5. MECHANIKA KONTINUA

5.1 Mechanika pružného tělesa

5.1.1 Matematický popis pohybu kontinua

Uváděli jsme, že dokonale tuhá tělesa neexistují, že je to jen ideální fyzikální model. Ve skutečně lze každé těleso deformovat; přitom vzájemné vzdálenosti hmotných bodů tvořících těleso nezůstávají stejné. Protože těleso může být tvořeno velkým počtem hmotných bodů, má taková mechanická soustava nekonečný počet stupňů volnosti a vyžaduje jiný matematický popis než soustavy s konečným počtem stupňů volnosti. Její pohyb popisují parciální diferenciální rovnice.

Omezíme se pouze na malé deformace těles vyvolané působením vnějších sil. Přestanou-li tyto vnější síly působit, těleso se opět vrací do původního stavu. V takovém případě nazýváme těleso *pružným, elastickým.* [1]

Existují i *pevná tělesa* jiných vlastností - jestliže je těleso tvárné a po deformaci zůstává ve výsledném stavu, nazýváme je *plastickým.* Je-li deformace příliš velká, může dojít k porušení spojitosti tělesa, *dislokaci.* [2] Reálná tělesa se obyčejně chovají v některých podmínkách jako pružná, v jiných jako plastická a mohou mít i další mechanické vlastnosti, jimiž se zde nebudeme zabývat. Podotkněme jen, že studium mechanických vlastností materiálů má obrovský význam pro moderní techniku a vedle fyzikální teorie elasticity se přitom uplatňuje i teorie plasticity, teorie dislokací, lomová mechanika a další obory.

Pružné těleso jako zvláštní případ pevného tělesa budeme považovat za spojité, kontinuální. Vedle pevných látek však známe i jiná spojitá prostředí tvořená například *kapalinami* nebo *plyny.* Na rozdíl od pružných těles kapaliny mění snadno svůj tvar, zaujímají tvar nádoby, ale málo mění svůj objem (jsou málo stlačitelné). Plyny pak se vyznačují velkou stlačitelností a snaží se zaplnit vždy celý objem, který mají k dispozici. Kapaliny a plyny zahrnujeme pod společný název *tekutiny.* Přes tyto rozdíly můžeme všechny tyto případy zahrnout pod jeden pojem *kontinua* a popisovat je jednotným matematickým způsobem. Charakter kontinua, spojitého prostředí, má i *pole*, například elektromagnetické či gravitační. Přestože teorie relativity a kvantová fyzika ukázala na některé zásadní rozdíly mezi polem a látkovým prostředím, má i matematický popis polí společné rysy s popisem kontinua.

V mechanice kontinua nám tedy půjde o

1. pružná tělesa

2. tekutiny

- **a) kapaliny**
- **b) plyny**

[1] Ani dokonale pružná tělesa neexistují. Po deformaci se těleso již nikdy nevrací do původního stavu, malá zbytková deformace vždy zůstává.

[2] Rozlišení těles na pružná, plastická a křehká provedl poprvé v 17. století český vědec Jan Marek Marci.

obr. 5.1 obr. 5.2

Ke studiu pohybu kontinua lze v zásadě použít dvě metody. Můžeme rozdělit kontinuum na jednotlivé hmotné body (elementy objemu) a sledovat jejich pohyb - to je **metoda Lagrangeova**. Můžeme se se ale také zaměřit na jednotlivé body prostoru a sledovat pohyb střídajících se hmotných bodů kontinua, které do těchto bodů prostoru vstupují; to je **metoda Eulerova**. Můžeme si představit, že Lagrange a Euler zkoumají pohyb vody v řece. Lagrange přitom hází do vody plovoucí tělíska, běží po břehu a sleduje jejich pohyb. Euler naproti tomu sedí na břehu řeky a mapuje rychlost vody v jednotlivých místech. Při studiu pohybu pružného tělesa, kdy se hmotné body příliš nevzdalují ze svých poloh, je zřejmě výhodnější metoda Lagrangeova, při zkoumání pohybu tekutin může být výhodnější metoda Eulerova.

Přejdeme nyní k matematickému popisu deformace a pohybu kontinua. Na obr. 5.1 máme dva blízké hmotné body tvořící kontinuum $A,\ B$ s polohovými vektory $\vec{r},\ \ \vec{r}+d\vec{r}$. Při deformaci se bod A přesune o vektor $\vec{\eta}$ [3], kterému říkáme *vektor posunutí*, a zaujme novou polohu $\vec{r}'$. Bod B se posune o $\vec{\eta}+d\vec{\eta}$ bude mít polohový vektor $\vec{r}'+d\vec{r}'$.

Vyjádříme nové polohové vektory bodů $A',\ B'$ ve složkách:

$$A':\quad x'_i \ = \ x_i+\eta_i, \qquad B':\quad x'_i+dx'_i = x_i+dx_i+\eta_i+d\eta_i\ .$$

[3]Často označovaný též $\vec{u}$.

Vektor posunutí $\vec{\eta}$ je obecně v každém bodě tělesa různý, je funkcí souřadnic. Vyjádříme nyní posunutí bodu B nekonečně blízkého k bodu A a využijeme přitom Einsteinova sumačního pravidla:

$$\eta_i(x_j + dx_j) \;=\; \eta_i(x_j) \;+\; d\eta_i \;=\; \eta_i(x_j) \;+\; \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} dx_j \;=$$

$$= \eta_i \;+\; \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right) \;+\; \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \;-\; \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j \tag{5.1}$$

(přičetli jsme a zároveň odečetli $\partial \eta_j / \partial x_i$).

Posunutí bodu B lze tedy rozložit na tři části. První z nich, η_i je zřejmě stejná jako posunutí bodu A a jde tedy o společnou *translaci* obou bodů. Lze ukázat, že třetí část vyjadřuje pootočení bodu B kolem bodu A beze změny vzdálenosti mezi nimi, tedy *rotaci.*

Antisymetrický tenzor

$$\varphi_{ij} \;=\; \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \;-\; \frac{\partial \eta_j}{x_i} \right)$$

lze vyjádřit pomocí axiálního vektoru φ_i, kterému se říká duální, vztahem

$$\varphi_{ij} \;=\; -\varepsilon_{ijk} \varphi_k$$

(ε_{ijk} je Levi-Civitův tenzor). Potom

$$\varphi_{ij} dx_j \;=\; -\varepsilon_{ijk} \varphi_k dx_j \;=\; \varepsilon_{ijk} \varphi_j dx_k \;=\; (\vec{\varphi} \times d\vec{r})_i \;,$$

kde $\vec{\varphi}$ je vektor malého úhlu pootočení.

Protože ani první ani třetí člen (**??**) nemění vzdálenost mezi body A a B, musí deformaci vyjadřovat člen druhý. Příslušný symetrický tenzor

$$e_{ij} \;=\; \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \;+\; \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right) \tag{5.2}$$

proto nazveme *tenzorem malých deformací.*

Pro posunutí bodu B v blízkosti bodu A tedy máme

$$\eta_i(x_j + dx_j) \;=\; \eta_i(x_j) \;+\; \varepsilon_{ijk} \varphi_j dx_k \;+\; e_{ij} dx_j \tag{5.3}$$

a označíme-li rychlosti translace, rotace a deformace $v_i,\ \omega_i,\ \dot{e}_{ij}$, dostaneme rychlost bodu B

$$v_i(x_j + dx_j) \;=\; v_i(x_j) \;+\; \varepsilon_{ijk} \omega_j dx_k \;+\; \dot{e}_{ij} dx_j \;. \tag{5.4}$$

V blízkém okolí daného bodu lze pohyb kontinua rozložit na pohyb translační, rotační a deformační.

