křivka 3)

Počátek polární soustavy souřadnic zvolíme v ohnisku F a polární osu o ve směru k nejbližšímu bodu kuželosečky A_p, který nazveme perihelium. Úhel φ budeme odečítat od této osy proti směru ručiček hodin (obr. M 16). Bod A na obrázku označuje obecný bod kuželosečky se vzdálenostmi r k ohnisku a l k řídící přímce, bod P odpovídá polárnímu úhlu $\varphi = \pi/2$, jeho vzdálenost k ohnisku je rovna p a k řídící přímce p'. Délku p nazveme *parametr* kuželosečky. Bod A' je pata kolmice spuštěné z bodu A na polární osu, bod D průsečík polární osy s řídící přímkou. Nyní již snadno zapíšeme polární rovnici kuželosečky.

Z M.81 máme pro bod P $p/p' = p/FD = e$ a pro obecný bod A

$$l \ = \ FD \ - \ FA' \ = \ \frac{p}{e} \ - \ r \ \cos\varphi \ ,$$

a tedy

$$\frac{p}{r} \ = \ 1 \ + \ e \ \cos\varphi \ . \qquad \text{(M.82)}$$

Podle hodnoty excentricity popisuje tato rovnice kružnici, elipsu, parabolu a bližší větev hyperboly.

Musí platit $p/r > 0$. Pro $e > 1$ této podmínce vyhoví i rovnice

$$\frac{p}{r} \ = \ - \ 1 \ + \ e \ \cos\varphi \ . \qquad \text{(M.83)}$$

Snadno ověříme, že tato rovnice popisuje druhou, od ohniska F vzdálenější větev hyperboly (křivka 4 na obr. M 16).

Vyjádříme nyní některé vlastnosti jednotlivých druhů kuželoseček. Pro excentricitu $e < 1$ dostáváme elipsu, jejíž zvláštním případem je kružnice. Elipsa je kuželosečka finitní, všechny její body leží v konečnu. Na obr. M 16 je označeno i druhé ohnisko elipsy F' a bod elipsy nejvzdálenější od ohniska F, A_a, který nazveme afelium. [4] Vzdálenosti perihelia a afelia od ohniska F označíme r_{min} a r_{max}. Elipsa je středová a osově symetrická kuželosečka se středem S; její velkou a malou poloosu označujeme a a b.

Z obr. M 16 a rovnice M.82 nyní určíme vzdálenost perihelia (odpovídá úhlu $\varphi = 0$) a afelia ($\varphi = \pi$):

$$r_{min} \ = \ \frac{p}{1+e} \qquad\qquad r_{max} \ = \ \frac{p}{1-e} \ . \qquad \text{(M.84)}$$

Odtud velká poloosa elipsy

$$a \ = \ \frac{r_{min} + r_{max}}{2} \ = \ \frac{p}{1-e^2} \ . \qquad \text{(M.85)}$$

Malou poloosu musíme určit pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníka SFA_s na obrázku, v němž $SA_s = b$, $SF = a - r_{min} = ae$, $FA_s = (SF + FD)\ e = ae^2 + p = a$. Proto

$$b \ = \ \sqrt{a^2 - a^2e^2} \ = \ a\ \sqrt{1-e^2} \ = \ \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \ . \qquad \text{(M.86)}$$

Pro parabolu určíme vzdálenost k periheliu jako

$$r_{min} \ = \ \frac{p}{2} \ , \qquad \text{(M.87)}$$

pro bližší a vzdálenější větev hyperboly

$$r_{minb} \ = \ \frac{p}{1+e} \ = \ a(e-1) \ , \quad r_{minv} \ = \ \frac{p}{e-1} \ = \ a(e+1) \ . \qquad \text{(M.88)}$$

[4] Názvy perihelium a afelium jsou odvozeny z astronomických názvů pro nejbližší a největší vzdálenost planety od Slunce. Někdy se říká též perihel a afel. Studujeme-li oběh Měsíce nebo umělé družice kolem Země, používáme názvů perigeum a apogeum, u oběhu kolem hvězdy názvů periastrum a apoastrum. Obecně bychom mohli zavést názvy pericentrum a apocentrum.

a) b)

obr. M 17

Odtud pro poloosy hyperboly máme

$$a \;=\; \frac{p}{e^2-1}\;, \qquad b \;=\; a\,\sqrt{e^2-1} \;=\; \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}\;. \tag{M.89}$$

Na rozdíl od paraboly má hyperbola asymptoty $a_1,\ a_2$ o rovnicích $y = \pm\frac{b}{a}\,x$.

