1. KINEMATIKA ČÁSTICE

1.1 Kinematický popis pohybu částice

Nejjednodušší fyzikální soustava je jeden hmotný bod, který se pohybuje v prostoru a čase. Pojem *hmotný bod* je ovšem abstrakce, model, kterým nahrazujeme reálnou částici. Vyjadřujeme jím, že odhlížíme od tvaru a rozměrů částice, považujeme ji za bodovou, a kromě její geometrické polohy v daném okamžiku jí připisujeme pouze jedinou fyzikální vlastnost, hmotnost. V tomto smyslu budeme v mechanice často místo hmotného bodu hovořit prostě o částici.

V kinematice se zajímáme pouze o průběh pohybu částice v prostoru a čase a nepátráme po příčinách tohoto pohybu a jeho změn. Předpokládáme, že částice se pohybuje po spojité křivce, *trajektorii*, a snažíme se určit jednak *tvar* této trajektorie a *zákon pohybu* po ní, tj. polohu částice na trajektorii v závislosti na čase. [1] Spojitá křivka má v každém bodě tečnu a můžeme zavést pojem okamžité rychlosti částice mířící ve směru této tečny.

Předpokládejme nejprve, že trajektorie částice je zadána. Pak můžeme od zvoleného bodu na trajektorii a zvoleného okamžiku měřit *dráhu* částice $s(t)$, tedy délku křivky, kterou částice za určitou dobu prošla (obr. 1.1). V okamžiku t je částice v bodě daném prošlou dráhou s, v okamžiku $t + \Delta t$ v bodě $s + \Delta s$. Dráha s tu vlastně představuje parametr udávající polohu bodu na křivce; tímto způsobem popisujeme například pohyb automobilu na dálnici a udáváme na kterém je právě kilometru.

Přitom můžeme zavést *střední rychlost* částice v intervalu Δt

$$< v > = \frac{\Delta s}{\Delta t} , \tag{1.1}$$

okamžitou rychlost částice v okamžiku t

$$v(t) \; = \; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \; = \; \frac{ds}{dt} \; = \; \dot{s} \; . \tag{1.2}$$

a okamžité zrychlení

$$a(t) \; = \; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \; = \; \frac{dv}{dt} \; = \; \frac{d^2 s}{dt^2} \; = \; \dot{v} \; = \; \ddot{s} \; . \tag{1.3}$$

Takto zavedené rychlost a zrychlení jsou skalární funkce času a udávají pouze jak se mění dráha a rychlost při pohybu po zadané trajektorii, ve směru tečny k této trajektorii.

Obecně však musíme udat polohu částice v prostoru vzhledem k nějaké vztažné soustavě. Tato soustava, například kartézská, je spojena s nějakým tuhým tělesem a doplněna

[1] Představa o pohybu částice po trajektorii jako po spojité křivce vyplývá z naší smyslové zkušenosti. Ukazuje se, že v mikrosvětě tato představa neodpovídá skutečnosti a pojem trajektorie tam ztrácí smysl. Částice se v mikrosvětě pohybuje podle zákonů kvantové mechaniky a v daném okamžiku není možné současně přesně stanovit její polohu a rychlost.

obr.1.1 obr.1.2

hodinami umístěnými například v počátku. V místnosti mohou jako kartézské osy sloužit průsečnice stěn a podlahy. Potom udáváme tři kartézské souřadnice částice jako funkce času:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)\,. \tag{1.4}$$

Soustava tří rovnic (**??**) představuje parametrické vyjádření tvaru trajektorie. Rovnici trajektorie v kartézských souřadnicích dostaneme, vyloučíme-li z rovnic (**??**) čas. Parametrem pohybu může být ovšem i dráha: $x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s)$. Přitom $s = s[x(t), y(t), z(t)]$ vystupuje jako složená funkce času. Výše zavedená skalární rychlost bude

$$v(t) \;=\; \frac{ds}{dt} \;=\; \frac{\partial s}{\partial x}\,\dot{x} \;+\; \frac{\partial s}{\partial y}\,\dot{y} \;+\; \frac{\partial s}{\partial z}\,\dot{z}\,. \tag{1.5}$$

Známe-li kartézské souřadnice částice jeko funkce času, můžeme částici přiřadit *polohový vektor* $\vec{r} = [x(t),\ y(t),\ z(t)]$ vycházející z počátku soustavy souřadnic a mířící do bodu, v němž se částice právě nachází. Potom definujeme *rychlost* částice jako *vektor*, který má velikost rovnou v a směr tečny k trajektorii. Označíme-li jednotkový vektor ve směru tečny v daném bodě jako $\vec{\tau}$, můžeme psát

$$\vec{v}(t) \;=\; v\,\vec{\tau} \;=\; \frac{ds}{dt}\,\vec{\tau}\,. \tag{1.6}$$

Zavedeme-li dále derivování vektorových funkcí podobně jako u skalárních funkcí, dostaneme