Uvedené tvrzení se někdy nazývá *Helmholtzova věta.*

5.1.2 Tenzor malých deformací

Všimneme si nyní blíže vlastností tenzoru malých deformací (??). Především určíme, jak se při deformaci změní vzdálenost bodů A a B. S přesností prvního řádu dostaneme

$$dl'^2 - dl^2 = dx_i' dx_i' - dx_i dx_i = (dx_i + d\eta_i)(dx_i + d\eta_i) - dx_i dx_i \approx d\eta_i dx_i + d\eta_i dx_i \approx$$

$$\approx \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} dx_k dx_i + \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} dx_j dx_i = \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right) dx_j dx_k = 2\, e_{jk}\, dx_j\, dx_k \,,$$

neboť sčítací index si můžeme označit jak potřebujeme (pokud není už v daném členu použit).

Vyjádříme nyní **relativní změnu vzdálenosti** bodů A a B, opět v přiblížení malých deformací, kdy $dl' \approx dl$:

$$\frac{dl'^2 - dl^2}{dl^2} = \frac{dl' + dl}{dl} \frac{dl' - dl}{dl} \approx 2 \frac{dl' - dl}{dl} = 2\, e_{jk} \frac{dx_j}{dl} \frac{dx_k}{dl} \,.$$

Uvažme nyní, že bod B se přiblíží nebo vzdálí od bodu A ve směru osy x. Potom relativní změna jejich vzdálenosti (prodloužení nebo zkrácení) bude

$$\frac{dl' - dl}{dl} = e_{11} \,. \tag{5.5}$$

Diagonální prvky tenzoru malých deformací mají tedy názorný fyzikální význam - představují **relativní prodloužení nebo zkrácení ve směru souřadných os.**

Vedle čistého zkrácení nebo prodloužení vzdálenosti dvou bodů může v okolí bodu A dojít i k *deformaci smykové*. Máme-li v blízkosti bodu A body B a C ležící na osách x a y, takže úsečky AB, AC svírají před deformací pravý úhel, může se stát, že po deformaci se tento pravý úhel změní a tyto úsečky budou svírat s osami x a y malé smykové úhly α_1, α_2. Lze dokázat [4], že nediagonální prvky tenzoru malých deformací e_{ij}, $i \neq j$ jsou právě rovny polovinám příslušných smykových úhlů.

Důležitou charakteristikou tenzoru, invariantem, je jeho stopa, součet diagonálních prvků. Ukážeme, že stopa tenzoru malých deformací je rovna relativní změně objemu při deformaci. Mějme objem ve tvaru kvádru o stranách l_1, l_2, l_3, $V = l_1 l_2 l_3$, ležících v souřadných osách. Po deformaci se objem kvádru změní na

$$V' = l_1\, (1 + e_{11})\, l_2\, (1 + e_{22})\, l_3\, (1 + e_{33}) \approx V\, (1 + e_{11} + e_{22} + e_{33}) \,,$$

takže relativní změna objemu (tzv. *kubická dilatace*)

$$\theta = \frac{V' - V}{V} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_{ii} = \mathrm{Sp}\, e_{ij} \,. \tag{5.6}$$

Diagonální prvky tenzoru malých deformací vyjadřují tedy relativní prodloužení nebo zkrácení vzdáleností podél souřadných os, nediagonální prvky odpovídají polovičním smykovým úhlům a stopa udává kubickou dilataci. Deformace tělesa může být tvarová, objemová nebo tvarová i objemová. Pokud se mění pouze tvar tělesa beze změny objemu, bude kubická dilatace $\theta = 0$.

[4] Viz například Brdička M.: "Mechanika kontinua", NČSAV Praha 1959

Tenzor malých deformací je symetrický a jako takový může být znázorněn symetrickou kvadratickou plochou, kvadrikou

$$e_{ij}\ x_i\ x_j\ =\ \pm 1\ . \tag{5.7}$$

Takovým kvadrikám se říká *Cauchyho* [5] *kvadriky deformací* .V každém bodě tělesa lze vést tři kolmé směry, *hlavní osy deformací* takové, že tenzor malých deformací má v těchto osách diagonální tvar:

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix} .$$

Diagonální prvky $e_1,\ e_2,\ e_3$ se nazývají *hlavní deformace* a vyjadují zkrácení a prodloužení ve směru hlavních os. Mohou tedy být jak kladné tak záporné. V hlavních osách zapíšeme tedy rovnici Cauchyho kvadriky deformací

$$e_1x^2\ +\ e_2y^2\ +\ e_3z^2\ =\ \pm 1\ . \tag{5.8}$$

Pak můžeme rozlišovat několik případů:

1. $e_1 > 0,\ \ e_2 > 0,\ \ e_3 > 0$ - na pravé straně (**??**) musíme vzít +1, dochází k všestrannému roztažení tělesa

2. $e_1 < 0,\ \ e_2 < 0,\ \ e_3 < 0$ - na pravé straně (**??**) musíme vzít -1, dochází k všestrannému stlačení tělesa
V obou těchto případech představuje Cauchyho kvadrika **trojosý elipsoid**.

3. $e_1 > 0,\ \ e_2 > 0,\ \ e_3 < 0$ - na pravé straně (**??**) můžeme vzít buď +1, pak dostáváme rovnici **jednodílného hyperboloidu**, nebo -1 a máme rovnici **dvojdílného hyperboloidu**. Případ lze samozřejmě obměnit i pro ostatní souřadné osy.

4. $e_1 < 0,\ \ e_2 < 0,\ \ e_3 > 0$ - případ je obdobný předchozímu, pouze oblasti stlačení a roztažení jsou vyměněny.

Třetí případ je znázorněn na obr. 5.2. Ve směrech na dvoudílný hyperboloid dochází ke stlačení tělesa, ve směrech na jednodílný hyperboloid k jeho roztažení. Oba hyperboloidy jsou odděleny asymptotickým kuželem. Deformace ve směrech ležících v této kuželové ploše jsou čistě smykové.

Rovnici Cauchyho kvadriky můžeme normovat tak, aby nám udávala velikost a směr deformace. Nechť r je délka průvodiče k příslušné kvadrice. Potom

$$r\ =\ \sqrt{x_i x_i},\quad \Delta r\ =\ \frac{x_i}{\sqrt{x_i x_i}}\,\Delta x_i$$

a relativní prodloužení

$$\frac{\Delta r}{r}\ =\ \frac{x_i \Delta x_i}{r^2}\ =\ \frac{e_{ij} x_i x_j}{r^2}\ .$$

[5] Čti kóšiho.

(malá deformace ve směru x_i je $\Delta x_i = e_{ij} x_j$). Z rovnice kvadriky pak dostaneme pro relativní prodloužení ve směru průvodiče podle (**??**)

$$\frac{dr}{r} = \pm \frac{1}{r^2} \tag{5.9}$$

Lze ukázat, že směr tohoto prodloužení (zkrácení) je dán směrem normály ke Cauchyho kvadrice.

5.1.3 Tenzor napětí

Zabývejme se nyní silami, které vyvolávají deformaci těles. Tyto síly mohou být *objemové* nebo *plošné*. Objemové síly působí současně na všechny elementy objemu tělesa, pronikají celým tělesem. Typickou objemovou silou je síla tíhová, u elektricky nabitých těles například síla elektrostatická. Zavedeme-li objemovou hustotu síly $\vec{\mathcal{F}}$, můžeme zapsat výslednici objemových sil

$$\vec{F} = \int_V \vec{\mathcal{F}}\, dV, \qquad F_i = \int_V \mathcal{F}_i\, dV \; .$$

Tak se těleso bude deformovat tíhovou silou, je-li například zavěšeno nebo jinak upevněno v tíhovém poli. Objemová hustota tíhové síly pak je $\vec{\mathcal{F}} = \rho \vec{g}$.

