3. MECHANIKA SOUSTAVY ČÁSTIC

3.1 Zákony zachování

3.1.1 První věta impulsová, těžiště

Přejdeme nyní od mechaniky jedné k částice k mechanice soustavy částic. Mějme celkem N částic (hmotných bodů) a označujme je například řeckými indexy $\alpha,\ \beta, \ldots$. [1] Tyto částice mají každá svou hmotnost, polohový vektor, rychlost a hybnost

$$m_\alpha\ ,\quad \vec{r}_\alpha\ ,\quad \vec{v}_\alpha\ ,\quad \vec{p}_\alpha\ ,\qquad \alpha\ =\ 1 \ldots N\ .$$

Částice mohou být buď *volné* (jako třeba planety) nebo *vázané* (pohybují-li se třeba na povrchu Země nebo jsou-li mezi sebou spojeny). Soustava volných částic má $s = 3\ N$ *stupňů volnosti*, tj. je třeba znát tři souřadnice každé částice, abychom znali rozložení částic v prostoru. U vázaných částic se počet stupňů volnosti snižuje.

Předpokládejme, že vztažná soustava, v níž soustavu částic studujeme, je inerciální, tj. že v ní působí jen pravé síly. Tyto síly mohou být jednak *vnitřní, interní*, jimiž působí částice mezi sebou navzájem, jednak *vnější, externí*, jimiž na soustavu působí jiná tělesa mimo ni. Pokud na soustavu vnější síly nepůsobí, je soustava *izolovaná*. Pro pravé síly v inerciální vztažné soustavě můžeme použít Newtonovy zákony.

Zákon síly pro každou částici můžeme zapsat tak, že rozepíšeme síly na vnitřní

$$\vec{F}^{(i)}_\alpha\ =\ \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta} \tag{3.1}$$

($\vec{F}_{\alpha\beta}$ je síla, kterou částice s indexem β působí na částici s indexem $\alpha,\quad \alpha \neq \beta$) a vnější $\vec{F}^{(e)}_\alpha$:

$$\frac{d\vec{p}_\alpha}{dt}\ =\ \vec{F}^{(i)}_\alpha\ +\ \vec{F}^{(e)}_\alpha\ =\ \sum_{\beta=1}^{N}\ \vec{F}_{\alpha\beta}\ +\ \vec{F}^{(e)}_\alpha\ . \tag{3.2}$$

Máme tedy N rovnic (**??**) a všechny je sečteme přes α. Tak dostaneme

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt}\ =\ \frac{d}{dt}\ \sum_{\alpha=1}^{N}\ \vec{p}_\alpha\ =\ \sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\ \vec{F}_{\alpha\beta}\ +\ \sum_{\alpha=1}^{N}\ \vec{F}^{(e)}_\alpha\ . \tag{3.3}$$

[1] Indexy $i,\ j,\ k$ ponecháme pro souřadnice 1, 2, 3.

Označíme nyní *celkovou hybnost soustavy částic*

$$\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{p}_\alpha$$

a *výslednici vnějších sil* působících na soustavu

$$\vec{F}^{(e)} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(e)} .$$

Zároveň si uvědomíme, že podle zákona akce a reakce se vnitřní síly v soustavě vyruší. Protože je $\vec{F}_{\alpha\beta} = -\vec{F}_{\beta\alpha}$, můžeme je vyjádřit symetrickým způsobem jako

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (\vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{F}_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (\vec{F}_{\alpha\beta} - \vec{F}_{\alpha\beta}) = \vec{0} .$$

Z rovnice (**??**) tedy dostáváme

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)} . \tag{3.4}$$

Tento důležitý výsledek je matematickým vyjádřením **první věty impulsové** [2] neboli **věty o hybnosti soustavy částic**:

Časová změna celkové hybnosti soustavy částic je rovna výslednici vnějších sil.

Je-li soustava izolovaná, je výslednice vnějších sil nulová, $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$ a platí **zákon zachování celkové hybnosti izolované soustavy částic**:

$$\vec{P} = \textbf{konst} ; \tag{3.5}$$

celková hybnost izolované soustavy částic se zachovává. [3]

Zkoumejme nyní, jak se změní celková hybnost soustavy částic, přejdeme-li k jiné vztažné soustavě S', jejíž počátek se pohybuje v původní soustavě S rychlostí $\vec{V}(t)$, při čemž osy souřadnic si zachovávají svou orientaci. Soustava S' nyní ovšem nemusí být inerciální. Pak je třeba transformovat rychlosti všech částic jako $\vec{v}_\alpha = \vec{v}'_\alpha + \vec{V}$ a pro celkovou hybnost dostaneme

$$\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{p}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}'_\alpha + \vec{V} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha . \tag{3.6}$$

[2] Název je historický a nepříliš výstižný. Hybnosti se dříve říkalo a v cizích jazycích dosud říká impuls. Také v kvantové fysice se zhusta používá název impuls místo hybnost.

[3] Při odvozování zákona zachování celkové hybnosti jsme použili zákon akce a reakce. V teoretické fyzice se však dokazuje, že tato implikace neplatí obráceně, tj. že k platnosti zákona zachování celkové hybnosti nemusí platit zákon akce a reakce. Jak se ještě zmíníme, zákony zachování v soustavě částic mají těsnou souvislost s vlastnostmi symetrie prostoru a času

Poslední suma však představuje *celkovou hmotnost soustavy* $M = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha$, takže máme

$$\vec{P} = \vec{P}' + M\,\vec{V}\,. \tag{3.7}$$

Položíme-li $\vec{P}' = \vec{0}$, dostaneme z (**??**)

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha}\,.$$

Můžeme tedy mít za to, že v soustavě částic existuje myšlený bod nazývaný *hmotný střed*, *střed hmotnosti* nebo *těžiště* o polohovém vektoru

$$\vec{R} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha}\,, \tag{3.8}$$

který se pohybuje rychlostí $\vec{V}$ a chová se tak, jakoby v něm byla soustředěna celá hmotnost soustavy:

$$\vec{P} = M\,\vec{V}\,, \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}^{(e)}\,. \tag{3.9}$$

Ve vztažné soustavě spojené s hmotným středem (těžištěm) je celková hybnost $\vec{P}'$ nulová. [4]

V izolované soustavě částic je výslednice vnějších sil nulová, takže **rychlost těžiště zůstává konstantní**:

$$\vec{V} = \mathbf{konst} \tag{3.10}$$

což praví další **zákon zachování rychlosti těžiště izolované soustavy.** Je v podstatě zobecněním zákona setrvačnosti jedné částice na soustavu částic.

Při přechodu od jedné inerciální vztažné soustavy k druhé pomocí vztahu (**??**), kde $\vec{V}=$ **konst** budeme zřejmě mít

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}'}{dt} = \vec{F}^{(e)} \tag{3.11}$$

a první věta impulsová platí stejně ve všech inerciálních soustavách. Hybnost izolované soustavy částic je ovšem v každé z nich jiná, v těžišťové nulová. Víme sice, že všechny inerciální vztažné soustavy jsou si rovnoprávné, platí v nich zákony mechaniky v témž tvaru a tyto soustavy nelze navzájem experimentálně odlišit, ale těžišťová soustava je přece jen "rovnoprávnější", matematicky výhodnější.

3.1.2 Druhá věta impulsová

Vynásobíme nyní pohybovou rovnici každé částice zleva vektorově polohovým vektorem této částice:

$$\vec{r}_\alpha \times \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = \sum_{\beta=1}^{N} (\,\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta}\,) + \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)}\,. \tag{3.12}$$

[4] Přesně vzato hmotný střed soustavy a její těžiště nejsou totožné, například v nehomogenním tíhovém poli se liší. Přesto však je v teoretické fyzice zvykem nazývat soustavu hmotného středu těžišťovou.

Rovnice opět sečteme přes α a dostaneme

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{r}_\alpha \times \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} \right) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \left(\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)} \right) . \qquad (3.13)$$

Levou stranu (**??**) upravíme na

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\vec{r}_\alpha \times \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} \right) = \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha \right) - \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \times \vec{p}_\alpha \right) =$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha \right) - \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\vec{v}_\alpha \times \vec{p}_\alpha \right) . \qquad (3.14)$$

Druhá suma na pravé straně je rovna nule, neboť vektory rychlosti a hybnosti jsou rovnoběžné. Vektorový součin $\vec{l}_\alpha = \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$ ale představuje moment hybnosti částice vzhledem k počátku souřadnic. Označíme-li nyní *celkový moment hybnosti soustavy částic* [5]

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{l}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha \right) ,$$

máme na levé straně (**??**) časovou derivaci celkového momentu hybnosti $\frac{d\vec{L}}{dt}$. Upravíme nyní pravou stranu (**??**) a označíme *výsledný moment vnějších sil* jako

$$\vec{N}^{(e)} = \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)} \right) .$$

Použijeme opět zákon akce a reakce na vnitřní síly soustavy a napíšeme

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\left(\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)} \right) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\left(\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\beta\alpha} \right) + \vec{N}^{(e)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\left(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta \right) \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{N}^{(e)} .$$

Budeme dále předpokládat, že síly působící mezi částicemi jsou centrální. Z obr. (3.1) je však vidět, že v tom případě budou vektory $\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta$ a $\vec{F}_{\alpha\beta}$ rovnoběžné, a tedy jejich vektorový součin roven nule. Dospíváme tedy k rovnici

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)} , \qquad (3.15)$$

která je matematickým vyjádřením **druhé věty impulsové** neboli **věty o momentu hybnosti soustavy částic**:

Časová změna celkového momentu hybnosti soustavy částic je rovna výslednému momentu vnějších sil.

obr. 3.1

[5] V zahraniční literatuře a v kvantové fyzice nazývaný impulsmoment

Moment hybnosti i moment vnějších sil se přitom vztahují k témuž bodu, počátku soustavy souřadnic.