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \;=\; \lim_{\Delta t \to 0}\,\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \;=\; \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \;=\; \left(\,\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\,\right)\,. \tag{1.7}$$

Z obr. 1.2 je vidět, že při $\Delta t \to 0$ se velikost vektoru $|\Delta\vec{r}|$ blíží délce oblouku Δs a jeho směr směru tečny v bodě $\vec{r}$. To souhlasí s definicí vektoru rychlosti, jak jsme ji výše zavedli. Máme tedy

$$\vec{v} \;=\; (v_x,\ v_y,\ v_z) \;=\; \frac{d\vec{r}}{dt} \;=\; (\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})\,. \tag{1.8}$$

obr. 1.3 obr. 1.4

Dále definujeme *vektor zrychlení* vztahem

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (a_x,\ a_x,\ a_z) = (\dot{v}_x,\ \dot{v}_y,\ \dot{v}_z) = (\ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{z})\,. \tag{1.9}$$

Určit směr vektoru zrychlení je však již méně snadné. K tomu účelu zvolíme na trajektorii v těsné blízkosti bodu $\vec{r}$ dva další body. Třemi body, které neleží v přímce, je určena rovina (říkáme jí rovina oskulační) a také kružnice poloměru R (nazýváme jej *poloměr křivosti* trajektorie v daném bodě). V oskulační rovině leží jednak tečna, jednak normála k trajektorii. Jednotkové vektory ve směru tečny a normály (směřující do středu křivosti) označíme $\vec{\tau}$ a $\vec{\nu}$. Kolmo k tečně i normále směřuje binormála s jednotkovým vektorem $\vec{\beta}$ (viz obr. 1.3). Trojice kolmých jednotkových vektorů $\vec{\tau},\ \vec{\nu},\ \vec{\beta}$ tvoří pravotočivou soustavu a doprovází obecně prostorovou křivku v každém bodě. Studiem těchto vlastností křivek se zabývá diferenciální geometrie.

Zderivujeme nyní vektor rychlosti (**??**) podle pravidla o derivování součinu funkcí:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}\,.$$

Z obr. 1.4 zjistíme, že vektor $d\vec{\tau}$ při $\Delta t \to 0$ nabývá směr normály a pro jeho velikost platí

$$|d\vec{\tau}| = \frac{|d\vec{r}|}{\tau} = \frac{ds}{R}\,.$$

Máme tedy

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{\nu}\,. \tag{1.10}$$

Zrychlení při obecném křivočarém pohybu leží tedy v oskulační rovině a má tečnou složku rovnou derivaci *velikosti* rychlosti podle času a normálovou složku v^2/R: [2]

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R}\,. \tag{1.11}$$

[2] Při rovnoměrném pohybu po kružnici je $a_t = 0$ a $a_n = v^2/R$ známé dostředivé zrychlení.

obr. 1.5 obr. 1.6

Některé křivočaré rovinné pohyby je lépe popisovat v polární soustavě souřadnic $r(t),\ \varphi(t)$. Derivováním určíme vztahy mezi kartézskými a polárními složkami rychlostí na obr. 1.5. Protože $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$,

$$v_x \;=\; \dot{x} \;=\; \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad v_y \;=\; \dot{y} \;=\; \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\ . \tag{1.12}$$

Složky rychlosti ve směru radiálním a tečném v_r a v_φ dostaneme pootočením souřadných os o úhel φ podle vztahů (M. 37), které můžeme aplikovat i na složky vektoru rychlosti a zrychlení. Dosadíme-li do nich za v_x a v_y podle (**??**), dostaneme po snadné úpravě

$$v_r \;=\; v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi \;=\; \dot{r}, \quad v_\varphi \;=\; -v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi \;=\; r\dot{\varphi}\ , \tag{1.13}$$

odkud

$$v^2 \;=\; v_x^2 + v_y^2 \;=\; v_r^2 + v_\varphi^2 \;=\; \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\ . \tag{1.14}$$

Stejně budeme postupovat i u zrychlení. Derivací složek rychlosti (**??**) dostaneme

$$a_x \;=\; \dot{v}_x \;=\; (\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\,\cos\varphi-(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\,\sin\varphi, \quad a_y \;=\; \dot{v}_y \;=\; (\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\,\sin\varphi+(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\,\cos\varphi\ . \tag{1.15}$$

Pro složky zrychlení v polárních souřadnicích pak dostaneme

$$a_r \;=\; a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi \;=\; \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi \;=\; -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi \;=\; 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\ . \tag{1.16}$$