Druhým důležitým případem jsou síly plošné, působící na povrch tělesa. Jsou to například síly jimiž působí píst na kapalinu, břemeno zavěšené na konci nosníku nebo moment síly kroutící tyč. Tyto plošné síly můžeme popsat pomocí *vektoru napětí* $\vec{\mathcal{T}}$. Mechanickým napětím rozumíme sílu vztaženou k jednotce plochy. Přitom ovšem záleží na vzájemné orientaci síly a plochy. Působí-li síla ve směru normály k ploše, může vyvíjet tlak nebo tah, působí-li tečně, vyvolává smyk. Obecně tedy můžeme vektor napětí rozdělit na dvě složky, napětí tečné $\vec{T}$ a normálové $\vec{N}$ (viz obr. 5.3).

Mějme tedy malou plošku dS o jednotkovém vektoru normály $\vec{n}$, takže ji můžeme považovat za vektor $d\vec{S} = dS\ \vec{n}$. Abychom vyjádřili napětí v nějakém bodě kontinua, museli bychom v tomto bodě umístit malou plošku, pro každou její orientaci udat sílu, která na ni působí, a tuto sílu pak dělit velikostí plošky. Stačí nám tedy, abychom ke každému vektoru $\vec{n}$ dokázali přiřadit vektor napětí $\vec{\mathcal{T}}$. Bez hlubšího zdůvodňování můžeme usoudit, že mezi složkami obou vektorů bude platit vztah

$$\mathcal{T}_i = \sigma_{ij}\ n_j \; . \tag{5.10}$$

Lze dokázat, že veličiny σ_{ij} tvoří prvky tenzoru, a to tenzoru *symetrického*. Říká se mu *tenzor napětí* a plně nám popisuje působení plošných sil v každém bodě kontinua.

Protože tenzor napětí je symetrický, můžeme jej opět znázornit kvadrikami, jimž se říká Cauchyho kvadriky napětí. Platí o nich totéž co o kvadrikách deformací. Kladné diagonální prvky tenzoru napětí vyjadřují tah, záporné tlak v daném bodě, nediagonální prvky popisují napětí tečná, smyková. Opět lze zavést hlavní osy napětí, v nichž působí pouze tlak nebo tah. Je-li tlak nebo tah všestranný, bude Cauchyho kvadrika elipsoidem. Působí-li například ve směru osy z tlak a ve směru druhých dvou os tah, dostaneme kombinaci dvojdílného a jednodílného hyperboloidu oddělených kuželem (obr. 5.2).

obr. 5.3

V hlavních osách napětí bude mít tenzor napětí diagonální tvar

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} .$$

Veličinám σ_1, σ_2, σ_3 se říká *hlavní napětí* a jejich zadání plně popisuje rozložení plošných sil v kontinuu.

V tekutinách, kde podle Pascalova zákona působí v každém bodě všestranný tlak p a neeexistují napětí smyková, má tenzor napětí v libovolně orientovaných osách tvar

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} . \tag{5.11}$$

Znaménko minus je voleno proto, že veličina p udává tlak tekutiny, tedy reakční sílu proti vnějším silám napětí.

Odvodíme nyní obecnou rovnici rovnováhy kontinua. Rovnováha zřejmě nastane, bude-li výslednice všech vnějších sil, objemových i plošných, a jejich momentů nulová. Protože musí být v rovnováze jak kontinuum jako celek, tak i jejich dílčí objemy ohraničené dílčími plochami navzájem, musí být nulová výslednice plošných sil na každé uzavřené ploše v kontinuu. Můžeme ji zapsat (ve složkách) jako plošný integrál

$$F_{ip} = \oint_S \mathcal{T}_i dS = \oint_S \sigma_{ij} n_j dS = \oint_S \sigma_{ij} dS_j .$$

Ve vektorové a tenzorové analýze se dokazuje *Gaussova věta*, [6] která umožňuje přejít od plošného integrálu přes uzavřenou plochu k objemovému integrálu přes objem touto plochou ohraničenému. Pro vektory můžeme tuto větu zapsat ve tvaru [7]

$$\oint_S F_i dS_i \;=\; \int_V \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\, dV$$

a pro tenzory

$$\oint_S \sigma_{ij} dS_j \;=\; \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\, dV \,.$$

Vyjádříme nyní výslednici všech, objemových i plošných sil pomocí jediného objemového integrálu a položíme ji rovnu nule:

$$F_{ip} \;+\; F_{io} \;=\; \oint_S \sigma_{ij} dS_j \;+\; \int_V \mathcal{F}_i dV \;=\; \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \;+\; \mathcal{F}_i \right) dV \;=\; 0\,. \tag{5.12}$$

To je podmínka rovnováhy kontinua v integrálním tvaru. Měli bychom ještě zkoumat podmínku nulové výslednice momentu vnějších sil. Ukáže se však, že ta bude pro plošné síly automaticky splněna díky tomu, že tenzor napětí je symetrický. Stačí pak uvažovat jen síly objemové. Protože podmínka rovnováhy (**??**) musí platit pro libovolný objem kontinua, musí být nulová i integrovaná funkce a tak dostanema parciální diferenciální *rovnici rovnováhy kontinua* ve tvaru

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \;+\; \mathcal{F}_i \;=\; 0\,. \tag{5.13}$$

Abychom našli jednoznačné řešení této rovnice, musíme ovšem znát i okrajové podmínky.

Pro tekutinu v tíhovém poli přejde tato obecná rovnice rovnováhy na

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} \;=\; \rho\, g_i \tag{5.14}$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\nabla p \;=\; \rho\, \vec{g}\,. \tag{5.15}$$

Od rovnice rovnováhy kontinua můžeme přejít i k obecné *pohybové rovnici kontinua* vztaženou k jednotce jeho objemu. Zrychlení jednotky objemu je pak dáno druhou derivací podle času vektoru posunutí:

$$\rho \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} \;=\; \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \;+\; \mathcal{F}_i\,. \tag{5.16}$$

5.1.4 Hookeův zákon

Zavedli jsme dva tenzory, tenzor malých deformací e_{ij} a tenzor napětí σ_{ij}, které popisují deformaci kontinua a rozložení mechanického napětí v něm. Deformace a napětí v kontinuu

[6] V jednoduché podobě jsme se s ní setkali při výpočtu gravitačního pole uvnitř kulové hmoty.

[7] Suma $\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \;=\; \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \;=\; \mathrm{div}\,\vec{F} \;=\; \nabla \cdot \vec{F}$ se nazývá *divergence vektoru* $\vec{F}$, podobně pro tenzor.

obr. 5.4 obr. 5.5

spolu ovšem souvisí. Je-li například těleso vystaveno vnějšímu tlaku nebo tahu, dojde k posunutí jeho jednotlivých částí vzhledem k původnímu, nedeformovanému stavu a ustaví se nová rovnováha mezi vnějšími silami a silami vnitřního napětí v kontinuu.

Uvažujme jednoduchý příklad tenké tyče, která je namáhána například tahem. Její deformaci pak lze popsat jediným prvkem tenzoru malých deformací e_{11} a napětí jako tah podél tyče σ_{11}. Pro malé deformace můžeme očekávat, že deformace bude úměrná napětí:

$$\sigma_{11} \; = \; E \, e_{11} \; . \tag{5.17}$$

To je známý Hookeův zákon v nejjednodušší podobě a konstanta úměrnosti E je *Youngův modul* materiálu v tahu.

Přímá úměrnost mezi deformací a napětím se však udrží jen pro malé deformace a při větších hodnotách se bude tato funkce měnit. Tahový diagram tenké tyče je naznačen na obr. 5.4. Bod A, kde Hookeův zákon přestává platit nazýváme *mez úměrnosti.* Za ní roste napětí pomaleji a od bodu B (*mez kluzu*) pokračuje deformace prakticky při konstantním napětí, materiál jako by tekl. V bodě C (*mez pevnosti*) začíná docházet k porušení tyče. Její příčný průřez se rychle zmenšuje, napětí klesá a tyč se nakonec přetrhne.