Je-li soustava izolovaná, je výsledný moment vnějších sil nulový, $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ a platí **zákon zachování celkového momentu hybnosti izolované soustavy částic**:

$$\vec{L} = \textbf{konst} \; ; \tag{3.16}$$

celkový moment hybnosti izolované soustavy částic se zachovává.

Zkoumejme nyní, jak se změní celkový moment hybnosti soustavy částic, budeme-li jej vztahovat k jinému počátku O', který se pohybuje v původní soustavě konstantní rychlostí $\vec{V}$, tj. jeho polohový vektor závisí na čase jako $\vec{r}\,(O') = \vec{r}_0 + \vec{V}t$. Pak je třeba transformovat polohové vektory všech částic jako $\vec{r}_\alpha = \vec{r}'_\alpha + \vec{r}_0 + \vec{V}t$, $\vec{v}_\alpha = \vec{v}'_\alpha + \vec{V}$ a pro celkový moment hybnosti dostaneme

$$\vec{L} = \vec{L}' - \vec{V} \times \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}'_\alpha + \vec{r}_0 \times \vec{P}' + \vec{r}_0 \times M\vec{V} + \vec{V}t \times \vec{P}' \,. \tag{3.17}$$

Odtud vidíme, že budou-li oba počátky nehybné, tj. $\vec{V} = \vec{0}$, máme

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r}_0 \times \vec{P}' = \vec{L}' + \vec{r}_0 \times \vec{P} \,. \tag{3.18}$$

Půjde-li o těžišťovou soustavu, kde $\vec{P} = \vec{P}' = \vec{0}$, bude

$$\vec{L} = \vec{L}' \,, \tag{3.19}$$

a **celkový moment hybnosti soustavy částic nezávisí na volbě počátku.**

Zderivujeme-li (**??**) podle času, dostaneme

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} - \vec{V} \times \vec{P}' + \vec{r}_0 \times \frac{d\vec{P}'}{dt} + \vec{V} \times \vec{P}' + \vec{V}t \times \frac{d\vec{P}'}{dt} =$$

$$= \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{r}\,(O') \times \frac{d\vec{P}'}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{r}\,(O') \times \frac{d\vec{P}}{dt} \,. \tag{3.20}$$

Je-li výslednice vnějších sil, a tedy časová změna celkové hybnosti, nulová, platí

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{N}^{(e)} \tag{3.21}$$

a druhá věta impulsová platí stejně ve všech inerciálních soustavách.

3.1.3 Věta o energii soustavy částic

Vynásobíme nyní pohybovou rovnici každé částice skalárně její rychlostí $\vec{v}_\alpha$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v}_\alpha = \vec{F}^{(i)}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha + \vec{F}^{(e)}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha \tag{3.22}$$

a sečteme

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} \cdot \vec{v}_\alpha \;=\; \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(i)} \cdot \vec{v}_\alpha \;+\; \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(e)} \cdot \vec{v}_\alpha \,. \tag{3.23}$$

Na levé straně nyní máme veličinu

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} \cdot \vec{v}_\alpha \;=\; \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} \cdot \vec{v}_\alpha \;=\; \frac{dT}{dt} \,, \tag{3.24}$$

kde

$$T \;=\; \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2 \tag{3.25}$$

představuje *celkovou kinetickou energii soustavy částic.* Pravou stranu (**??**) upravíme na

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(i)} \cdot \vec{v}_\alpha \;+\; \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(e)} \cdot \vec{v}_\alpha \;=\; \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(i)} \cdot \vec{v}_\alpha \;+\; Q^{(e)} \,. \tag{3.26}$$

Symbolem $Q^{(e)}$ jsme označili *výkon vnějších sil.* Jsou-li vnitřní síly konzervativní, lze zavést *potenciální energii soustavy částic* $U(x,\ y,\ z)$ tak, že

$$\vec{F}_\alpha^{(i)} \;=\; -\,\nabla_\alpha U \;=\; -\,\left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha},\ \frac{\partial U}{\partial y_\alpha},\ \frac{\partial U}{\partial z_\alpha}\right) \;=\; -\,\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha} \,. \tag{3.27}$$

Potom na pravé straně (**??**) stojí

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(i)} \cdot \vec{v}_\alpha \;+\; Q^{(e)} \;=\; -\,\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \;+\; Q^{(e)} \;=\; -\,\frac{dU}{dt} \;+\; Q^{(e)} \,. \tag{3.28}$$

Označíme-li *celkovou energii soustavy částic* $E \;=\; T + U$, dostáváme **větu o energii soustavy částic**

$$\frac{dE}{dt} \;=\; Q^{(e)} \,, \tag{3.29}$$

tj. **časová změna celkové energie soustavy částic je rovna celkovému výkonu vnějších sil**. Je-li soustava částic izolovaná, je výkon vnějších sil nulový, a platí **zákon zachování celkové energie izolované soustavy částic**:

$$E \;=\; T \;+\; U \;=\; \text{konst} \;; \tag{3.30}$$

celková energie izolované soustavy částic se zachovává.

Přejděme k vztažné soustavě S', jejíž počátek se pohybuje v původní inerciální soustavě S obecnou rychlostí $\vec{V}(t)$, při čemž osy souřadnic si zachovávají svou orientaci. Kinetickou energii soustavy částic pak budeme transformovat do nové soustavy souřadnic takto:

$$T \;=\; \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2 \;=\; \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} (\vec{v}'_\alpha + \vec{V})^2 \;=$$

$$= \frac{1}{2}M\,V^2 \;+\; \vec{V}\cdot\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}'_\alpha \;+\; \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{v}'^2_\alpha \;=\; \frac{1}{2}M\,V^2 \;+\; \vec{V}\cdot\vec{P}' \;+\; T' \,. \tag{3.31}$$

Je-li soustava S' těžišťová, bude $\vec{P}' = \vec{0}$ a dostáváme

$$T \;=\; \frac{1}{2}M\,V^2 \;+\; T' \,, \tag{3.32}$$

tj. **kinetická energie soustavy částic je rovna součtu kinetické energie jejího těžiště a vnitřní kinetické energie (tj. kinetické energie v těžišťové vztažné soustavě)**. To je obsahem tzv. **Königovy věty**. Je-li soustava částic izolovaná, bude její celková energie dána součtem kinetické energie těžiště a celkové *vnitřní energie*, tj. kinetické a potenciální energie v těžišťové soustavě.

3.1.4 Deset zákonů zachování v izolované soustavě částic

Při studiu izolované soustavy částic jsme zjistili, že při jejím pohybu se zachovává deset skalárních veličin: [6]

3 souřadnice vektoru celkové hybnosti $\vec{P}$

3 souřadnice vektoru rychlosti těžiště $\vec{V}$

3 souřadnice vektoru celkového momentu hybnosti $\vec{L}$

1 skalární veličina celkové energie E.

Těchto deset konstant představuje vlastně integrály pohybu dané počátečními podmínkami a jejich znalost nám usnadňuje integrování pohybových rovnic soustavy částic.

V teoretické fyzice se dokazuje, že tyto konstanty souvisejí s vlastnostmi symetrie prostoru a času, a sice

zákon zachování celkové hybnosti s homogenitou prostoru (symetrie vůči translaci v prostoru)

zákon zachování celkového momentu hybnosti s izotropií prostoru (symetrie vůči rotaci v prostoru)

zákon zachování energie s homogenitou času (symetrie vůči translaci v čase)

zákon zachování rychlosti těžiště s Galileiho transformacemi (symetrie vůči přechodu

[6] Připomeňme, že pro jednu bezsilovou (tj. izolovanou) částici se zachovává hybnost, a tedy i rychlost, v poli centrálních sil moment hybnosti vzhledem k centru a v poli konzervativních sil energie.

od jedné inerciální soustavy k druhé). [7]

Ve fyzice elementárních částic se setkáváme i s dalšími symetriemi, jimž odpovídají další zákony zachování (například zákon zachování elektrického náboje). Vztahy mezi symetriemi prostoru a času a zákony zachování zformulovala německá matematička Emmy Noetherová a jsou obsahem takzvaných teorémů Noetherové.

[7] Ve speciální teorii relativity vystupují místo Galileiho transformací obecnější transformace Lorentzovy. S matematického hlediska tvoří množina uvedených deseti transformací desetiparametrickou grupu, které říkáme grupa Galileiho, v relativistické mechanice grupa Poincarého. Teorie grup patří k nejabstraktnějším matematickým disciplinám a zabývá se právě studiem symetrií .