Shrneme tedy

$$v_r \;=\; \dot{r}\ , \quad v_\varphi \;=\; r\dot{\varphi}\ , \quad a_r \;=\; \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\ , \quad a_\varphi \;=\; 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\ . \tag{1.17}$$

Velikost *úhlové rychlosti* ω a *úhlového zrychlení* ε můžeme zavést jako

$$\omega(t) \;=\; \frac{d\varphi}{dt} \;=\; \dot{\varphi}, \quad \varepsilon \;=\; \frac{d\omega}{dt} \;=\; \dot{\omega} \;=\; \ddot{\varphi}\ . \tag{1.18}$$

Při pootočení o malý úhel můžeme tento úhel považovat za vektor a připsat mu směr osy rotace v pravotočivém smyslu. Stejně pak budou definovány i vektory úhlové rychlosti a úhlového zrychlení $\vec{\omega}$ a $\vec{\varepsilon}$.

1.2 Základní pohyby a jejich skládání

Uvedeme nyní některé základní typy pohybu částice.

1. **Pohyb přímočarý**

Nechť přímočarý pohyb probíhá podél osy x s počátečními podmínkami $x = x_0,\ v_x = \dot{x} = v_{0x}$ při $t = t_0$. Pak rozlišujeme

a) **pohyb rovnoměrný** s konstantní rychlostí v_{0x} a nulovým zrychlením $a_x = 0$. Integrací a použitím počátečních podmínek dostáváme zákon pohybu

$$x(t) \ = \ x_0 + v_{0x}(t - t_0) \tag{1.19}$$

b) **pohyb rovnoměrně zrychlený** s konstantním zrychlením a_{0x} kladným nebo záporným. Integrací a použitím počátečních podmínek dostáváme zákon rychlosti a zákon pohybu:

$$v(t) \ = \ v_{0x} + a_{0x}(t - t_0)\ , \quad x(t) \ = \ x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}\ a_{0x}\ (t - t_0)^2\ . \tag{1.20}$$

Je-li při $t = 0\ \ x = 0,\ v = 0$ dostaneme známé vztahy $v = a_{0x}t,\ \ x = \frac{1}{2}a_{0x}t^2$.

c) **pohyb nerovnoměrný** se zrychlením obecně závislým na čase $a(t)$. Pak dostaneme zákon rychlosti a zákon pohybu integrováním

$$v \ = \ v_{0x} + \int_{t_0}^{t} a(t)dt\ , \quad x \ = \ x_0 + v_{0x}t + \int_{t_0}^{t} v(t)dt\ . \tag{1.21}$$

2. Pohyb kruhový

Při pohybu částice po kružnici poloměru R je vhodné použít polárních souřadnic. Potom platí $r = R =$ konst a zákony pohybu se zjednoduší. Ze vztahů (**??**) máme

$$v_r = \dot{R} = 0, \quad v_\varphi = R\dot{\varphi} = R\omega, \quad a_r = -R\dot{\varphi}^2 = -R\omega^2, \quad a_\varphi = R\ddot{\varphi} = R\varepsilon\ . \tag{1.22}$$

Je-li kruhový pohyb **rovnoměrný**, zůstává úhlová rychlost $\omega =$ konst a úhel φ se mění lineárně s časem

$$\varphi(t) \ = \ \varphi_0 + \omega(t - t_0)\ . \tag{1.23}$$

Obvodová rychlost $v_\varphi = v$ je ovšem také konstantní: $v = R\omega$. Obvodové (tečné) zrychlení a_φ je nulové a částice má jen normálové, *dostředivé zrychlení*, rovněž konstantní:

$$a_r \;=\; -a \;=\; -R\omega^2 \;=\; -\frac{v^2}{R} \;=\; \text{konst}\,. \tag{1.24}$$

U rovnoměrného kruhového pohybu zavádíme *dobu oběhu* $T = 2\pi/\omega$ a její převrácenou hodnotu, *počet oběhů za jednotku času* $f = 1/T$.

3. Pohyb harmonický

Pohyb harmonický dostaneme jako projekci rovnoměrného kruhového pohybu kolem počátku do jedné z kartézských os (obr. 1.6). Například v ose y pak máme

$$y(t) \;=\; A\sin(\omega t + \varphi_0)\;, \tag{1.25}$$

kde y je výchylka (elongace), A amplituda, ω úhlová frekvence, $T = 2\pi/\omega$ perioda, $f = 1/T$ frekvence (udávaná v jednotkách Hz), argument harmonické funkce $\omega t + \varphi_0$ je fáze a φ_0 počáteční fáze při $t = 0$ neboli fázová konstanta.