Vedle těchto charakteristických bodů je důležitá ještě *mez pružnosti* ohraničující oblast, kdy je deformace ještě vratná. Překročíme-li tuto mez, zůstane při nulovém napětí zbytková deformace a závislost deformace a napětí bude tvořit tzv. *hysterezní křivku* (obr. 5.5).

Obecná závislost mezi deformací a napětím je ovšem značně složitější než u deformace tenké homogenní tyče tahem. V mezích úměrnosti bude Hookeův zákon představovat obecný vztah mezi dvěma tenzory [8]

$$\sigma_{ij} \; = \; C_{ijkl} \, e_{kl} \; , \tag{5.18}$$

kde C_{ijkl} je tenzor čtvrtého řádu tvořený 81 prvky (!), takzvanými elastickými koeficienty. Vzhledem k symetrii tenzorů napětí a deformace je však mnoho z těchto prvků stejných

[8]Předpokládáme, že deformace je homogenní a že koeficienty úměrnosti mezi napětím a deformací nezávisí na souřadnicích

a v nejobecnějším případě deformace krystalů trojklonné soustavy je třeba znát jen 21 elastických koeficientů. Tento počet se dále snižuje s růstem symetrie kontinua. [9] U izotropního kontinua by se zdálo, že vystačíme s jediným elastickým koeficientem. Ukazuje se však, že je obecně třeba udat koeficienty dva, z nichž jeden popisuje deformaci tvarovou a druhý objemovou. Hookeův zákon v izotropním kontinuu (pružném tělese) zní

$$\sigma_{ij} \;=\; \lambda\, \delta_{ij}\, \theta \;+\; 2\mu\, e_{ij}\;. \tag{5.19}$$

Koeficienty λ, μ se nazývají *Laméovy koeficienty*, při čemž první z nich vyjadřuje změnu objemu (θ je kubická dilatace) a druhý, označovaný též jako G, je *modul smyku*. Vedle těchto dvou elastických koeficientů užíváme dále *Youngův modul*, definovaný vztahem

$$E \;=\; \frac{\sigma_{11}}{e_{11}}\;, \tag{5.20}$$

Poissonovu konstantu

$$\sigma \;=\; \left|\frac{e_{22}}{e_{11}}\right| \tag{5.21}$$

(vyjadřuje poměr zúžení a prodloužení tyče) a *modul stlačitelnosti*

$$K \;=\; -\,\frac{p}{\theta} \tag{5.22}$$

(stopa tenzoru deformace je $e_{ii} = \theta$, tenzoru napětí $\sigma_{ii} = -3p$.)

Všechny tyto elastické koeficienty nejsou ovšem nezávislé. Stačí znát jen dva z nich a ostatní jsou tím už určeny. V tabulkách obyčejně najdeme hodnoty Youngova modulu a (bezrozměrnou) Poissonovu konstantu pro daný materiál. Zbylé koeficienty pak určíme ze vztahů

$$\lambda \;=\; \frac{E\,\sigma}{(1+\sigma)\,(1-2\sigma)}\,, \qquad \mu \;=\; \frac{E}{2\,(1+\sigma)}\,, \qquad K \;=\; \frac{E}{3\,(1-2\sigma)}\;. \tag{5.23}$$

V tekutinách, kde neexistují smykové deformace, se situace podstatně zjednoduší, je zde $\mu = 0$, $\;E = 0$, $\;\sigma = 1/2$, $\;K = \lambda$. Stačí tedy znát jen jeden koeficient, stlačitelnost kapaliny nebo plynu. Nezmiňujeme se o tom, že elastické koeficienty závisí též na teplotě a na termodynamických parametrech procesu deformace (jde-li o deformaci pomalou, izotermickou, nebo rychlou, adiabatickou).

Úloha (Deformace svislé tyče v tíhovém poli)

Mějme tyč délky l a průřezu S zavěšenu v tíhovém poli (obr. 5.6). Na každý jednotkový objemový element tyče působí síla $\rho\, g$. Rozdělíme tyč na malé vrstvičky délky dz, z nichž každá se prodlouží o $dl = e_{zz} dz$. Na vrstvičku přitom působí tíha celé části tyče pod ní $\rho\; g\; S\; z$ tj. napětí $\sigma_{zz} = \rho\; g\; z$. Podle Hookeova zákona

$$e_{zz} \;=\; \frac{1}{E}\,\sigma_{zz}\;,$$

[9] Je dobře známo, jak rozdílné mechanické vlastnosti má například dřevo ve směru růstu stromu a kolmo k němu.

obr. 5.6 obr. 5.7

takže celkové prodloužení tyče

$$\Delta l \;=\; \int_0^l e_{zz} dz \;=\; \frac{\rho\, g}{E} \int_0^l z dz \;=\; \frac{\rho\, g\, l^2}{2E}\ .$$

Kdybychom vzali v úvahu konečný průřez tyče a řešili i rovnice pro deformaci ve směru kolmém k tyči, zjistili bychom, že okrajové přímky tyče přestanou být svislými a pro tyč kruhového průřezu dolní podstava přejde v rotační paraboloid.

Úloha (torze kruhové tyče nebo vlákna)

Mějme tyč kruhového průřezu S poloměru R upevněnou dolní podstavou na podložce. Nechť na horní podstavu působí silový moment vyvolávající torzi (kroucení) tyče (obr. 5.7). Máme určit úhel zkrutu tyče. Získaný výsledek lze uplatnit i na případ vlákna zakrucovaného na dolním konci, například u torzních vah.

Umístíme počátek souřadnic ve vybraném kolmém řezu na ose tyče. Při pootočení se bod ve vzdálenosti r od osy posune tak, že $\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$, kde $\delta\vec{r} = (\eta_x, \eta_y, 0)$, $\delta\vec{\varphi} = (0, 0, \varphi), \vec{r} = (x, y, 0)$. Předpokládáme, že kolmé řezy tyče zůstávají během torze rovinnými a že tedy jde o čistě smykovou deformaci - ukazuje se, že to platí za předpokladu, že průřez tyče je kruhový. Označíme úhel zkroucení připadající na jednotku délky tyče jako τ. Potom máme

$$\eta_x \;=\; -\varphi y \;=\; -\tau\; y\; z, \quad \eta_y \;=\; \varphi\; x \;=\; \tau\; x\; z\;.$$

Podle definice tenzoru malých deformací (??)

$$e_{xz} \;=\; e_{zx} \;=\; -\frac{1}{2}\;\tau\; y, \quad e_{yz} \;=\; e_{zy} \;=\; \frac{1}{2}\;\tau\; x\;.$$

Ostatní prvky tenzoru jsou nulové. [10] Dále podle Hookeova zákona pro smyk

$$\sigma_{ij} \;=\; 2\mu\eta_{ij}, \quad \sigma_{xz} \;=\; -\mu\;\tau\; y, \quad \sigma_{yz} \;=\; \mu\;\tau\; x\;.$$

Okrajovou podmínku na horní podstavě můžeme formulovat tak, že zde působí plošný moment síly

$$N_z \;=\; \oint_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} dS_l \;=\; \oint_S (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz}) dS \;=\; \tau\mu \oint_S (x^2+y^2) dS \;=\; \tau\mu \oint_S r^2 2\pi r dr \;=\; \tau\mu \frac{\pi R^4}{2}\;.$$

Celkový úhel zkroucení tyče pak bude

$$\varphi_0 \;=\; \tau l \;=\; \frac{2}{\pi}\frac{N_z\; l}{\mu\; R^4} \;=\; \frac{N_z\; l}{D}\;,$$

kde $D = \frac{\pi}{2}\mu R^4$ se nazývá tuhostí v torzi. Vidíme, že tato tuhost roste s vysokou mocninou poloměru tyče či vlákna a že při zmenšení poloměru vlákna o jeden řád zmenší se potřebný kroutící moment o čtyři řády. Tím je dána mimořádně vysoká citlivost torzních vah.