V dalším uvidíme, jak lze zákonů zachování využívat při studiu pohybu izolovaných soustav částic. Jako první krok zpravidla využíváme zákona zachování rychlosti těžiště a přecházíme do těžišťové soustavy souřadnic, která je v tom případě inerciální.

<u>Úloha</u> (pohyb tělesa s proměnnou hmotností)

Dosud jsme vždy předpokládali, že hmotnost částice je konstantní a že změnu její hybnosti můžeme zapsat jako součin hmotnosti a zrychlení. Nemusí tomu být tak vždy a Newtonův zákon síly to nevyžaduje. Můžeme si představit situaci, kdy se hmotnost částice v čase mění podle zadané funkce $m(t)$ a pak dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\,\frac{dm}{dt}\,. \tag{3.33}$$

Není ovšem snadné si fyzikálně představit důvod, proč by se hmotnost takovým způsobem měnila. Komplikovanější situace nastává při relativistickém pohybu částice rychlostí blízkou rychlosti světla, kdy dostáváme pohybovou rovnici

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec{F}\,.$$

Budeme se jí zabývat ve speciální teorii relativity.

Naproti tomu se často vyskytuje pohyb těles, kdy dochází ke změně hmotnosti v důsledku oddělování nebo přibírání dalších těles - výfuku plynů motorových vozidel, vystřelování plynů tryskami při raketovém pohonu, přibírání vzduchu při oxidaci zápalné směsi tryskových letadel, ztrácení nákladu, nastupování a vystupování pasažérů aj. V tomto případě však nejde o pohyb jednoho tělesa, jedné částice s proměnnou hmotností, ale o pohyb soustavy těles a k jeho řešení musíme místo Newtonova zákona síly použít první větu impulsovou. Uvidíme, že tak dostaneme rovnici lišící se od (**??**).

Uvažme například pohyb rakety, která vystřeluje plyny relativní rychlostí $\vec{u}$ (rychlost plynů vůči raketě daná konstrukcí motorů). Určíme změnu celkové hybnosti soustavy raketa + plyn za malou dobu dt. Změna hmotnosti rakety bude přitom záporná, $dm < 0$. Máme tedy

$$d\vec{p} = (\,m - |dm|\,)\,(\,\vec{v} + d\vec{v}\,) + |dm|\,(\,\vec{v} + d\vec{v} + \vec{u}\,) - m\,\vec{v} = m\,d\vec{v} - \vec{u}\,dm\,.$$

Odtud dostáváme podle první věty impulsové rovnici

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\,\frac{dm}{dt} = \vec{F}\,, \tag{3.34}$$

která se nazývá *rovnice Meščerského* a zřejmě se liší od (**??**). Můžeme ji též zapsat ve tvaru

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} - (\,\vec{v} + \vec{u}\,)\,\frac{dm}{dt} = \vec{F}\,. \tag{3.35}$$

Pokud plyny nebo jiná oddělující se tělesa nejsou vystřelovány a jejich relativní rychlost vůči vozidlu je nulová ($\vec{u} = 0$), jako když se z jedoucího auta sype písek nebo obilí, dostáváme rovnici

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \,, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{d(m\vec{v})}{dt} - \vec{v}\,\frac{dm}{dt} = \vec{F} \,, \tag{3.36}$$

která se rovněž liší od (**??**).

Předpokládejme nyní, že výslednice vnějších sil $\vec{F}$ je nulová (raketa se nepohybuje v tíhovém poli) a pohyb probíhá tak, že rychlost plynů má opačný směr než rychlost rakety.[8] Zvolíme-li směr pohybu rakety podél osy x za kladný, má rychlost $\vec{u}$ souřadnice $\vec{u} \equiv (-u,\ 0,\ 0)$. Pak máme ve složkách

$$m\,\frac{dv}{dt} = -u\,\frac{dm}{dt} \,, \qquad \text{neboli} \qquad dv = -u\,\frac{dm}{m} \,. \tag{3.37}$$

Tato slavná rovnice pohybu rakety se nazývá *rovnicí Ciolkovského.* Udává nám, jak se mění rychlost rakety s úbytkem její hmotnosti. V rovnici (**??**) máme již rozděleny proměnné, takže integrací dostáváme okamžitě řešení

$$v = -\,u\,\ln m + C \,. \tag{3.38}$$

Za počátečních podmínek $v = 0,\ m = m_0$ (startovací hmotnost) dostáváme

$$v = u\,\ln\frac{m_0}{m} \,, \qquad m = m_0 \mathrm{e}^{-\frac{v}{u}} \,. \tag{3.39}$$

Z tohoto výsledku plyne důležitý závěr pro konstruktéry raket. Jediný způsob, jak dosáhnout maximální rychlosti rakety je zvýšit relativní rychlost vystřelovaných plynů (nejvýše na rychlost světla u fotonové rakety) a zvolit co největší podíl startovní a konečné hmotnosti. To má ovšem své meze, nakonec musí v raketě zůstat aspoň kosmonaut. Žádná jiná konstrukční zdokonalení raketových motorů konečnou rychlost rakety nezvýší. Závislost rychlosti rakety na její hmotnosti je na obr. 3.2.

[8] Raketa se urychluje; kdyby rychlost plynů měla stejný směr jako rychlost rakety, raketa by se brzdila.

obr. 3.2 obr. 3.3 obr. 3.4

3.2 Úloha dvou těles

Řešení pohybových rovnic soustavy částic není snadné. Ve skutečnosti lze matematicky přesně řešit jen pohyb izolované soustavy dvou částic - říká se tomu *úloha dvou těles* a patří k nejslavnějším fyzikálním úlohám, kterou se fyzikové zabývali po celá staletí. Máme-li dvě částice o hmotnostech $m_1,\ m_2$ a polohových vektorech $\vec{r}_1,\ \vec{r}_2$, musíme řešit soustavu šesti diferenciálních rovnic druhého řádu pro souřadnice polohových vektorů těchto částic a řešení bude záviset na dvanácti integračních konstantách - počátečních polohách a rychlostech obou částic. Zákony zachování nám poskytují deset integračních konstant, integrálů pohybu. Zbývá tedy určit z počátečních podmínek jen dvě konstanty, a ukazuje se, že to jde. Úlohu lze analyticky zintegrovat, najít řešení "v kvadraturách".

V případě tří částic vzniká neméně slavná *úloha tří těles*, kde je třeba určit osmnáct integračních konstant. Po úsilí trvajícím několik staletí se nakonec zjistilo, že úlohu v obecnosti zintegrovat nelze, že deset integrálů pohybu, které máme k dispozici k tomu nestačí a podařilo se najít jen některá speciální řešení. Přitom úloha tří těles má nesmírný praktický význam, bez jejího řešení bychom nemohli zkoumat pohyb soustavy Země - Měsíc - Slunce nebo Země - Měsíc -raketa a nebyla by možná kosmonautika. V minulém století byly k takovým výpočtům vytvořeny (zásluhou Gaussovou a dalších) přibližné, numerické metody, které umožnily určovat poruchy pohybu planet vyvolané vlivem dalších nebeských těles a předpovědět tak i polohu těles dosud neznámých (planetka Ceres, Neptun). Tyto výpočty jsou však pracné a zabírají mnoho času. Proto jednou z nezbytných podmínek moderní kosmonautiky je použití počítačů, které umožňují provádět takové výpočty v reálném čase a korigovat tak i parametry pohybu umělých kosmických těles. Výsledky získané při řešení úlohy tří těles lze najít v monografiích o nebeské mechanice.

Je zřejmé, že není možno analyticky integrovat ani úlohu čtyř a více těles, a teprve u velkého počtu těles, například molekul plynu, můžeme použít statistických metod. Přitom ovšem nesledujeme trajektorie jednotlivých molekul, ale určujeme statisticky střední veličiny. Největší problémy tedy činí úloha o malém počtu těles, jakou představuje například atomové jádro. Zde je problém navíc komplikován tím, že neznáme ani zákon silového působení mezi jednotlivými nukleony. Vraťme se však k řešitelné úloze dvou těles.

Na obr. 3.3 máme znázorněny polohy dvou částic (pod tělesem stále rozumíme částici), které se pohybují pouze pod vlivem vzájemného silového působení, například gravitačního. Okamžitě můžeme využít jeden ze zákonů zachování a zapsat energii této soustavy jako

$$E \;=\; \frac{1}{2}\, m_1\, v_1^2 \;+\; \frac{1}{2}\, m_2\, v_2^2 \;+\; U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)\;. \tag{3.40}$$

Využijeme nyní zákona zachování rychlosti těžiště a zákona zachování celkové hybnosti soustavy k tomu, abychom snížili potřebný počet integračních konstant z dvanácti na šest. Zvolíme počátek soustavy souřadnic v těžišti; také tato vztažná soustava bude inerciální. Pro polohové vektory obou částic máme

$$m_1\, \vec{r}_{1s} \;+\; m_2\, \vec{r}_{2s} \;=\; 0\;, \qquad\qquad \vec{r}_{1s} \;-\; \vec{r}_{2s} \;=\; \vec{r}\;. \tag{3.41}$$

V těžišťové soustavě jsou oba polohové vektory vždy kolineární, částice musí v každém okamžiku ležet na opačných stranách od těžiště (obr. 3.4). Jako $\vec{r}$ jsme označili vektor spojující obě částice; označíme též $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Řešením soustavy rovnic (**??**) dostaneme

$$\vec{r}_{1s} \;=\; \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{r}\;, \qquad \vec{r}_{2s} \;=\; -\;\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{r}\;. \tag{3.42}$$

a pro rychlosti

$$\vec{v}_{1s} \;=\; \vec{v}_1 - \vec{v}_S \;=\; \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v}\;, \quad \vec{v}_{2s} \;=\; \vec{v}_2 - \vec{v}_S \;=\; -\;\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{v}\;. \tag{3.43}$$

Zde

$$\vec{v}_S \;=\; \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} \tag{3.44}$$

představuje rychlost těžiště v původní soustavě.