Souřadnice vektorů rychlosti a zrychlení při harmonickém pohybu jsou

$$v_y \;=\; \dot{y} \;=\; \omega A\cos(\omega t + \varphi_0) \;=\; \omega A\sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \tag{1.26}$$

$$a_y \;=\; \ddot{y} \;=\; -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) \;=\; \omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0 + \pi)\,. \tag{1.27}$$

Z těchto vztahů je vidět, že při harmonickém pohybu rychlost předbíhá výchylku o $\pi/2$ a zrychlení o π (je v protifázi).

Skládání pohybů

Je velmi důležité, že částice může konat současně několik pohybů, že pohyby lze vektorově skládat. Tento netriviální poznatek usnadňuje studium mechanických pohybů. Ukážeme nyní některé zajímavé případy skládání pohybů.

Se skládáním kolmých přímočarých pohybů se setkáváme při **vrhu těles v homogenním tíhovém poli ve vakuu**. Uvažujme rovinný pohyb v rovině x, z, při čemž v záporném směru osy z má pohyb zrychlení velikosti g. Ve směru osy z probíhá tedy rovnoměrně zrychlený pohyb podle (**??**) . Vztáhneme-li počáteční podmínky k okamžiku $t = 0$, máme

$$z(t) \;=\; z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\;, \qquad v_z(t) \;=\; v_{0z} - gt\,. \tag{1.28}$$

Ve směru osy x je pohyb rovnoměrný:

$$x(t) \;=\; x_0 + v_{0x}t\;, \qquad v_x(t) \;=\; v_{0x} \;=\; \text{konst}\,. \tag{1.29}$$

Zadáním příslušných počátečních podmínek dostaneme nejrůznější případy pohybů. Tak pro $x_0 = 0,\ z_0 = h,\ v_{0x} = v_{0z} = 0$ jde o **volný pád** z výšky h. Pro něj máme

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2,\ s = h - z,\ t = \sqrt{\frac{2s}{g}},\ v_z = -gt = -\sqrt{2gs}\,. \tag{1.30}$$

obr. 1.7 obr. 1.8

Pro $x_0 = 0,\ z_0 = 0,\ v_{0x} = 0,\ v_{0z} > 0$ je to **svislý vrh vzhůru**. Označíme dobu letu do vrcholového bodu t_v a jeho výšku z_v a máme

$$z = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2,\ v_z = v_{0z} - gt,\ t_v = \frac{v_{0z}}{g},\ z_v = \frac{v_{0z}^2}{2g}\ . \tag{1.31}$$

Při $x_0 = 0,\ z_0 = h,\ v_{0x} = 0,\ v_{0z} < 0$ nastává **svislý vrh dolů**. Při něm

$$z = h - |v_{0z}|t - \frac{1}{2}gt^2,\ v_z = -|v_{0z}| - gt\ . \tag{1.32}$$

Počáteční podmínky $x_0 = 0,\ z_0 = h,\ v_{0x} > 0,\ v_{0z} = 0$ určují **vodorovný vrh** ve výšce h. Výsledný pohyb už nebude přímočarý; jde o skládání rovnoměrného přímočarého pohyb rychlostí v_{0x} ve směru osy x a volného pádu ve směru z. Rovnice

$$x = v_{0x}t, \qquad z = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.33}$$

představují parametrické rovnice trajektorie. Vyloučíme-li z nich čas t, dostaneme rovnici křivky v kartézských souřadnicích

$$z\ =\ h - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2\ . \tag{1.34}$$

Je to převrácená parabola s vrcholem v bodě $(0, h)$. Snadno zjistíme její parametry - dálku dopadu na úroveň $z = 0$ x_d a dobu letu t_d:

$$x_d\ =\ v_{0x}\sqrt{\frac{2h}{g}}\ , \qquad t_d\ =\ \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{1.35}$$

(jako při volném pádu). Na počítači numericky propočítaná trajektorie vodorovného vrhu je na (obr. 1.7).

Vrh šikmý z počátku pod elevačním úhlem α dostaneme za podmínek $x_0 = 0$, $z_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha > 0$, $v_{0z} = v_0 \sin\alpha > 0$ (obr. 1.8). Jde o skládání rovnoměrného přímočarého pohybu rychlostí $v_0 \cos\alpha$ ve směru osy x a svislého vrhu vzhůru. Rovnice

$$x = v_{0x}t, \qquad z = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.36}$$

představují parametrické rovnice trajektorie. Vyloučíme-li z nich čas t, dostaneme rovnici křivky v kartézských souřadnicích

$$z \;=\; \frac{v_{0z}}{v_{0x}}\, x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}\, x^2 \;=\; x\ \mathrm{tg}\ \alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\, x^2\ . \tag{1.37}$$

Ve vakuu probíhá tedy šikmý vrh v homogenním tíhovém poli po parabole. Snadno dostaneme souřadnice vrcholu dráhy, dálku doletu a celkovou dobu letu:

$$x_v = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}\ ,\quad z_v = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}\ ,\quad x_d = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\ ,\quad t_d = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}\ . \tag{1.38}$$

Odtud je zřejmé, že maximální délka doletu odpovídá úhlu 45^0 a že obecně daného bodu doletu lze dosáhnout pod dvěma různými úhly $45^0 \pm \Delta\alpha$.