5.2 Mechanika tekutin

5.2.1 Rovnováha tekutin

Z rovnice rovnováhy tekutin (??), (??), vyplývají známé poznatky hydrostatiky a aerostatiky. Mějme napřed nestlačitelnou kapalinu, v níž $\rho =$ konst. Můžeme-li zanedbat vliv tíhové síly na ni, máme

$$\nabla p \;=\; 0, \quad p \;=\; \text{konst}\;, \tag{5.24}$$

[10] Odpovídá to poznatku, že nediagonální prvky tenzoru malých deformací jsou poloviční smykové úhly.

což je vyjádřením *Pascalova zákona* o tom, že tlak v kapalině je všude stejný. Zvětší-li se tlak v kapalině, například působením pístu na její povrch, vzroste tlak opět v celém objemu kapaliny stejně.

Bude-li působit tíhová síla, poroste tlak kapaliny s hloubkou:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho\, g, \quad p = -\rho\, g\, z + C\,. \tag{5.25}$$

Míří-li osa z vzhůru, odečítáme-li souřadnici z od hladiny a položíme-li tlak na hladině roven nule a hloubku $h = -z$, máme známý výraz pro hydrostatický tlak

$$p = \rho\, g\, h\,. \tag{5.26}$$

Chceme-li zjistit, jak roste tlak atmosféry s výškou, musíme vzít v úvahu, že vzduch je stlačitelná tekutina v tíhovém poli a musíme znát termodynamický vztah mezi jeho hustotou a tlakem $\rho\ (p)$. Pro izotermické děje můžeme vzít Boyleův - Mariotteův zákon

$$\rho = k\, p\,.$$

Pak máme rovnici

$$\frac{dp}{dz} = -\rho\, g = -k\, g\, p, \quad dz = -\frac{1}{kg}\,\frac{dp}{p}\,,$$

$$z = -\frac{1}{kg}\,\ln p + C, \quad p = \text{konst}\ \mathrm{e}^{-kgz}\,.$$

Určíme-li konstantu integrování tak, aby při $z = 0$ byly $p = p_0$, $\rho = \rho_0 = kp_0$ hodnoty tlaku a hustoty atmosféry při mořské hladině, dostáváme takzvaný *barometrický vzorec*

$$p = p_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0}{p_0} gz}\,. \tag{5.27}$$

Ten udává rozložení tlaku vzduchu v atmosféře za předpokladu, že její teplota je všude stejná. Výška atmosféry pak vychází nekonečně velká, s exponenciálně klesajícím tlakem a hustotou. Ve skutečnosti, jak víme, se teplota atmosféry s výškou mění. Vezmeme-li jiný vztah mezi hustotou a tlakem, například rovnici adiabaty $\rho = k\ p^{1/\kappa}$, kde κ je tzv. Poissonova plynová konstanta, dostaneme jiný průběh tlaku a hustoty s výškou, odpovídající lineárnímu poklesu teploty atmosféry s výškou. Taková atmosféra pak končí ve výšce asi 50 km, což dává dobrý souhlas se skutečností.

Z rovnice rovnováhy tekutin dostaneme i známý *Archimedův zákon.* Na vybraný objem v nestlačitelné kapalině působí plošná síla

$$F_{ip} = -\int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV\,.$$

Z rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g\,,$$

a tedy

$$F_{xp} \;=\; F_{yp} \;=\; 0, \qquad F_{zp} \;=\; g \int_V \rho \, dV \; . \tag{5.28}$$

Poslední výraz představuje Archimedův vztlak. Moment plošné síly působící na takový objem nemá složku ve směru z, takže vztlaková síla působí v těžišti tohoto objemu. Moment síly může ovšem těleso pod vodou (ponorku) převrátit.

Úloha (tlak ve středu Země)

Odhadneme tlak ve středu Země za předpokladu, že Země je tvořena nestlačitelnou kapalinou hustoty $5,5.10^3$ kg.m^{-3}. Lze ukázat, že kdybychom ji považovali za pružné těleso, hodnota tohoto tlaku by se příliš nezměnila. Hledaný tlak je způsoben gravitačními silami, které Zemi svírají. Uvnitř zeměkoule roste tato síla s první mocninou vzdálenosti od středu, takže z rovnice rovnováhy kapaliny máme

$$\frac{dp}{dr} \;=\; -\frac{g}{R_Z}\,\rho\, r, \qquad p \;=\; -\frac{g\,\rho}{2R_Z}\, r^2 \;+\; C \; .$$

Položíme-li tlak roven nule na povrchu Země, dostaneme $C = \rho \; g \; R_Z/2$ a tlak ve středu Země

$$p\;(0) \;=\; \frac{1}{2}\,\rho\; g\; R_Z \;=\; 1,7.10^5 \text{ MPa} \; .$$

Výsledek koresponduje s geologickými odhady ($3,5.10^5$ MPa).

Úloha (Newtonovo vědro)

Úlohu setrvačných sil demonstrovat Newton na známém pokusu s rotujícím vědrem. Naplnil vědro vodou, zavěsil je na zakroucený provaz a roztočil. Během rotace se postupně dostala do rotačního pohybu i voda ve vědru a její povrch vytvořil rotační paraboloid. S hlediska inerciální vztažné soustavy je zřejmé, že na vodu působí jednak síla tíhová a jednak síly tření se strany rotujícího vědra. Rotační pohyb se pak předává dalším válcovým vrstvám vody v důsledku jejího vnitřního tření, vazkosti. Protože rychlost pohybu se směrem k ose vědra snižuje, vznikají zde gradienty rychlosti. Tímto způsobem by bylo možno tvar hladiny vody vysvětlit.

Snadněji však vyřešíme úlohu ve vztažné soustavě spojené s rotujícím vědrem. V ní totiž je vědro i voda v klidu, ale působí zde setrvačná, odstředivá síla. Stačí tedy řešit úlohu o rovnováze nehybné kapaliny pod vlivem objemové síly

$$\vec{\mathcal{F}} \;=\; \rho\;(\;\omega^2\; x,\; \omega^2\; y,\; -g\;)\; .$$

Dostaneme

$$\frac{\partial p}{\partial x} \;=\; \rho\,\omega^2\; x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} \;=\; \rho\,\omega^2\; y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} \;=\; -\rho\; g\; .$$

Zintegrujeme tyto rovnice:

$$p \;=\; \rho\,\omega^2 \frac{x^2}{2} + f_1(y,z), \quad p \;=\; \rho\,\omega^2 \frac{y^2}{2} + f_2(x,z), \quad p \;=\; -\rho\; g\; z + f_3(x,y)\; ,$$

obr. 5.8 obr. 5.9

kde $f_1,\ f_2,\ f_3$ jsou neznámé funkce uvedených proměnných. Aby všechna tato vyjádření tlaku p platila současně, musí zřejmě být

$$p \;=\; -\rho\, g\, z \;+\; \frac{1}{2}\,\rho\,\omega^2\ (\ x^2 + y^2\ )\ +\ C\ .$$

Tvar hladiny dostaneme tak, že položíme $p = 0$. Tím získáme rovnici rotačního paraboloidu:

$$z \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{g}\ (\ x^2 + y^2\ )\ +\ C\ .$$

5.2.2 Proudění tekutin

Přejdeme k pohybu kontinua. Tekutiny se mohou v prostoru přemisťovat, proudit. Podobně jako při mechanickém pohybu těles toto proudění může být doprovázeno disipací energie, třením tekutiny o stěny a *vnitřním třením, vazkostí (viskozitou)* tekutiny. Při vnitřním tření se část mechanické energie proudění nevratně mění v energii tepelného pohybu, uplatní se nekonzervativní síly. Přitom se v tekutině objeví tečná, smyková napětí úměrná příčnému gradientu rychlosti. Proudí-li například vazká kapalina trubicí ve směru osy x, bude rozložení rychlostí v kapalině jako na obr. 5.8 - u stěn vznikne nehybná hraniční vrstva, maximální rychlost bude v ose trubice a vektory rychlostí vytvoří parabolický profil.