Energie v těžišťové soustavě (vnitřní energie soustavy) bude opět integrálem pohybu a bude rovna

$$E_s \;=\; \frac{1}{2}m_1\, v_{1s}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2s}^2 + U(r) \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\, v^2 + U(r) \;=\; \frac{1}{2}m_r\, v^2 + U(r)\;. \tag{3.45}$$

Přitom jsme do výrazu pro energii dosadili polohové vektory (**??**) a rychlosti (**??**) a zavedli tzv. *redukovanou hmotnost*

$$m_r \;=\; \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\;.$$

obr. 3.5

Při pohledu na výraz pro energii (**??**) zjišťujeme, že jsme vlastně *převedli úlohu dvou těles na úlohu o pohybu jednoho tělesa o redukované hmotnosti* m_r *pohybujícího se v centrálním silovém poli* $U(r)$. Polohový vektor a rychlost tohoto fiktivního tělesa jsou přitom $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\quad \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Tuto úlohu jsme však už řešili - v případě gravitačních sil šlo o úlohu Keplerovu. Můžeme tedy použít výsledku Keplerovy úlohy a chceme-li přejít k původní inerciální vztažné soustavě S, stačí přetransformovat rychlosti podle vztahů

$$\vec{v}_1 \;=\; \vec{v}_{1s} \;+\; \vec{v}_S \quad , \qquad \vec{v}_2 \;=\; \vec{v}_{2s} \;+\; \vec{v}_S \; . \tag{3.46}$$

V úloze dvou těles můžeme rozlišit dva důležité případy:

1. Jedno z těles je mnohem těžší než druhé, $m_1 \gg m_2$. Potom je redukovaná hmotnost $m_r \approx m_2$ přibližně rovna hmotnosti lehčího tělesa. V limitě dostáváme případ nehybného Slunce a planety obíhající kolem něj nebo Země a umělé družice. Těžiště soustavy zůstává přitom nehybné v blízkosti středu těžkého tělesa. Přesně vzato však např. Slunce nezůstává nehybné a koná složité periodické pohyby kolem těžiště sluneční soustavy, na nichž je patrný zejména vliv velkých planet, Jupiteru a Saturnu. Situace připomíná pohyb vrhače sportovního kladiva, který při roztáčení kladiva musí vykonávat sám malé kruhové pohyby. Na obr. 3.5 je znázorněn pohyb dvou těles, z nichž jedno je poloviční hmotnosti než druhé a která obíhají po přibližně kruhových trajektoriích.

2. Obě tělesa jsou stejně těžká, $m_1 = m_2 = m$, takže redukovaná hmotnost je rovna poloviční hmotnosti tělesa: $m_r = \frac{1}{2}m$. To může být případ dvojhvězdy o dvou stejných složkách. Podobná situace je na obr. 3.6. Budou-li tělesa stejně těžká a bude-li vzdálenost mezi nimi zůstávat konstantní ($r =$ konst), budou se vzájemně "honit" po obvodu kružnice.

obr. 3.6

Víme, že uzavřená trajektorie může existovat jen v případě gravitační přitažlivé síly přesně úměrné převrácenému čtverci vzdálenosti (a v případě prostorového oscilátoru). Působí-li na těleso další poruchy, dojde ke stáčení perihelia a pohyb dvojhvězdy pak probíhá podobně jako na obr. 3.7.

Na obrázcích 3.8 a 3.9 jsou znázorněny trajektorie dvou těles, z nichž jedno je poloviční hmotnosti než druhé a která na sebe působí přitažlivými silami úměrnými $1/r^{2,5}$ (obr. 3.8) a $r^{1,5}$ (obr. 3.9). [9]

Vraťme se ještě ke Keplerově úloze a uvažme, jak se změní její řešení pro pohyb planet, vzdáme-li se Keplerova předpokladu, že Slunce je nehybné a spojíme-li počátek inerciální vztažné soustavy s těžištěm sluneční soustavy. Třetí Keplerův zákon jsme psali ve tvaru (2.126) jako

$$T \;=\; 2\pi \sqrt{\frac{m_p}{\alpha}}\; a^{3/2}\;.$$

Zde m_p představuje hmotnost planety a interakční konstanta $\alpha = \kappa m_p M_S$. Nyní musíme hmotnost planety ovšem nahradit redukovanou hmotností

$$m_r \;=\; \frac{m_p M_S}{m_p + M_S}\;,$$

[9] Tyto a další situace odpovídající různým zákonům silového působení a různým počátečním podmínkám si můžete snadno simulovat na počítači například pomocí programu Famulus.

obr. 3.7

obr. 3.8

obr. 3.9

zatímco interakční konstanta se nemění. Tak dostáváme třetí Keplerův zákon

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\kappa(m_p + M_S)}}\, a^{3/2} . \tag{3.47}$$

Vidíme tedy, že platí úměrnost mezi čtverci oběžných dob a třetími mocninami velkých poloos, ale konstanta úměrnosti je pro každou planetu trochu jiná. Podotkněme ještě, že jsme tento jev využili v úloze o určení hmotnosti Měsíce (vztah (2.142)).

3.3 Srážky částic a ráz těles

3.3.1 Pružné srážky

Důležitým fyzikálním jevem, se kterým se setkáváme nejen v mechanice, ale i v atomové, jaderné a částicové fyzice, jsou srážky částic. Jde-li o srážku těles konečných rozměrů, mluvíme o rázu těles. Srážku můžeme chápat jako *časově a prostorově omezenou interakci částic, při níž dochází k přerozdělování hybnosti a energie.* Před srážkou se částice pohybovaly odděleně, nepůsobily na sebe, a pak se dostaly do interakční oblasti vzájemného více či méně intenzivního působení. Studium srážek částic slouží k tomu, abychom určili zákony vzájemného silového působení mezi částicemi. Dnes k tomu slouží obrovské urychlovače, které patří k největším experimentálním zařízením, která byla kdy vytvořena.

Charakter srážek může být velmi rozmanitý a můžeme je klasifikovat podle nejrůznějších hledisek. Nejdůležitější je rozlišování srážek *pružných* a *nepružných.* [10] Při srážce předpokládáme,že částice tvoří izolovanou soustavu a že v ní platí zákony zachování hybnosti a energie. Při pružné srážce působí pouze konzervativní síly a zachovává se mechanická, kinetická energie částic před srážkou a po srážce.Při nepružné srážce se v izolované soustavě sice také zachovává celková energie soustavy, ale část mechanické energie se může změnit ve vnitřní nebo deformační energii částic a těles. Předpokládáme přitom, že částice mají nějakou vnitřní strukturu, jako například atom nebo makroskopické těleso. Typicky nepružnou srážkou je srážka dvou automobilů, ale nepružnou může být i srážka elektronu s atomem nebo neutronu s atomovým jádrem. Pružnou srážku můžeme dobře demonstrovat při dopadu ocelové kuličky na skleněnou destičku nepružnou při dopadu na olověnou destičku.

Dochází-li ke srážce pouze dvou částic, mluvíme o srážce *binární*, srazí-li se více částic nebo automobilů najednou, jde o srážku *kolektivní.* Nastává-li srážka až při těsném sblížení částic, jako třeba při rázu dvou kulečníkových koulí, jde o srážku *blízkou*, působí-li částice či tělesa na sebe na dálku gravitačními nebo elektrickými silami, jde o srážku *dalekou.* U dalekých srážek je někdy obtížné určit, co se má ještě za srážku považovat. Přibližuje-li se kometa ke Slunci, změní svůj směr a opět se vzdálí, jde vlastně také o pružnou dalekou srážku, i když obě tělesa do sebe nenarazila. Otázka matematického popisu kolektivních

[10] Rozlišení pružných a nepružných srážek koulí provedl poprvé český vědec Jan Marcus Marci v roce 1639.

obr. 3.10 obr. 3.11

dalekých srážek má velký význam ve fyzice plazmatu, kde na sebe současně působí velké množství elektricky nabitých částic.

Ještě větší rozmanitost nastává při *rázu těles*. Zde ovšem záleží na tvaru tělesa, umístění jeho těžiště, vlastnostech povrchu, způsobu nárazu. Je-li povrch srážejících se těles dokonale hladký, uplatní se při rázu jen síly ve směru normály k povrchu. U drsných těles je situace mnohem složitější a tělesa mohou být při rázu uvedena do rotace. Pak je výpočet pohybu takových těles po rázu velmi obtížný. V praxi známe tuto situaci ze sportu, kdy například hráči stolního tenisu nebo kulečníku záměrně udělují míčku nebo kouli "faleš" a ztěžují tak soupeři odhad jejich pohybu.