Přejdeme-li do prostoru, můžeme zapsat obecnou rovnici kvadratické plochy, *kvadriky* v kartézských souřadnicích:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44} \;=\; 0\;. \tag{M.90}$$

Klasifikací případů této rovnice můžeme opět rozlišit různé kvadriky, jednak středové, k nimž patří koule, elipsoid, jednodílný a dvojdílný hyperboloid (a také dvojitá kuželová plocha), jednak nestředové, k nimž patří eliptický paraboloid a hyperbolický paraboloid (a také různé válcové plochy). Zvolíme-li kartézské osy v osách symetrie kvadriky, dostaneme rovnice kvadrik v následujících kanonických tvarech:

Pro *trojosý elipsoid* máme

$$\frac{x^2}{a^2} \;+\; \frac{y^2}{b^2} \;+\; \frac{c^2}{z^2} \;=\; 1\;. \tag{M.91}$$

Zvláštními případy obecného trojosého elipsoidu jsou elipsoidy rotační, které mají dvě poloosy stejné (např. $a = b$). Je-li přitom třetí poloosa c menší, vznikne zploštělý rotační elipsoid, (obr. M 17a), je-li větší, vznikne protáhlý rotační elipsoid (obr. M 17b). Jsou-li všechny tři poloosy stejné, přejde elipsoid v kulovou plochu.

Pro *jednodílný a dvojdílný hyperboloid* dostáváme rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} \;+\; \frac{y^2}{b^2} \;-\; \frac{z^2}{c^2} \;=\; \pm 1\;. \tag{M.92}$$

obr. M 18

obr. M 19

obr. M 20

obr. M 21

Tyto hyperboloidy jsou na obr. M 18 a M 19.

K nestředovým kvadrikám patří *eliptický a hyperbolický paraboloid.* Tyto plochy mají rovnice

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2\,z\,. \tag{M.93}$$

Eliptický paraboloid (obr. M 20) přechází při $p = q$ ve známý paraboloid rotační. Hyperbolický paraboloid je na obr. M 21. Lze dokázat, že jednodílný hyperboloid a hyperbolický paraboloid lze vytvořit soustavou povrchových přímek.

Příklady

1. Pomocí rozměrové analýzy se pokuste "uhádnout" vzorec pro dráhu tělesa při volném pádu.

2.Vypočítejte povrch a objem koule ve sférických souřadnicích.

3.Ověřte, že transformační matice rotace kolem osy z je ortogonální, tj. že pro

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

platí $\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk},\ |\alpha_{ik}| = 1.$

4. Rozepište nebo vypočíejte výrazy $a_{jl}x_l,\quad \delta_{jk}x_k,\quad \alpha_{1k}x_k,\quad \delta_{ii},\quad \delta_{ij}\delta_{ij},\quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}.$

5. Určete $|\vec{i}+2\vec{j}|,\quad |\vec{i}-3\vec{k}|,\quad |2\vec{i}-3\vec{j}|,\quad |\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}|.$

[$\sqrt{5},\quad \sqrt{10},\quad \sqrt{13},\quad \sqrt{6}$]

6. Určete $\vec{i}\ \times\ (\vec{j}+\vec{k}),\quad \vec{i}\ \times\ (\vec{i}+\vec{j}),\quad \vec{i}\ \cdot\ (\vec{i}+\vec{k}),\quad \vec{i}\ \times\ (\vec{i}+\vec{k}).$

[$\vec{k}-\vec{j},\quad \vec{k},\quad 1,\quad -\vec{j}$]

7. Vypočítejte $|\vec{i} - \frac{\vec{i}+2\vec{j}}{5}|$.

[$\sqrt{20}/5$]

8. Vypočítejte $|\vec{a} - \frac{\vec{a}-\vec{b}}{3}|$, je-li $a = 1,\ b = 2$ a vektory $\vec{a}, \vec{b}$ svírají úhel $\pi/3$.