Tečné napětí působící mezi proudícími vrstvami kapaliny (označíme je τ) pak je

$$\tau \;=\; \eta\,\frac{dv}{dy}\ , \tag{5.29}$$

kde koeficient η se nazývá *dynamická vazkost* kapaliny. Dělíme-li dynamickou vazkost hustotou, dostáváme tzv. *kinematickou vazkost*

$$\nu \;=\; \frac{\eta}{\rho}\ . \tag{5.30}$$

Dynamická vazkost se měří v jednotkách Pa.s a její hodnoty pro různé tekutiny jsou tabelovány. Například pro vodu je $\eta = 0{,}001$ Pa.s, pro glycerin $\eta = 1{,}48$ Pa.s. Vztah (**??**) se nazývá *Newtonův zákon pro vazké napětí* a kapaliny, které se mu podřizují, se nazývají *newtonovskými*. Newtonovskou kapalinou je například voda, která při rotaci ve válcové nádobě vytváří hladinu ve tvaru rotačního paraboloidu. Víme však, že existují i nenewtonovské kapaliny, kde závislost napětí na gradientu rychlosti je jiná. Nenewtonovsky se chová například zmrzlina, asfalt, bahno v močálu a další. Prouděním vazkých tekutin se zabývá obor zvaný *reologie*.[11]

Pokud kapalina neproudí příliš rychle, bude její proudění *laminární*, jednotlivé částice kapaliny se budou pohybovat po křivkách zvaných proudnice a ty pak budou vytvářet proudové trubice. Proudění probíhá jakoby v nezávislých vrstvách, které po sobě kloužou. Při velkých rychlostech se proudění změní v *turbulentní*, objeví se v něm víry, bude chaotické. Nástup turbulentního proudění závisí také na stupni vazkosti kapaliny a průměru trubice, jíž kapalina proudí. Lze zavést bezrozměrné *Reynoldsovo číslo*

$$R = \frac{v\,a}{\nu}\,, \tag{5.31}$$

kde v je rychlost kapaliny, a charakteristický rozměr a ν kinematická vazkost. Je-li zhruba $R < 1\,000$, bude proudění laminární.

Reálná kapalina je tedy obecně vazká a stlačitelná. U některých kapalin však můžeme jejich vazkost zanedbat a použít modelu *ideální kapaliny.* [12] V ideální kapalině se pak uplatňují zákony zachování hmotnosti a a mechanické energie.

Výrazem zákona zachování hmotnosti je *rovnice kontinuity.* Protéká-li kapalina rychlostí v průřezem ΔS, proteče jím za sekundu hmotnost $\Delta m = \rho\ v\ \Delta S$. Jsou-li rychlost a vektor normály k ploše ΔS orientovány pod obecným úhlem, bude průtok hmotnosti $\Delta m = \rho\ \vec{v} \cdot \Delta\vec{S}$. Můžeme tedy zavést hustotu hmotnostního toku, hmotnost protékající jednotkou plochy za jednotku času, jako $\vec{j} = \rho\ \vec{v}$. Vytéká-li nyní kapalina uzavřená v objemu V hraniční plochou, musí se hmotnost vytékající kapaliny rovnat úbytku kapaliny v tomto objemu. Matematicky to můžeme vyjádřit vztahem

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\ dV\,. \tag{5.32}$$

To je vyjádření rovnice kontinuity v integrálním tvaru. Plošný integrál však můžeme upravit podle Gaussovy věty na

$$\oint_S j_i\ dS_i = \int_V \frac{\partial j_i}{\partial x_i} dV\,,$$

a porovnáme-li pak levou a pravou stranu (**??**), dostaneme

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\,, \tag{5.33}$$

nebo, ve vektorovém tvaru,

$$\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\,. \tag{5.34}$$

[11]Různé reologické modely tekutin jsou podrobně probrány v učebnici Kvasnica J. a kol. "Mechanika", Academia, Praha 1988.

[12]Existuje dokonce dokonale ideální kapalina bez vnitřního tření, které říkáme supratekutá. Supratekutost se projevuje například u kapalného helia při teplotách blízkých absolutní nule a její existence vyplývá z kvantové fyziky.

obr. 5.10

To je rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru.

S jednoduchou podobou rovnice kontinuity se setkáváme při proudění kapaliny v trubici. Mějme myšlený objem trubice mezi průřezy $S_1,\ S_2$. Hmotnost kapaliny, která vtéká průřezem S_1 musí zřejmě vytékat objemem S_2, jinak by se v tomto objemu kapalina hromadila jako Cimrmanovi horníci. Pak můžeme rovnici kontinuity zapsat jako

$$\rho_1\ S_1\ v_1\ =\ \rho_2\ S_2\ v_2\ . \tag{5.35}$$

Je-li kapalina navíc nestlačitelná, musí se zachovávat nejen hmotnostní, ale i objemový tok v trubici, takže (obr. 5.9)

$$S_1\ v_1\ =\ S_2\ v_2\ . \tag{5.36}$$

Vidíme, že v zúženém místě pohybuje se nestlačitelná kapalina rychleji. Ne tak proudící lidský dav, který naopak v zúžených místech neracionálně zpomaluje. Dav ovšem představuje kapalinu stlačitelnou a jeho proudění nebývá stacionární, ale mění se v čase.

V ideální nestlačitelné kapalině se zachovává mechanická energie. Vyjadřuje to známá *Bernoulliova rovnice*. Mějme trubici proměnného průřezu, v níž proudí kapalina v tíhovém poli (obr. 5.10). Práci zde koná jednak tíhová síla, jednak plošná síla tlaková. Posune-li se přitom kapalina v průřezu S_1 o vzdálenost ds_1 a totéž množství kapaliny v průřezu S_2 o vzdálenost ds_2, bude přírůstek kinetické energie

$$\frac{1}{2}dm\ v_2^2\ -\ \frac{1}{2}dm\ v_1^2\ =\ (h_1 - h_2)\ g\ dm\ +\ p_1\ S_1\ ds_1\ -\ p_2\ S_2\ ds_2\ .$$

Protože v nestlačitelné kapalině $S_1 ds_1 = S_2 ds_2 = dV, \quad \rho = dm/dV$, máme

$$\frac{1}{2}\rho\ v_2^2\ +\ \rho\ g\ h_2\ +\ p_2\ =\ \frac{1}{2}\rho\ g\ h_1\ +\ p_1\ ,$$

neboli

$$\frac{1}{2}\rho\; g\; h \;\;+\; p \;=\; \text{konst}\,. \tag{5.37}$$

To je Bernoulliova rovnice vyjadřující zákon zachování mechanické energie v jednotce hmotnosti ideální nestlačitelné kapaliny. Je-li tekutina stlačitelná, je třeba vzít v úvahu ještě práci vykonávanou při změně její hustoty.