V bodě dotyku těles při rázu můžeme vést společnou tečnou rovinu obou těles a k ní normálu. Leží-li spojnice těžišť obou těles na této normále, nazýváme takový ráz *středovým*, není-li tomu tak, jde o ráz *výstředný*. Nejčastěji se studuje ráz dokonale hladkých koulí; takový ráz je středovým vždy. Přitom však můžeme rozlišovat ráz *přímý* a *šikmý*. U přímého rázu obr. 3.10 leží vektor vzájemné rychlosti obou koulí na společné normále v bodě dotyku; naproti tomu u šikmého rázu je vzájemná rychlost od této normály odchýlena (obr.3.11). V těžišťové soustavě se koule při přímém rázu pohybují před rázem i po něm v téže přímce, při šikmém rázu se tato přímka po rázu pootočí.

Všimněme si nyní binární pružné srážky dvou částic, jejíž průběh je obdobný jako u pružného rázu dvou koulí. Jde přitom vlastně o jiný pohled na úlohu dvou těles. Budeme předpokládat, že neznáme zákon síly, jíž na sebe obě částice působí a máme k dispozici pouze zákony zachování celkové hybnosti a celkové kinetické energie. Nechť se částice m_1, m_2 blíží rychlostmi $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ do interakčního prostoru a vylétají z něho rychlostmi $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$ (obr. 3.12).

Co se děje v interakčním prostoru nevíme, je to pro nás černá skříňka. Přesto však můžeme na základě zákonů zachování soudit na vztahu mezi rychlostmi před srážkou a po srážce. Především musí zůstávat neměnná rychlost těžiště této soustavy částic; ta je dána výrazem (**??**). Od směru této rychlosti můžeme udávat úhly θ_1, θ_2, o které se odkloní částice po srážce; říkáme jim *úhly rozptylu v laboratorní soustavě*. Někdy nastává srážka tak, že letící částice m_1 narazí na nehybnou částici m_2. Ta se pak nazývá terčem. Jinak

obr. 3.12 obr. 3.13

můžeme tuto situaci vyjádřit tím způsobem, že přejdeme z laboratorní vztažné soustavy S do terčové soustavy S_2 (obr. 3.13). Potom nazýváme úhel θ_1 *úhlem rozptylu*, úhel θ_2 *úhlem zpětného rázu* a jejich součet *úhlem rozletu.*

Naším úkolem je najít rychlosti částic po srážce, známe-li rychlosti částic před srážkou. K tomu účelu je nejvýhodnější přejít do těžišťové soustavy pomocí vztahů (**??**). Pro celkovou hybnost a kinetickou energii soustavy před srážkou máme

$$m_1\vec{v}_{1s} \; + \; m_2\vec{v}_{2s} \; = \; 0$$

$$m_1 v_{1s}^2 \; + \; m_2 v_{2s}^2 \; = \; m_1 \, \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \, v^2 \; + \; m_2 \, \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \, v^2 \; = \; m_r \, v^2 \; = \; \mathrm{konst}\,. \tag{3.48}$$

Stejné zákony zachování ovšem platí i pro rychlosti po srážce. Z první rovnice (**??**) plyne, že částice se budou v těžišťové soustavě pohybovat před srážkou proti sobě po jedné přímce (a srazí se v těžišti) a po srážce se budou opět pohybovat od sebe po jedné přímce; tyto přímky však nemusí být totožné. Úhel χ, o který se linie srážky po srážce pootočí, se nazývá *úhel rozptylu v těžišťové soustavě* (obr. 3.14).

Řešením rovnic (**??**) pro rychlosti *po* srážce dostaneme pro ně stejné výrazy jako (**??**) pouze pohyb bude probíhat podél jiné přímky, jejíž jednotkový směrový vektor označíme $\vec{n}$. Máme tak

$$\vec{v}'_{1s} \; = \; \frac{m_2}{m_1+m_2} \, v \, \vec{n} \quad , \qquad \vec{v}'_{2s} \; = \; - \; \frac{m_1}{m_1+m_2} \, v \, \vec{n} \,. \tag{3.49}$$

Tím jsme našli rychlosti částic po srážce s jedinou neurčitostí v úhlu rozptylu χ. Zákony zachování nám neumožňují tento úhel určit. Chceme-li pak přejít k laboratorní vztažné soustavě, stačí prostě spočítat

$$\vec{v}'_1 \; = \; \vec{v}'_{1s} \; + \; \vec{v}_S \quad , \qquad \vec{v}'_2 \; = \; \vec{v}'_{2s} \; + \; \vec{v}_S \,. \tag{3.50}$$

obr. 3.14

Úplné řešení jsme dostali pro případ *přímé srážky (přímého rázu koulí)*, kdy se částice pohybují před srážkou i po ní ve stejné přímce a v opačném směru (úhel rozptylu $\chi = \pi$!). Pak můžeme psát

$$\vec{v}_1' = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v} + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v} + \vec{v}_2 = \frac{(m_1-m_2)\,\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{v}_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{v} + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{2m_1}{m_1+m_2} + \vec{v}_2 = \frac{(m_2-m_1)\,\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2}\,. \tag{3.51}$$

Výsledné řešení je samozřejmě symetrické vzhledem k výměně indexů 1 a 2. Rovnice (**??**) popisují obecný případ přímé pružné srážky a je z nich možno odvodit výsledky pro mnoho speciálních případů (těžší částice narazí na lehčí, lehčí na těžší, jedna z částic je nehybná, částice se pohybují v protisměru, částice se pohybují v témž směru, lehčí částice dohání těžší, těžší dohání lehčí apod.). Laskavý čtenář si tyto případy jistě s potěšením rozebere. Zejména je z těchto rovnic patrno, že budou-li hmotnosti obou částic (koulí) stejné, při srážce si prostě vymění rychlosti. Všimneme si ještě situace, kdy jedna z částic byla před srážkou v klidu. Potom $\vec{v}_2 = \vec{0}$ a máme

$$\vec{v}_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v}_1 \quad , \qquad \vec{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\,v_1\,. \tag{3.52}$$

Budou-li přitom ještě částice stejně těžké, letící částice se po srážce zastaví a stojící převezme její rychlost. Tento experiment lze snadno demonstrovat u rázu dvou pružných koulí.

Zajímavá je ještě otázka po účinnosti předání energie od jedné částice k druhé. Představme si, že máme dvě částice různých hmotností, z nichž jedna stojí a druhá na ní nalétává. Určíme, jaká část kinetické energie se předá od letící částice nehybné:

$$T_2' = \frac{1}{2}\, m_2\, v_2'^2 = \frac{1}{2}\, \frac{4m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\, v_1^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\, T_1 = \eta T_1\,. \tag{3.53}$$

Koeficient η představuje podíl převzaté a původní energie. Budou-li obě částice stejně těžké, bude předána celá energie letící částice. Bude-li rozdíl hmotností obou částic velký, bude předána malá část energie, lhostejno zda lehká částice naráží na těžkou (pingpongový míček na olověnou kouli) nebo těžká částice na lehkou (olověná koule na pingpongový míček). Studium účinnosti předání energie při pružných srážkách je důležité například v jaderné fyzice. Neutronové záření je možno v látce účinně zbrzdit, budou-li se neutrony pružně srážet s částicemi málo se lišící hmotnosti (protony, deuterony apod.). Proto se jako moderátorů (zpomalovačů neutronů) v jaderných reaktorech využívá vody, těžké vody, grafitu apod. Naproti tomu těžké kovy, jako např. olovo, jejichž atomová jádra jsou mnohem těžší než neutrony, slouží k pohlcování záření gama, ale k ochraně před neutronovým zářením se nehodí.

Zmiňovali jsme se o tom, že zákony zachování nám dovolily řešit pouze případ přímé srážky a a u šikmé srážky úhel rozptylu v těžišťové soustavě zůstává neurčen. Přesto však můžeme získat o vztazích mezi úhly rozptylu v těžišťové a laboratorní soustavě ještě další informace pomocí tzv. *srážkových diagramů*. Při konstrukci těchto diagramů vycházíme z toho, že redukovaná hmotnost a velikost vzájemné rychlosti částic zůstávají konstantní. Místo rychlostí částic pracujeme přitom s jejich hybnostmi. Opíšeme kružnici poloměru $p_0 = m_r v$ a jejím středem vedeme přímku směrem vektoru $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$, tj. směrem pohybu těžiště v laboratorní soustavě. Od této přímky odečteme neznámý úhel rozptylu v těžišťové soustavě χ a vyznačíme tak na obvodu kružnice bod C (viz obr. 3.15).