$[2\sqrt{3}/3]$

9. Určete $|2\vec{m}-\vec{n}|$, jsou-li $\vec{m},\ \vec{n}$ jednotkové vektory, které svírají úhel $\pi/4$.

$[\sqrt{5-2\sqrt{2}}]$

10. Dokažte, že vektor $\vec{a}$ je kolmý k vektoru $\vec{b}$, platí-li $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$.

11. Určete $(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$.

$[a^2b^2]$

12. Upravte $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$.

$[2\vec{b}\times\vec{a}]$

13. Upravte $\vec{i}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})+(\vec{j}+\vec{k})\times(\vec{i}-2\vec{j})$.

$[2\vec{i}]$

14. Které z těchto výrazů jsou stejné: $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}),\quad(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c},\quad(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b},\quad(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b},\quad(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}$?

15. Určete k vektoru $\vec{a}=(1,3,5)$ vektor jednotkový.

$[(1/\sqrt{35},\ 3/\sqrt{35},\ 5/\sqrt{35}]$

16. Určete jednotkový vektor ve směru $\vec{a}-\vec{b}$, kde $\vec{a}=(3,2,0),\quad\vec{b}=(2,1,1)$.

$[\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)]$

17. Určete jednotkový vektor ve směru $\vec{a}+\vec{b}$, kde $\vec{a}=(3,3,1),\quad\vec{b}=(1,-3,2)$.

$[\frac{1}{5}(4,0,3)]$

18. Najděte jednotkový vektor kolmý k rovině určené vektory $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

$[\pm(2\vec{j}+\vec{k})/\sqrt{5}]$

19. Určete $\vec{a}\times\vec{b}$, kde $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j},\quad\vec{b}=2\vec{j}+\vec{k}$.

$[4\vec{k}-2\vec{j}-\vec{i}]$

20. Určete $\vec{a}\cdot\vec{b}$, kde $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\quad\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

[3]

21. Určete jednotkový vektor ve směru výslednice vektorů $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

$[(\vec{i} + 2\vec{k})/\sqrt{5}]$

22. Je dán součet a rozdíl dvou vektorů: $\vec{a} + \vec{b} = (4, 2, 1)$, $\vec{a} - \vec{b} = (2, 3, 1)$. Určete vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a úhel mezi vektory $\vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b})$.

$[(3,\ 2.5,\ 1),\quad (1,\ -0.5,\ 0),\quad \cos\varphi = 0,974]$

23. Pomocí vektorového součinu určete plochu trojúhelníka s vrcholy $A(2, 3, 5)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, 6, 4)$.

$[\sqrt{426}/2 \approx 10,3]$

24. Určete objem rovnoběžnostěnu, jehož strany jsou dány vektory $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{j} + 3\vec{k}$.

[12]

25. Pomocí skalárního součinu vektorů určete úhly, které svírají tělesové úhlopříčky krychle.

$[70^0\ 30',\quad 109^0\ 30']$

26. Pomocí vektorového počtu dokažte kosinovou větu (stranu c vyjádřete pomocí rozdílu vektorů $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$) a sinovou větu (uvědomte si, že pro vektory stran trojúhelníka platí $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ a použijte vlastností vektorového součinu).

27. Najděte složky vektoru $\vec{a}$ do směru daného jednotkovým vektorem $\vec{n}$ a do směru kolmého.

$[(\vec{n} \cdot \vec{a})\ \vec{n},\quad (\vec{n} \times \vec{a}) \times \vec{n}]$

28. Jsou dány vektory $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$. Vypočítejte $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

$[(23, 3, 4),\quad (8, -8, 1)]$

29. Dokažte větu "bac minus cab".

30. Kolik nezávislých prvků má obecný symetrický tenzor čtvrtého řádu?