Částice může konat současně rovnoměrný kruhový pohyb a rovnoměrný přímočarý pohyb. Koná-li např. rovnoměrný kruhový pohyb kolem počátku a rovnoměrný pohyb ve směru osy z, bude výsledná trajektorie prostorová křivka zvaná **šroubovice** s rovnoměrným stoupáním (obr. 1.9). [3] Parametrické rovnice šroubovice můžeme tedy zapsat jako

$$x = R\ \cos\omega t\ ,\quad y = R\ \sin\omega t\ ,\quad z = k\ t\ . \tag{1.39}$$

Koná-li částice umístěná na obvodu kružnice o poloměru a složený pohyb tak, že se tato kružnice rovnoměrně valí po ose x, bude výslednou trajektorií křivka zvaná **cykloida** (obr. 1.10). Je to velmi důležitá křivka, s níž se ve fyzice často setkáváme. Z obrázku snadno nahlédneme, že parametrické rovnice cykloidy můžeme zapsat jako

$$x \;=\; a\,(\alpha - \sin\alpha)\ , \qquad y \;=\; a\,(1 - \cos\alpha)\ . \tag{1.40}$$

Jako parametr zde slouží úhel odvalení α. Pokud částice neleží na obvodu kružnice, ale na některém menším poloměru, vznikne tzv. **zkrácená cykloida** (obr. 1.11a), pokud leží na větším poloměru (jako například bod na obrubě železničního kola), vznikne **prodloužená cykloida** (obr. 1.11b).

Částice může konat současně několik harmonických pohybů. Předpokládejme napřed, že koná dva harmonické pohyby s různými amplitudami a úhlovými frekvencemi a touž počáteční fází ve směru osy x. Tyto dva pohyby se vzájemně sčítají, superponují, a můžeme psát

$$x \;=\; A\sin\omega_1 t \;+\; B\sin\omega_2 t \;=\; (A-B)\sin\omega_1 t \;+\; B(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t)\ . \tag{1.41}$$

[3] Nikoli "spirála".

obr. 1.9 obr. 1.10

obr. 1.11

Nechť jsou amplitudy $A = B$ stejné a úhlové frekvence $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$ blízké. Označíme rozdíl obou úhlových frekvencí $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$. Potom s použitím součtových goniometrických vzorců dostaneme

$$x \; = \; A(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) = 2A\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\sin\omega t \; . \qquad (1.42)$$

Výsledný pohyb můžeme popsat tak, že jde o harmonické kmity s úhlovou frekvencí ω, jejichž amplituda se v čase pomalu mění jako $2A\cos\Delta\omega t/2$. Jsou to známé **rázy** neboli **zázněje**. Na obr. 1.12 je znázorněn časový průběh rázů získaný na počítači složením dvou harmonických pohybů o blízkých úhlových frekvencích. Jsou-li amplitudy obou pohybů různé, nebude amplituda výsledných kmitů procházet nulou (obr. 1.13).

Zmíníme se ještě o **skládání harmonických pohybů v kolmých směrech**. Skládáme-li dva takové pohyby o stejné úhlové frekvenci, bude výsledný pohyb probíhat po trajektorii dané parametricky jako

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_{01}) \; , \quad y = B\sin(\omega t + \varphi_{02}) \; . \qquad (1.43)$$

Označíme fázi kmitů ve směru x jako $\omega t + \varphi_{01} = \varphi$, rozdíl fází obou kmitů jako $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \delta$. Dále vyloučíme z parametrických rovnic čas. K tomu cíli vyjádříme $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ pomocí veličin na čase nezávisejících a použijeme známý vztah $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Máme

$$\sin\varphi = \frac{x}{A}, \quad \sin(\varphi+\delta) = \sin\varphi\cos\delta + \cos\varphi\sin\delta = \frac{y}{B} \; , \qquad (1.44)$$

odkud

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sin\delta}\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\delta\right) . \tag{1.45}$$

Sečteme-li nyní $\sin^2\varphi$ a $\cos^2\varphi$, dostaneme rovnici trajektorie

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\delta \ = \ \sin^2\delta . \tag{1.46}$$

V závislosti na δ může tato rovnice odpovídat rovnici úsečky, nebo elipsy. Je-li $\delta = n\pi$, probíhají kmity po úsečce, jejíž přímka má směrnici $k = \pm B/A$, je-li $\delta = (n + 1/2)\pi$, je trajektorií elipsa

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 . \tag{1.47}$$

Jsou-li amplitudy kmitů stejné, přejde pro $\delta = (n+1/2)\pi$ elipsa v kružnici. S uvedeným skládáním dvou kolmých kmitů o stejných frekvencích se setkáváme nejen v mechanice, ale například i v elektromagnetismu a optice při studiu polarizace světla. Výsledné trajektorie získané pomocí počítače jsou na obr. 1.14; křivka 1 odpovídá $\delta = 0$, křivka 2 $\delta = \pi$, křivka 3 $\delta = \pi/2$ křivka 4 $\delta = \pi/4$.