Ukazuje se, že na přímce $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ lze vyznačit body A, B tak, aby vektor AC odpovídal hybnosti $\vec{p}_1'$ vektor CB hybnosti $\vec{p}_2'$. Vektor OC přitom odpovídá $\vec{p}_0 = m_r v \vec{n}$. Je totiž

$$\vec{p}_1' = m_1 \vec{v}_1' = m_1 \vec{v}_{1s}' + m_1 \vec{v}_S = \vec{p}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}\,(\,\vec{p}_1 + \vec{p}_2\,) = \vec{p}_0 + AO$$

$$\vec{p}_2' = m_2 \vec{v}_2' = m_2 \vec{v}_{2s}' + m_2 \vec{v}_S = -\,\vec{p}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,(\,\vec{p}_1 + \vec{p}_2\,) = -\,\vec{p}_0 + OB\,.$$

Na obr. 3.15 jsou vyznačeny i úhly rozptylu v laboratorní soustavě θ_1 , θ_2.

Tento obecný srážkový diagram se zjednoduší, bude-li částice 2 před srážkou nehybná, tj. $\vec{p}_2 = \vec{0}$. Snadno si ověříme, že v tom případě bude bod B ležet na kružnici diagramu. Dále je zřejmé, že poměr délek

$$\frac{AO}{OB} = \frac{m_1}{m_2} = \gamma$$

udává poměr hmotností obou částic. Pak můžeme diskutovat tři různé případy:

obr. 3.15

obr. 3.16

obr. 3.17

obr. 3.18

1. $\gamma < 1$, lehčí částice nalétává na těžší, obr. 3.16.

Bod A leží uvnitř kružnice. Bude-li bod C probíhat po celé kružnici bude úhel rozptylu θ_1 nabývat všech možných hodnot, částice se může rozptýlit pod libovolným úhlem. Závislost úhlu θ_1 na χ je jednoznačná. Zároveň platí $\theta_1+\theta_2 > \pi/2$, úhel rozletu je větší než pravý.

2. $\gamma = 1$, obě částice jsou stejně těžké, obr. 3.17.

Bod A leží na kružnici. Potom platí $\theta_1 = \chi/2$ a $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, částice se po srážce rozletí pod pravým úhlem. Tento jev je možno jednoduše odvodit a experimentálně ověřit na rázu dvou hladkých koulí, z nichž jedna je v klidu a druhá na ni šikmo nalétává.

3. $\gamma > 1$, těžší částice nalétává na lehčí, obr. 3.18.

Bod A leží vně kružnice. Probíhá-li bod C po celé kružnici, může úhel θ_1 nabývat pouze hodnot vymezených maximálním úhlem θ_{1max}, pro nějž platí

$$\sin\theta_{1max} \;=\; \frac{p_0}{AO} \;=\; \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{m_1+m_2}{m_1^2} \;=\; \frac{m_2}{m_1} \;=\; \frac{1}{\gamma}\;.$$

Nalétávající částice se tedy nemůže rozptýlit pod velkými úhly nazpět a úhel rozletu je menší než pravý, $\theta_1+\theta_2 < \pi/2$. Závislost úhlu χ na θ_1 není jednoznačná, jednomu úhlu θ_1 mohou odpovídat dva různé úhly χ. Zaregistrujeme-li tedy v laboratorní soustavě částice rozptýlené pod úhlem θ_1, zahrnují tyto částice dvě skupiny, které se rozptýlily v těžišťové soustavě pod dvěma různými úhly χ a mají různé velikosti rychlosti a různou kinetickou energii.

Zatímco teoreticky je výhodnější pracovat v soustavě těžišťové, experimenty pochopitelně probíhají v soustavě laboratorní a získané výsledky je třeba porovnávat. Srážkové diagramy nám pak poslouží k přepočítávání úhlů rozptylu χ na úhly rozptylu θ_1, θ_2 a naopak. Na obr. 3.19 máme zvětšený trojúhelník ABC s vyznačenými délkami stran. Určíme-li úhel rozptylu v těžišťové soustavě χ, můžeme odtud určit úhly rozptylu a energie rozptýlených částic v laboratorní soustavě a naopak.

Protože jde o snadné, čistě geometrické výpočty, uvedeme jen výsledky:

$$\mathrm{tg}\;\theta_1 \;=\; \frac{\sin\chi}{\gamma+\cos\chi} \quad , \qquad \theta_2 \;=\; \frac{\pi-\chi}{2}$$

$$\cos\chi \;=\; -\gamma\;\sin^2\theta_1\;\pm\cos\theta_1\;\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\theta_1}$$

$$v_1' \;=\; \frac{v}{m_1+m_2}\;\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1 m_2\cos\chi} \quad , \qquad v_2' \;=\; \frac{2m_1 v}{m_1+m_2}\;\sin\frac{\chi}{2}\;.$$

Nyní můžeme upřesnit podíl energie předávané letící částicí částici nehybné, není-li srážka přímá, ale šikmá. Dostáváme

$$T_2' \;=\; \frac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\;\sin^2\frac{\chi}{2}\;T_1\;.$$

obr. 3.19

V případě přímé srážky je $\chi = \pi$ a dostaneme (**??**).

3.3.2 Pružný rozptyl částic

Abychom mohli přesně předpovědět výsledek srážky, tj. stanovit pod jakým úhlem se částice rozptýlí, museli bychom znát zákon síly, kterou na sebe částice působí. Víme, že jde v podstatě o řešení úlohy dvou těles, která na sebe působí konzervativními silami. Budeme samozřejmě řešit úlohu v těžišťové soustavě, tj. předpokládat, že nalétající částice má redukovanou hmotnost a rozptylové centrum je v inerciální vztažné soustavě nehybné. Při řešení úlohy dvou těles vystupují dvě konstanty, dva integrály pohybu - energie E a velikost momentu hybnosti l. V úloze o rozptylu zavádíme jiné dvě konstanty, které s E a l jednoznačně souvisí. Jde o tzv. *asymptotickou rychlost* v_∞, tj. velikost rychlosti nalétající částice před srážkou a tzv. *srážkový parametr* ρ, tj. vzdálenost přímky (asymptoty), po níž se částice ve velké vzdálenosti pohybuje, od osy srážky procházející silovým centrem (viz obr. 3.20). [11]

[11] Úloha o rozptylu má velkou důležitost v mnoha oblastech fyziky, zejména atomové, jaderné a částicové, protože umožňuje experimentálně zkoumat silové působení mezi částicemi. V těchto případech je ovšem třeba počítat rozptyl na základě zákonů kvantové mechaniky.

Mezi těmito konstantami platí vztahy

$$E \;=\; \frac{1}{2}\, m_r\, v_\infty^2 \;, \quad l \;=\; m_r\, \rho\, v_\infty \;.$$

Naším úkolem tedy je určit úhel rozptylu v těžišťové soustavě χ, známe-li sílu, resp. potenciální energii vzájemného působení částic $U(r)$ a naopak. Ke srovnání výsledku s experimentem bude pak třeba přepočítat úhly rozptylu do laboratorní soustavy, což může být pracné, ale není to principiální záležitost. Bude-li terčová částice mnohem těžší než částice nalétávající, budou těžišťová a laboratorní soustavy prakticky totožné.

obr. 3.20

Budeme postupovat následovně. Řešením úlohy dvou těles získáme rovnici trajektorie částice v polárních souřadnicích; polární úhel φ měříme opět od směru do bodu největšího přiblížení částice centru, periheliu. Potom asymptotický polární úhel částice pohybující se v nekonečnu je φ_∞. Působí-li mezi částicemi odpudivá síla, bude z důvodu symetrie trajektorie platit

$$\chi \;=\; \pi \;-\; 2\varphi_\infty \tag{3.54}$$

(viz obr. 3.20).

Uvedeme dva nejdůležitější případy pružného rozptylu - rozptyl na tvrdé kuličce (*izotropní rozptyl*) a rozptyl v coulombovském, resp. newtonovském poli (*Rutherfordův rozptyl*).

Rozptyl na tvrdé kuličce poloměru a (obr. 2.20) lze popsat potenciální energií $U(r) = \infty$ pro $r \leq a$ a $U = 0$ pro $r > a$. Znamená to, že pokud částice nalétá na tvrdou kuličku s parametrem $\rho > a$, proletí mimo a nebude silově nijak ovlivněna. Je-li parametr $\rho < a$, bude působit nekonečně velká síla ve směru kolmém k povrchu kuličky a nedovolí částici proniknout do oblasti $r < a$. Částice se tedy odrazí od povrchu kuličky podle zákona odrazu; úhly dopadu a odrazu jsou rovny φ_∞. [12] Závislost mezi srážkovým parametrem a úhlem rozptylu pak dostaneme snadno jako

$$\rho \;=\; a\; \sin\varphi_\infty \;=\; a\; \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}\right) \;=\; a\; \cos\frac{\chi}{2}\;. \tag{3.55}$$

Rozptyl nalétávající částice alfa na atomech zlata studoval E. Rutherford při svém slavném pokusu, který vedl k objevu atomového jádra. Jde o dvě elektricky kladně nabité částice, které se odpuzují silou nepřímo úměrnou čtverci vzdálenosti (obr. 3.21). Výsledek pokusu by se však příliš nezměnil, kdyby částice měly opačné znaménko nábojů nebo kdyby šlo o rozptyl částic působících gravitačními přitažlivými silami (obr. 3.22). V případě přitažlivé síly by místo (**??**) platilo

[12] Ve skutečně se při takové pružné srážce koule poněkud deformuje, ale tento proces je vratný. Po odpružení získá dopadající částice svou energii zpět.

obr. 3.21

obr. 3.22

$$\chi \;=\; 2\varphi_\infty \;-\; \pi\;. \tag{3.56}$$

Víme, že v obou případech bude pohyb probíhat po větvích hyperboly.