Vytéká-li kapalina z nádoby otvorem ve stěně v hloubce h pod povrchem, dostaneme z Bernoulliovy rovnice známý Torricelliho vztah pro rychlost výtoku

$$\frac{1}{2}\rho\; v^2 \;=\; \rho\; g\; h, \qquad v \;=\; \sqrt{2h\; g}\,. \tag{5.38}$$

Při řešení úlohy o proudění ideální tekutiny máme za úkol najít závislost hustoty ρ a rychlosti $\vec{v}$ na prostorových souřadnicích a čase. Mohli bychom vyjít z obecné rovnice kontinua (**??**), která ovšem popisuje posunutí jednotlivých částic kontinua. U tekutin je výhodnější použít Eulerovu metodu a sledovat změnu hustoty a rychlosti v daném bodě prostoru. V každém bodě se však bude rychlost měnit jednak v přímé závislosti na čase, ale také v závislosti na pohybu tekutiny v blízkém okolí. Úplnou časovou změnu rychlosti (zrychlení) tedy musíme vyjádřit jako

$$\frac{dv_i}{dt} \;=\; \frac{\partial v_i}{\partial t} \;+\; \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\,\frac{dx_k}{dt} \;=\; \frac{\partial v_i}{\partial t} \;+\; \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\; v_k\,.$$

Tak dostáváme vektorovou *Eulerovu rovnici*

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \;=\; \vec{g} \;-\; \frac{1}{\rho}\;\nabla p\,, \tag{5.39}$$

kterou řešíme spolu s rovnicí kontinuity a termodynamickou stavovou rovnicí udávající vztah mezi ρ p. Soustava těchto tří rovnic je výchozí pro řešení úloh hydrodynamiky ideální tekutiny.

Je-li tekutina vazká, je třeba uvážit i síly vnitřního tření závislé na rychlosti a tak dostaneme tzv. *Navierovu - Stokesovu rovnici*, kterou zde nebudeme uvádět a odkážeme na literaturu. Řešení Navierovy - Stokesovy rovnice pro vazkou kapalinu je obtížné (je to rovnice nelineární) a podařilo se najít řešení jen v některých zjednodušených případech. K nim patří *Stokesův vzorec* udávající sílu, která působí na malou kuličku poloměru r pohybující se malou rychlostí v ve vazké kapalině

$$F \;=\; 6\;\pi\;\eta\;r\;v \tag{5.40}$$

a Poiseuilleův vzorec, který udává objemový průtok vazké kapaliny tenkými trubičkami poloměru r a délky l při tlakovém spádu Δp (například krve v cévách)

$$Q \;=\; \frac{\pi\;\Delta p}{8\;\eta\;l}\;r^4\,. \tag{5.41}$$

Na tomto vztahu je pozoruhodná silná závislost na poloměru trubice, a tedy i obrovský rozdíl při průtoku krve vlásečnicemi a většími cévami při témž tlaku.

5.3 Zvuk

V pružném prostředí a v tekutině jsou částice mezi sebou vázány nebo na sebe působí při srážkách. Tyto vazby způsobují, že oscilace částic se kontinuem přenášejí a dochází k šíření mechanického vlnění. Z velkého bohatství vlnových jevů probíhajících v kontinuu si všimneme jen dvou jednoduchých situací, a to šíření podélného vlnění v tenké pružné tyči a šíření zvuku v tekutině.

Při podélném kmitání dochází ke změnám relativního prodloužení malých úseků tyče, které se šíří podél tyče. Toto relativní prodloužení je

$$\varepsilon \;=\; \frac{\Delta\eta}{\Delta x} \;\rightarrow\; \frac{\partial\eta}{\partial x}$$

a jeho přírůstek

$$d\varepsilon \;=\; \frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\,dx \;=\; \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\,dx\;.$$

Vyvolává je síla rovná podle Hookeova zákona

$$dF \;=\; \Delta S\;E\;d\varepsilon \;=\; \Delta S\;E\;\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\,dx\;.$$

Hmotnost tohoto malého úseku tyče je $dm = \rho\Delta S dx$, takže sílu dF můžeme z Newtonova pohybového zákona vyjádřit jako

$$dF \;=\; a\;dm \;=\; \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\,\rho\;\Delta S\;dx\;.$$

Porovnáme-li nyní obě vyjádření síly dF, dostaneme rovnici

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \;-\; \frac{\rho}{E}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \;=\; 0. \tag{5.42}$$

Snadno se přesvědčíme, že obecná rovnice

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \;-\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \;=\; 0 \tag{5.43}$$

představuje *vlnovou rovnici.* Vyhovuje jí řešení $\eta(x,t)$ rovinné harmonické vlny šířící se podél osy x fázovou rychlostí c. Odtud plyne, že podélné mechanické vlnění se bude šířit podél tyče rychlostí

$$c \;=\; \sqrt{\frac{E}{\rho}}\;, \tag{5.44}$$

kde E je Youngův modul a ρ hustota materiálu tyče.

V tekutinách je situace obdobná. Síla působící kolmo na malý průřez tekutiny ΔS je ovšem rovna

$$dF \;=\; \Delta S\;p\;d\varepsilon$$

a stejným způsobem jako u podélných vln v tyči dostaneme rychlost podélného vlnění v tekutině

$$c \;=\; \sqrt{\frac{p}{\rho}}\;. \tag{5.45}$$

Podélné vlnění v tekutinách v oblastí frekvencí 20 - 20 000 Hz je vnímáno jako zvuk a zabývá se jím akustika. Rychlost šíření (**??**), kterou jsme odvodili, by se ovšem uplatnila za předpokladu, že proces šíření vln je izotermický, že periody vlnění jsou dostatečně dlouhé k tomu, aby se teploty kmitajících částí tekutiny stačily vyrovnávat. Tento předpoklad ovšem splněn není, proces je ve skutečnosti adiabatický. Potom lze rychlost zvuku vyjádřit tzv. *Laplaceovým vzorcem*

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}\,, \tag{5.46}$$

který dobře souhlasí s výsledky experimentu. Konstanta κ je Poissonova plynová konstanta, o které jsme se zmiňovali v souvislosti s barometrickým vzorcem. Ve vzduchu při 20^0 C je rovna 1,402. Rychlost zvuku ve vzduchu za normálních podmínek pak vychází rovna 332 m.s^{-1}, ve vodě 1 485 m.s^{-1}, v železe 5 100 m.s^{-1}.

Příklady

5.1 Kovová tyč délky $l_0 = 1$ m a průřezu $S = 4$ cm^2 je deformována tahem silou $F = 800$ N. Přitom se prodlouží o 10^{-5} m. Určete Youngův modul materiálu tyče a podle tabulek odhadněte, z jakého materiálu by tyč mohla být.

[$E = 2,0.10^{11}$ Pa, ocel]

5.2 Je dán tenzor napětí v určitém bodě pružného tělesa (údaje v Pa):

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} 500 & 500 & 800 \\ 500 & 0 & -780 \\ 800 & -780 & -300 \end{pmatrix}$$

Určete tečné a normálové napětí působící na plošku s normálou $\vec{n} \equiv (1/2,\ 1/2,\ 1/\sqrt{2})$.

[$\vec{\mathcal{T}} = (1\ 066,\ \ -281,\ \ -187)$ Pa, $\quad N = \mathcal{T}_i n_i = 260$ Pa, $\quad T = \sqrt{\mathcal{T}^2 - N^2} = 1\ 087$ Pa]

5.3 V jednom rameni spojených nádob je voda, ve druhém olej. Výška vody nad společným rozhraním obou kapalin je 4,5 cm, oleje 5,0 cm. Určete hustotu oleje (obr. 5.11).

[900 kg.m^{-3}]

5.4 Jakou výslednou silou působí voda na čtvercovou stěnu akvária, je-li délka stěny a ?

[$\frac{1}{2}\rho g a^3$]

obr. 5.11 obr. 5.12

5.5 Jakou výslednou silou působí voda na říční přehradu tvaru lichoběžníka o základnách $z_1 = 10$ m (dolní), $z_2 = 15$ m (horní) a výšce $h = 5$ m. V jaké hloubce leží působiště výsledné síly?

$$[F = \frac{1}{3}\rho g h^2 \left(z_1 + \frac{z_2}{2}\right) = 1,43.10^6 \text{ N}, \quad h_0 = \frac{1}{2}\frac{3z_1+z_2}{2z_1+z_2}h = 3,2 \text{ m}]$$

5.6 *Archimedes.* Na plnou kouli působí ve vzduchu tíhová síla 390 N, na tutéž kouli ponořenou do vody síla 340 N. Jaký je objem koule a z jaké látky je koule zhotovena?