Jsou-li úhlové frekvence kolmých kmitů různé, vznikají složité tzv. **Lissajousovy obrazce**. Na obr. 1.15 vidíme dva takové obrazce pro poměr frekvencí 1:2 (křivka 1) a 2:3 (křivka 2). Poměr frekvencí můžeme určit podle počtu bodů, v nichž se obrazec dotýká souřadných os. Jsou-li frekvence v poměru stále větších nesoudělných čísel, stává se obrazec složitější. Jeho tvar závisí ovšem také na rozdílu fází obou kmitů δ.

Úloha:

Určete tečné zrychlení, normálové zrychlení a poloměr křivosti trajektorie vodorovného vrhu.

Řešení:

Pro rychlost a zrychlení máme

$$\vec{v} = (v_{0x}, \ -gt, \ 0), \quad v^2 = v_{0x}^2 + g^2t^2, \quad \vec{a} = (0, \ -g, \ 0) .$$

Tedy

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_{0x}^2 + g^2t^2}} , \quad a_n = \sqrt{g^2 - a_t^2} = \frac{g v_{0x}}{\sqrt{v_{0x}^2 + g^2t^2}} , \quad R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_{0x}^2 + g^2t^2)^{3/2}}{g v_{0x}} .$$

Úloha:

Uvažujte množinu trajektorií šikmého vrhu s touž velikostí počáteční rychlosti (výstřelů z téže zbraně) a různými elevačními úhly. Dokažte, že obálkou této množiny trajektorií je tzv. ochranná parabola (místa za touto parabolou nemohou být zasažena) - obr. 1.16.

Řešení:

obr. 1.12

obr. 1.13

obr. 1.14

obr. 1.15

obr. 1.16

Upravíme rovnici trajektorie (**??**) na tvar

$$z \;=\; x \,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{2v_0^2}\, x^2$$

a pohlížíme na ni jako na kvadratickou rovnici pro tg α. Body ležící na obálce mohou být dosaženy pouze při jedné hodnotě elevačního úhlu. Položíme proto diskriminant rovnice pro tg α roven nule a dostaneme rovnici obálky

$$z \;=\; -\frac{g}{2v_0^2}\, x^2 + \frac{v_0^2}{2g}\;.$$

Příklady

1.1 Částice se pohybuje přímočaře po ose x podle zákona $x = At + Bt^2$, kde $A = 5$ cm.s^{-1}, $B = 6$ cm.s^{-2}. Určete okamžitou rychlost částice začátkem desáté a koncem dvanácté sekundy a střední rychlost v intervalu mezi těmito okamžiky.

[113 cm.s^{-1}, 149 cm.s^{-1}, 131 cm.s^{-1}]

1.2 Pilot letadla je od svého cíle vzdálen 200 km na západ, a přitom vane severozápadní vítr o rychlosti 30 km.h^{-1}. Určete vektor rychlosti letadla, chce-li pilot dosáhnout svého cíle za 40 minut (obr. 1.17).

obr. 1.17 obr. 1.18

[$(278,8\ ;\ 21,2)$ km.h^{-1}, osa x míří na východ, osa y na sever]

1.3 Po ramenech pravého úhlu lezou dva brouci. První z bodu A vzdáleného od vrcholu pravého úhlu o vzdálenost l_{10} rychlostí v_1 směrem k vrcholu, druhý po druhém rameni z vrcholu směrem od něho rychlostí v_2 (viz obr. 1.18). V kterém okamžiku si budou brouci nejblíže, jak budou od sebe daleko a jaké budou přitom jejich vzdálenosti od vrcholu?

[$t = \frac{l_{10}v_1}{v_1^2+v_2^2}$, $l = \frac{l_{10}v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$, $l_1 = \frac{l_{10}v_2^2}{v_1^2+v_2^2}$, $l_2 = \frac{l_{10}v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}$]

1.4 Dvě částice se pohybují rychlostmi o vektorech $\vec{v}_1 = (2,\ 0)$, $\vec{v}_2 = (0,\ 3)$ (v příslušných jednotkách). V čase $t = 0$ se nacházely v bodech $\vec{r}_{10} = (-3,\ 0)$, $\vec{r}_{20} = (0,\ -3)$. Určete vektor vzájemné polohy částic, čas a délku maximálního sblížení.