Použijeme rovnici trajektorie (2.121)

$$\varphi \;=\; \arccos\frac{\pm 1+\frac{p}{r}}{e} \;=\; \arccos\frac{\pm 1+\frac{l^2}{\alpha m_r}\frac{1}{r}}{\sqrt{1+\frac{2El^2}{m_r\alpha^2}}}\;, \tag{3.57}$$

kde horní znaménko odpovídá síle odpudivé, dolní síle přitažlivé.

Asymptotický polární úhel nyní dostaneme, budeme-li limitovat $r\to\infty$:

$$\varphi_\infty \;=\; \arccos\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\frac{2El^2}{m_r\ \alpha^2}}} \;=\; \arccos\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\left(\ \frac{m_r\ \rho\ v_\infty^2}{\alpha}\ \right)^2}}\;,$$

odkud

$$\cos\varphi_\infty \;=\; \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{m_r\ \rho\ v_\infty^2}{\alpha}\right)^2}}\;,\quad \mathrm{tg}\ \varphi_\infty \;=\; \pm\frac{m_r\ \rho\ v_\infty^2}{\alpha}\;.$$

Protože $\varphi_\infty = \frac{\pi}{2}\mp\frac{\chi}{2}$, máme

$$\mathrm{tg}\ \varphi_\infty \;=\; \mathrm{tg}\ \left(\ \frac{\pi}{2}\ \mp\ \frac{\chi}{2}\ \right) \;=\; \pm\mathrm{cotg}\ \frac{\chi}{2} \;=\; \pm\frac{m_r\ \rho\ v_\infty^2}{\alpha}\;.$$

obr. 3.23

Dostáváme tedy výsledek

$$\rho \;=\; \frac{\alpha}{m_r\; v_\infty^2}\;\mathrm{cotg}\,\frac{\chi}{2}\;. \tag{3.58}$$

Všimněte si, že funkce $\rho(\chi)$ je klesající. To znamená, že čím větší srážkový parametr, čím větší vzdálenost v níž částice nabíhá, tím méně se bude při srážce odklánět.

Ve skutečnosti nikdy neexperimentujeme s jednou částicí, ale při studiu rozptylu vysíláme celý svazek částic. Předpokládejme, že tento svazek byl zkolimován a je monoenergetický, tj. že částice letí po rovnoběžných přímkách stejnou rychlostí. Kromě toho nechť hustota toku částic n, tj. počet částic, které proletí za jednotku času jednotkou průřezu svazku, je konstantní (obr.3.23).

Pak zavádíme důležitou měřitelnou veličinu nazývanou *diferenciální srážkový průřez* rozptylu a označujeme jej $d\sigma$. Je to poměr počtu částic dN, které se rozptýlí za jednotku času v rozmezí úhlů $\chi \;-\; (\chi + d\chi)$ k hustotě toku částic n; tato veličina má zřejmě rozměr plochy a můžeme si ji představovat jako symbolickou plošku terčíku. [13] Z obr. 3.23 je vidět, že v udaném rozmezí úhlů se rozptýlí právě ty částice, které se pohybují v rozmezí srážkového parametru $\rho \;-\; (\rho + d\rho)$, tedy vytínají v průřezu svazku mezikruží s těmito poloměry. Máme tedy

$$d\sigma \;=\; \frac{dN}{n} \;=\; 2\pi\;\rho\;d\rho = 2\pi\;\rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|\;d\chi\;. \tag{3.59}$$

Absolutní hodnota derivace $d\rho/d\chi$ byla zvolena proto, abychom dostali kladnou veličinu $d\sigma$. Obyčejně vyjadřujeme $d\sigma$ nikoli vzhledem k intervalu úhlů $d\chi$, ale vzhledem k prostorovému úhlu $d\Omega$. Je-li svazek osově symetrický, představuje tento element prostorového úhlu rozmezí směrů mezi dvěma kuželi s vrcholovými úhly $\chi\;\;\chi + d\chi$. Přitom

$$d\Omega \;=\; 2\pi\;\sin\chi\;d\chi\;.$$

Určíme nyní srážkové průřezy izotropního a Rutherfordova rozptylu.

[13] Diferenciální srážkový průřez může charakterizovat pravděpodobnost i jakýchkoli dalších reakcí, které s částicemi nastanou a má ve fyzice velmi obecné použití.

Pro **izotropní rozptyl** máme podle (??)

$$d\sigma \;=\; 2\pi\;\rho\;\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\chi \;=\; \pi\;a^2\;\cos\frac{\chi}{2}\;\sin\frac{\chi}{2} \;=\; \frac{1}{2}\;\pi\;a^2\;\sin\chi\;d\chi \;=\; \frac{1}{4}\;a^2\;d\Omega\,. \qquad (3.60)$$

Vidíme, že izotropní rozptyl nezávisí na směru (proto se tak jmenuje), počet rozptýlených částic závisí jen na velikosti prostorového úhlu. Mohli bychom zintegrovat diferenciální srážkový průřez přes plný prostorový úhel a určit celkový počet částic, které se na tvrdé kuličce rozptýlí v poměru k hustotě dopadajícího toku. Integrální srážkový průřez pak je

$$\sigma \;=\; \int_\Omega d\sigma \;=\; \frac{1}{4}\;a^2\;\int_\Omega d\Omega \;=\; \pi\;a^2\,. \qquad (3.61)$$

Je to tedy prostě průřez kuličky.

Trochu složitější výpočet vyžaduje diferenciální srážkový průřez **Rutherfordova rozptylu**. Použijeme (??) a máme

$$d\sigma \;=\; 2\pi\,\rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\chi \;=\; 2\pi\left(\frac{\alpha}{m_r\;v_\infty^2}\right)^2 \operatorname{cotg}\frac{\chi}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{d\chi}{\sin^2\frac{\chi}{2}} \;=\; \left(\frac{\alpha}{2m_r\;v_\infty^2}\right)^2\,\frac{2\pi\;\sin\chi\;d\chi}{\sin^4\frac{\chi}{2}} \;=$$

$$=\;\left(\frac{\alpha}{2m_r\;v_\infty^2}\right)^2\,\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}}\,. \qquad (3.62)$$

To je slavný **Rutherfordův vzorec**. Aplikujeme-li jej na rozptyl částice alfa o náboji $2e$ na atomovém jádře o náboji Ze, dostaneme

$$d\sigma \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{Ze^2}{E}\right)^2\,\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}}\,. \qquad (3.63)$$

.

Jak vidíme, rozptyl velmi silně závisí na úhlu χ. Kdybychom se pokusili najít celkový, integrální průřez rozptylu, dostali bychom nekonečnou hodnotu. To souvisí s dalekým působením sil nepřímo úměrných převrácenému čtverci vzdálenosti, i při velmi velkých hodnotách parametru se částice nepatrně odchyluje. Pak je ovšem třeba vzít v úvahu stínící účinek ostatních částic.

3.3.3 Nepružné srážky

Při nepružných srážkách se část mechanické (kinetické) energie částic (těles) mění nevratně na jiné formy energie - vnitřní tepelnou energii, energii plastické deformace apod. Dobře známe takové nepružné srážky automobilů. Při srážkách atomů se může část kinetické energie přeměnit na excitační energii atomu, ten může přejít do vybuzeného stavu a po čase tuto energii vyzářit v podobě kvanta elektromagnetického záření. [14] Omezíme se

[14] K tomu je ovšem třeba podle kvantové fyziky určité rezonanční podmínky - energie se může pohlcovat jen v energetických kvantech odpovídajících vzdálenosti energetických hladin atomu. Pružné a nepružné srážky atomů lze dobře studovat při tzv. Franckově - Hertzově pokusu.

a b c

obr. 3.24

však na přímý ráz dvou koulí, který může být buď dokonale pružný, částečně pružný nebo dokonale nepružný.

Narazí-li na sebe dvě koule dokonale pružným přímým rázem, budou se deformovat, na jejich styku vznikne postupně se zvětšující rovinná ploška až do maximálního přiblížení středů obou koulí. Kinetická energie se přitom mění v energii elastickou, energii konzervativních pružných sil. Pak se začnou středy koulí opět vzdalovat, elastická energie se začne zpětně měnit v kinetickou energii a koule od sebe opět odskočí. [15] Při takové srážce nezáleží na poloměru obou koulí; v limitě můžeme předpokládat, že rovina je koule o nekonečném poloměru a studovat pružné srážky podle dopadu a odrazu malé kuličky na rovinnou plochu.

Na obr. 3.24 a je znázorněn časový průběh síly působící na takovou kuličku při dokonale pružném rázu. Vidíme, že síla mířící proti směru dopadu kuličky nejdříve rychle vzrůstá a při odpružování opět klesá, při čemž tato časová závislost je symetrická. Plocha vyčárkované oblasti I je rovna hybnosti částice - při pružném dopadu na rovinu (ocelové kuličky na skleněnou desku) se hybnost částice změní na opačnou.