[$5,1$ dm^3, nejspíš ze železa]

5.7 Na koncích nerovnoramenné páky jsou zavěšena dvě homogenní tělesa zhotovená a) z téže látky, b) z různých látek. Ve vzduchu jsou obě tělesa v rovnováze. Zůstane rovnováha zachována, ponoříme-li obě tělesa do nádoby s vodou?

5.8 *Redukce vážení na vakuum.* Předmět o hustotě ρ je na vzduchu vyvážen na rovnoramenných váhách mosazným závažím o hmotnosti m_z. Stanovte skutečnou hmotnost předmětu, je-li hustota mosazi ρ_z a hustota vzduchu v místě a okamžiku vážení ρ_v.

$$[m = m_z \left(1 + \rho_v \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_z}}{1 - \frac{\rho_v}{\rho}}\right) \approx m_z \left[1 + \rho_v \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_z}\right)\right]]$$

5.9 Nádoba na stole je naplněna vodou do výšky h. Dokažte, že voda z každého otvoru ve stěně nádoby dopadá na stůl se stejnou rychlostí a určete ji. V jaké výšce musí být otvor, aby proud vody z něho vytékající dopadl na stůl nejdále od nádoby?

[$\sqrt{2hg},\ h/2$]

5.10 Válcová nádoba je do výšky $h = 70$ cm naplněna vodou. Plocha dna je 600 cm^2. Otvorem ve dně nádoby plochy 1 cm^2 voda vytéká. Za jakou dobu se nádoba vyprázdní do poloviny a za jakou úplně?

[66 s, 225 s]

5.11 Z trysky vodotrysku s průřezem 1,5 cm^2 vystřikuje voda rychlostí 24 m.s^{-1}. Jak velká je rychlost proudu v přívodním potrubí, jehož průřez má obsah 18 cm^2?

[2,0 m.s^{-1}]

5.12 *Pitotova trubice.* Trubici zalomenou do pravého úhlu vložíme do proudící kapaliny (obr. 5.12). Do jaké výšky h_2 vystoupí kapalina v ohnuté trubici, jestliže v rovné trubici vložené do téhož místa vystoupí do výšky h_1 a jestliže rychlost proudící kapaliny v daném místě je v ?

[$h_2 = h_1 + \frac{v^2}{2g}$]

5.13 *Venturiova trubice.* Jak velkou rychlostí proudí voda vodorovnou trubicí s průřezem $S_1 = 15$ cm^2, jestliže v zúženém místě o průřezu $S_2 = 5$ cm^2 se zmenší tlak o 500 Pa ?

[35 cm.s^{-1}]

5.14 Určete tvar rotační nádoby, aby voda vytékající malým otvorem plochy ΔS ve dně klesala rovnoměrně rychlostí v.

[$z = \frac{\pi^2 v^2}{2g\Delta S^2}\ r^4$]

Otázky:

01. Fyzikální veličiny, jejich rozměr a jednotky, rozměrová analýza
02. Kinematika částice, dráha, rychlost a zrychlení přímočarého pohybu
03. Tečné a normálové zrychlení
04. Kinematika kruhového a harmonického pohybu
05. Skládání pohybů, Lissajousovy obrazce
06. Newtonův zákon setrvačnosti, Galileiův princip relativity
07. Newtonův zákon síly, síly pravé, setrvačné, vazbové
08. Hmotnost gravitační a setrvačná
09. Newtonův zákon akce a reakce
10. Impuls síly a změna hybnosti
11. Práce a změna kinetické energie, výkon, síly potenciální, konzervativní a disipativní
12. Řešení pohybových rovnic - síly závislé na čase
13. Řešení pohybových rovnic - síly závislé na rychlosti
14. Řešení pohybových rovnic - síly závislé na poloze, potenciálová jáma a bariéra
15. Netlumený lineární harmonický oscilátor
16. Tlumený oscilátor a jeho režimy
17. Vynucené kmity a rezonance, rezonanční křivky, činitel jakosti
18. Matematické kyvadlo, perioda, napětí závěsu
19. Vrh v homogenním silovém poli
20. Pohyb částice v centrálním silovém poli
21. Newtonův gravitační zákon, určování gravitační konstanty
22. Keplerova úloha a Keplerovy zákony
23. Kosmické rychlosti
24. Prostorový oscilátor
25. Neinerciální vztažná soustava, setrvačné síly
26. První věta impulsová, těžiště soustavy částic
27. Rovnice pohyby rakety
28. Druhá věta impulsová
29. Věta o celkové energii soustavy, věta Königova
30. Úloha dvou těles
31. Pružné srážky a srážkové diagramy
32. Rozptyl izotropní a Rutherfordův
33. Nepružné srážky, koeficient restituce
34. Kinematika tuhého tělesa
35. Tenzor momentu setrvačnosti, Steinerova věta
36. Eulerovy setrvačníkové rovnice
37. Pevná a volná osa rotace
38. Pohyb volného symetrického setrvačníku
39. Pohyb těžkého rychlého symetrického setrvačníku
40. Fyzické kyvadlo
41. Pohyb válce a koule po nakloněné rovině
42. Kinematika kontinua, tenzor deformace
43. Tenzor napětí, Hookeův zákon
44. Torze a torzní váhy
45. Rovnováha tekutin, Pascalův zákon

46. Barometrický vzorec
47. Archimedův zákon
48. Proudění tekutin, rovnice kontinuity
49. Bernoulliova rovnice
50. Mechanické vlnění, zvuk a jeho šíření

Pokyny pro zkoušející

1. Před zahájením zkoušení vysvětlete zkoušenému, že na správnosti jeho odpovědí závisí celá jeho další odborná kariéra, a tedy vlastně celý život. Zdůrazněte mu hned na začátku vážnost situace.

2. Začněte vždy nejtěžší otázkou. Je-li první otázka dostatečně složitá, zkoušený znervozní a nebude schopen odpovídat ani na další, sebelehčí otázky.

3. Ke zkoušenému se chovejte přísně a zdrženlivě, k dalším zkoušejícím naopak vesele a žoviálně. Čas od času se na ně obracejte a jízlivými poznámkami zesměšňujte odpovědi zkoušeného. Chovejte se přitom, jako by v místnosti nebyl.

4. Donuťte zkoušeného, aby při řešení úlohy postupoval vaším způsobem, zejména je-li to způsob neobvyklý. Během řešení doplňujte různá další omezení a předpoklady, dávejte dodatečné otázky a pokyny. Tímto způsobem je možno i jednoduchou úlohu učinit dostatečně obtížnou.

5. Nechte zkoušeného udělat triviální chybu, aby si nad ní lámal hlavu co možná nejdéle. Jestliže hrozí nebezpečí, že na chybu přijde sám, rychle mu ji opravte, dříve než se mu podaří najít správný postup.

6. Když zkoušený začne tonout a neví kudy kam, zívněte a přejděte k další otázce.

7. Čas od času se při zkoušení ptejte: "Copak jste se to neučili na základní škole?"

8. Nedovolte zkoušenému, aby kladl vyjasňující otázky a nikdy neopakujte vlastní vysvětlení nebo tvrzení.

9. Každou chvíli se zkoušeného ptejte, jestli není nervozní.

10. Pokud jsou zkoušející dva, musí se posadit tak, aby se zkoušený nacházel v křížové palbě jejich pohledů. Ptejte se vždy v okamžiku, kdy je zkoušený obrácen k druhému

zkoušejícímu.

11. Při zkoušení si berte tmavé brýle - neproniknutelnost znervozňuje.

12. Zkoušení ukončete ponurou výzvou: "Počkejte za dveřmi, budete zavolán!"

Podle S. D. Masona, Proceedings of the IRE, 1965.