[$\vec{r}_{21}(t) = (3-2t, -3+3t)$, $t = 15/13$, $r = 3/\sqrt{13}$ příslušných jednotek]

1.5 Dvě částice se pohybují rovnoměrně přímočaře, první z bodu $A = (0,\ 1)$ rychlostí $v_1 = (3,\ -2)$, druhý z bodu $B = (0, -1)$ rychlostí $v_2 = (6,\ 4)$, vše v příslušných jednotkách. Určete průsečík trajektorií, vektor vzájemné polohy, okamžik maximálního sblížení, a velikost tohoto sblížení.

[$(3/2,\ 0)$, $(3t,\ 6t-2)$, $4/15$, $\sqrt{4/5}$ příslušných jednotek]

1.6 Pohyb částice je určen paramericky jako $x = A_1t^2 + B_1$, $y = A_2t^2 + B_2$, kde $A_1 = 20$ cm.s^{-2}, $B_1 = 5$ cm, $A_2 = 15$ cm.s^{-2}, $B_2 = -3$ cm. Najděte rychlost a zrychlení částice v okamžiku $t = 2$ s.

[$\vec{v} = (80,\ 60)$ cm.s^{-1}, $\vec{a} = (40,\ 30)$ cm.s^{-2}]

1.7 Určete rovnici trajektorie, rychlost a zrychlení u následujících pohybů částice zadaných parametrickými rovnicemi:
a) $x = 4\sin\frac{\pi}{2}t$, $y = 3\sin\frac{\pi}{2}t$, b) $x = 4\cos\frac{\pi}{2}t$, $y = 3\sin\frac{\pi}{2}t$,
c) $x = \left(4\sin\frac{\pi}{2}\right)t$, $y = \left(3\sin\frac{\pi}{2}\right)t$, d) $x = 4\cos^2\frac{\pi}{2}t$, $y = 3\sin^2\frac{\pi}{2}t$.

[a) harmonický pohyb po úsečce $y = \frac{3}{4}x$ v rozmezí $|x| \leq 4,\ |y| \leq 3$, $\vec{v} = (2\pi\cos\frac{\pi}{2}t,\ \frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t)$, $\vec{a} = (-\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t,\ -\frac{3}{4}\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t)$

b) nerovnoměrný pohyb po elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) rovnoměrný přímočarý pohyb po přímce $y = \frac{3}{4}x$

d) pohyb po úsečce ležící v přímce $y = -\frac{3}{4}x + 3$ v mezích $0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 3$, $\vec{v} = (-2\pi\sin\pi t,\ \frac{3}{2}\pi\sin\pi t)$, $\vec{a} = (-2\pi^2\cos\pi t,\ \frac{3}{2}\pi^2\cos\pi t)$]

1.8 Napište parametrické rovnice pro pohyb částice, která koná harmonický pohyb po úsečce, jejíž nosná přímka má rovnici $y = x - 4$. Rovnovážná poloha leží v bodě $A = (2, -2)$, amplituda je rovna $s_0 = 2\sqrt{2}$, úhlová frekvence $\omega = \pi/4$, v okamžiku $t = 0$ je částice v bodě $(4, 0)$ (vše v příslušných jednotkách).

$$[x = 2 + 2\cos\tfrac{\pi}{4}t\ , \quad y = -2 + 2\cos\tfrac{\pi}{4}t]$$

1.9 Určete rychlost a zrychlení částice v polárních souřadnicích, je-li pohyb zadán parametricky jako $x = at, \quad y = bt$, kde $a,\ b$ jsou konstanty.

$$[v_r = \dot{r} = \sqrt{a^2 + b^2}\ , \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = 0\ , \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0\ , \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0]$$

1.10 Určete charakter pohybu částice (trajektorii, rychlost, zrychlení) daného parametricky jako $x = l\cos[\phi_0 \sin(\omega t + \varphi_0)]\ , \quad y = l\sin[\phi_0 \sin(\omega t + \varphi_0)]$.