Ve skutečnosti ráz není nikdy dokonale pružný a při odrazu kulička již nezíská svou původní hybnost (obr. 3.24 b). Při dokonale nepružném rázu (ocelová kulička na olověný plech, ráz dvou koulí z plastelíny) se obě tělesa po rázu spojí a pohybují se dále jako jedno těleso, případně je-li jedno z nich nehybná deska, nedojde k odrazu (obr. 3.24 c).

Stupeň pružnosti při srážce udáváme tzv. *koeficientem restituce k*. Je dán podílem relativních rychlostí částic po srážce a před srážkou:

$$k = \frac{v_1' - v_2'}{v_2 - v_1} \,. \tag{3.64}$$

[15] Matematický výpočet průběhu tohoto procesu je znám jako tzv. Hertzova kontaktní úloha, která se řeší v teorii pružnosti. Úloha je nazvána podle Heinricha Hertze, na rozdíl od Gustava Hertze, který je spoluautortem Franckova - Hertzova pokusu.

Dopadá-li těleso z výšky h na nehybnou podložku a po odrazu vystoupí do výšky h', můžeme koeficient restituce určit jako

$$k = -\frac{v_1'}{v_1} = \sqrt{\frac{h'}{h}} \qquad (3.65)$$

(rychlosti v_1 a v_1' mají opačná znaménka). Koeficient restituce můžeme také stanovit z impulsů síly při přímém (I_1) a zpětném (I_2) pohybu tělesa (poměru ploch II a I na obr. 3.24). Po dobu kontaktu mají tělesa společnou rychlost v, takže

$$I_1 = m_1 (v - v_1) , \quad I_2 = m_1 (v_1' - v) , \quad -I_1 = m_2 (v - v_2) , \quad -I_2 = m_2 (v_2' - v)$$

a vyloučíme-li odtud m_1, m_2 a v, dostaneme

$$k = \frac{I_2}{I_1} . \qquad (3.66)$$

Hodnotu koeficientu restituce určujeme ovšem experimentálně (sklo na sklo $k = 0,94$, ocel na ocel $k = 0,93$, slonovina na ocel $k = 0,86$, pryž na mramor $k = 0,82$ apod.). Pro dokonale pružný ráz je $k = 1$, pro dokonale nepružný $k = 0$. Musíme mít též na paměti, že koeficient restituce není konstantní a že při malých rychlostech nárazu se blíží jedné.

Příklady

3.1 Je dána soustava tří hmotných bodů o hmotnostech m_1 =1 kg, $m_2 = 2$ kg a $m_3 = 3$ kg a jejich polohové vektory jako funkce času:

$$\vec{r}_1 = (2t,\ 4t,\ 5) , \quad \vec{r}_2 = (t^2 + 2,\ 1,\ 0) , \quad \vec{r}_3 = (1,\ t^2 + 2,\ 0).$$

Údaje jsou v metrech a sekundách. Určete výslednici vnějších sil a výsledný moment vnějších sil vzhledem k počátku souřadnic.

[$\vec{F} = (4,\ 6,\ 0)$ N , $\vec{L} = (0,\ 0,\ 2)$ N.m]

3.2 Dvě loďky plují proti sobě rovnoběžným směrem. Když se setkají, vymění si pytle s pašovaným zbožím o stejných hmotnostech $m = 50$ kg. Následkem toho se první loďka zastaví a druhá se pohybuje dál rychlostí $v = 8,5$ m.s^{-1} v původním směru. Jaké jsou rychlosti loděk v_1 , v_2 před výměnou pytlů, jsou li hmotnosti loděk m_1 =500 kg, m_2 =1 000 kg?

[1 m.s^{-1} , $-$ 9 m.s^{-1}]

3.3 Tři loďky stejné hmotnosti M jedou za sebou stejnou rychlostí v. Ze střední loďky byla rychlostí u vzhledem k této loďce vyhozena ve stejnou dobu dvě závaží téže hmotnosti m do přední a zadní loďky. Jaké jsou rychlosti loděk v_1 , v_2 , v_3 po přehození závaží?

obr. 3.25 obr. 3.26

$$[v_{1,3} = \frac{Mv+m(v\pm u)}{M+m}\ , \quad v_2 = v]$$

3.4 Granát, který byl v klidu, se při explozi rozdělil na dvě části o hmotnostech m a $4m$. Část o hmotnosti m odletěla s kinetickou energií 100 J. Určete celkovou uvolněnou kinetickou energii.

[125 J]

3.5 Střela hmotnosti m =10 g byla vystřelena do dřevěného bloku hmotnosti M =2 kg ležícího na dřevěné podložce a uvízla v něm (obr. 3.25). Přitom jej posunula o 25 cm. Součinitel smykového tření bloku o podložku je $f = 0,2$. Určete práci síly tření, rychlost střely před nárazem a dobu pohybu bloku.

[0,985 J, 199 m.s^{-1}, 0,505 s]

3.6 **Balistické kyvadlo**. Na obr. 3.26 je balistické kyvadlo tvořené bedničkou s pískem hmotnosti M na závěsu délky l, které se používá k určování rychlosti střely. Určete rychlost střely hmotnosti m, která při nárazu do balistického kyvadla jej vychýlí o úhel α, jestliže
a) střela po nárazu v bedničce uvízne
b) střela po nárazu odskočí zpět rychlostí v_0
c) střela po nárazu ztratí rychlost a spadne dolů.

$$[v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}\ , \quad v = \frac{M}{m}\sqrt{\qquad\qquad} - v_0\ , \quad v = \frac{M}{m}\sqrt{\qquad\qquad}]$$

3.7 Stanovte zrychlení a rychlost vozíku, působí-li na něj stálá vodorovná síla velikosti F, a je-li na vozíku písek, který vypadává otvorem v podlaze. Za jednotku času se vysype μ písku. V čase $t = 0$ byla rychlost vozíku rovna nule, hmotnost vozíku s pískem M.

$$[a = \frac{F}{M-\mu t}\ , \quad v = \frac{F}{\mu}\ \ln\frac{M}{M-\mu t}]$$

3.8 Dvě koule o hmotnostech m_1 =0,5 kg a m_2 =1 kg pohybující se proti sobě rychlostmi $v_1 = 5$ m.s^{-1} a $v_2 = 8$ m.s^{-1} se nepružně srazí. Určete, jak velká mechanická energie se přitom přemění na energii jiného druhu (tepelnou, akustickou atd).

[1,5 J]

3.9 Dvě koule o hmotnostech m_1 a m_2 se pohybují proti sobě a srazí se. Srážka je dokonale nepružná. Před srážkou byly kinetické energie koulí v poměru $T_1/T_2 = 20$. Za jaké podmínky se budou koule po srážce pohybovat ve směru původního pohybu druhé koule?

[$m_2/m_1 > 20$]

3.10 Dvě koule o hmotnostech $m_1 = 5$ kg a $m_2 = 3$ kg se pohybují proti sobě po téže přímce rychlostmi $v_1 = 12$ cm.s^{-1}, $v_2 = 4$ cm.s^{-1} a přímo na sebe narazí. Určete jejich rychlosti po srážce, je-li ráz a) dokonale pružný, b) dokonale nepružný.

[a) 6 cm.s^{-1}, 14 cm.s^{-1} , b) 9 cm.s^{-1}]

3.11 Dvě ocelové kuličky jsou zavěšeny na nitích tak, že když se dotýkají, jsou jejich středy ve vzdálenosti l =1 m od bodů závěsu a nitě jsou svislé. Hmotnosti kuliček jsou $m_1 = 800$ g a $m_2 = 200$ g.
a) Lehčí kuličku vychýlíme o úhel 90^0 a pustíme. Ráz kuliček je dokonale pružný. Určete výšky h_1 , h_2, do kterých vystoupí kuličky.

[$h_1 = \frac{4m_2^2 l}{(m_1+m_2)^2} = 16$ cm , $h_2 = \frac{(m_2-m_1)^2 l}{(m_1+m_2)^2} = 36$ cm]

b) Co se stane, vychýlíme-li těžší kuličku o 90^0 a pustíme?

[Těžší kulička vystoupí do výšky 36 cm, menší opíše celou kružnici.]

c) Při jakém poměru hmotností kuliček budou výšky výstupu obou kuliček po rázu stejné?

[3:1]

3.12 Dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2 se nacházejí na ose x, první v počátku, druhá ve vzdálenosti l od počátku. V okamžiku $t = 0$ se začnou k sobě přibližovat působením vzájemné konstantní přitažlivé síly $\vec{F}$. Kdy a kde se srazí a jakou rychlostí?

[$t = \sqrt{\frac{2m_1 m_2 l}{(m_1+m_2)F}}$, v těžišti , $v = \sqrt{\frac{2(m_1+m_2)Fl}{m_1 m_2}}$]

3.13 Jak se změní situace v předchozím příkladě, budou-li se částice přitahovat gravitačními silami?

[bodové částice se srazí opět v těžišti nekonečnou rychlostí;

půjde-li o koule s poloměry r_1, r_2, srazí se rychlostí $v = \sqrt{\frac{2\kappa(m_1+m_2)(l-r_1-r_2)}{r_1+r_2}}$]