[$r = l=$ konst, $\varphi(t) = \phi_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$, pohyb po oblouku kružnice v rozmezí $|\varphi| \leq \phi_0$,

$$v_r = 0\ , \quad v_\varphi = l\phi_0\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -l\phi_0^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)\ , \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = -l\phi_0\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)]$$

1.11 Částice se pohybuje po kružnici poloměru $r = 5$ cm se středem v počátku souřadné soustavy, s konstantním úhlovým zrychlením $\varepsilon = 2\ \mathrm{s}^{-2}$ a v okamžiku $t = 0$ je v bodě A o souřadnicích (0, 5) cm. Určete tečné a normálové zrychlení. Řešte v polárních souřadnicích.

$$[a_t = r\varepsilon = 10\ \mathrm{cm.s^{-2}}\ , \quad a_n = \tfrac{v^2}{r} = r\varepsilon^2 t^2 = 20\ \mathrm{cm.s^{-2}}]$$

1.12 Určete amplitudu a fázovou konstantu harmonického pohybu, je-li doba kmitu $T = 3{,}14$ s a v okamžiku $t = 0$ je výchylka $x_0 = 10$ cm a rychlost $v_0 = 0{,}4\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

$$[A = \sqrt{x_0^2 + \tfrac{v_0^2}{\omega^2}} = 0{,}22\ \mathrm{m}\ , \quad \varphi_0 = \mathrm{arctg}\ \tfrac{x_0\omega}{v_0} = 0{,}46]$$

1.13 Částice koná harmonický pohyb. Její maximální rychlost je 6 $\mathrm{m.s^{-1}}$ a maximální zrychlení 24 $\mathrm{m.s^{-2}}$. Určete dobu kmitu, frekvenci, úhlovou frekvenci a amplitudu.

$$[1{,}57\ \mathrm{s}\ , \quad 0{,}64\ \mathrm{Hz}\ , \quad 4\ \mathrm{s^{-1}}\ , \quad 1{,}5\ \mathrm{m}]$$

1.14 Mějme kružnici poloměru R ležící ve svislé rovině. Z jejího vrcholu vycházejí žlábky ve směru tětiv k obvodu kružnice (obr. 1.19). Do žlábků současně vložíme malé kuličky a vypustíme. Dokažte, že všechny kuličky dosáhnou obvodu kružnice za stejnou dobu. Úlohu poprvé řešil v 17. století český učenec Jan Marcus Marci z Kronlandu.

$$[t = \sqrt{\tfrac{4R}{g}}]$$

obr. 1.19

1.15 Těleso je vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí v_0. Zároveň je z výšky h volně puštěno druhé těleso. Obě tělesa dopadnou na zem současně. Z jaké výšky bylo puštěno druhé těleso?

$$\left[\frac{2v_0^2}{g}\right]$$

1.16 Těleso je vrženo v okamžiku $t = 0$ svisle vzhůru. Určitým místem ve výšce h prochází v okamžiku t_1 směrem vzhůru a v okamžiku t_2 směrem dolů. Určete výšku h a počáteční rychlost v_0.

$$\left[h = \frac{g t_1 t_2}{2}\ , \qquad v_0 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2}\right]$$

1.17 Jakou rychlostí v_0 je nutno hodit těleso svisle dolů z výšky h, aby dopadlo o čas τ dříve než při volném pádu?

$$\left[v_0 = g\tau \frac{\sqrt{8hg} - g\tau}{\sqrt{8hg} - 2g\tau}\right]$$

1.18 Uvažujte množinu trajektorií šikmého vrhu z počátku soustavy souřadnic s touž počáteční rychlostí v_0 a proměnným elevačním úhlem α. Dokažte, že vrcholy trajektorií leží na elipse

$$x^2 + 4z^2 - \frac{2v_0^2}{g} z = 0\ .$$

obr. 1.20

obr. 1.21

1.19 Uvažujte množinu trajektorií šikmého vrhu z počátku soustavy souřadnic pod týmž elevečním úhlem α a proměnnou počáteční rychlostí v_0. Dokažte, že vrcholy trajektorií leží na přímce

$$z = \frac{1}{2}(\mathrm{tg}\ \alpha)\ x\ .$$

1.20 Cíl leží v šikmé vzdálenosti $d = 6000$ m pod polohovým úhlem $\varphi = 30^0$. Jaká musí být minimální počáteční rychlost střely, aby byl cíl zasažen? Jaký elevační úhel odpovídá této rychlosti (obr.1.20) ?

$$[v_{0min} = \sqrt{gd(1+\sin\varphi)} = 300\ \mathrm{m.s^{-1}}\ , \qquad \mathrm{tg}\ \alpha = \tfrac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt{3}\ , \quad \alpha = 60^0]$$

1.21 Lissajousovy obrazce. Pohyb částice je dán rovnicemi a) $x = A\cos\omega t\ ,\quad y = B\cos 2\omega t\ ,$ b) $x = A\cos\omega t\ ,\quad y = B\cos 3\omega t$. Určete tvar trajektorie.

$[y = \frac{2B}{A^2}x^2 - B$ (obr. 1.21, křivka 1), $\quad y = \frac{4B}{A^3}x^3 - \frac{3B}{A}x$ (křivka 2), $|x| \le A,\ |y| \le B]$