4. MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA

4.1 Kinematika tuhého tělesa

Dosud jsme se zabývali mechanikou částice a soustavy částic. Pokud jsme používali název "těleso", ztotožňovali jsme ho s částicí. Považovali jsme tedy částici za určitý hmotný objekt, který se pohybuje jako celek a jehož pohyb lze popsat zadáním souřadnice jednoho bodu. Nezabývali jsme se tedy vzájemným pohybem *částí* takového tělesa.

Ve fyzice nazýváme tělesem určitý objem V, v němž je nějakým způsobem rozložena hmotnost, ať již spojitě nebo nespojitě. Víme, že všechna tělesa jsou tvořena molekulami a atomy, atomy jádry a elektrony atd. Je-li však těleso tvořeno velkým množstvím atomů, můžeme od jeho nespojité struktury odhlédnout a považovat rozložení hmotnosti v tělese za spojité. Jde tedy o spojitost ve fyzikálním smyslu - v sebemenším uvažovaném objemu spojitého tělesa musí být stále dosti atomů. Nekonečně malý objem tuhého tělesa dV nemůžeme tedy limitovat k nule v matematickém smyslu, ale musíme ho chápat jako dostatečně malý, tak aby uvažované veličiny charakterizující těleso v něm bylo možno považovat za konstantní.

To nám umožňuje zavést pojem *hustoty* tělesa v daném bodě. Zvolíme v tělese bod A o souřadnicích $x,\ y,\ z$ a obklopíme ho myšleným malým objemem ΔV, v němž je uzavřena hmotnost Δm. Vytvoříme nyní posloupnost takových do sebe vložených stále se zmenšujících objemů, které se stahují kolem bodu A. Pak definujeme hustotu tělesa v daném bodě jako limitu

$$\rho\ (x,y,z)\ =\ \lim_{\Delta V\to 0}\ \frac{\Delta m}{\Delta V}\ . \tag{4.1}$$

Předpokladem ovšem je, že taková limita existuje a nezávisí na tom jakou posloupnost zmenšujících se objemů vybereme. [1] Hustotu můžeme též definovat pomocí celkové hmotnosti tělesa M integrálním vztahem

$$M\ =\ \int_V \rho\ (\ x,\ y,\ z\ )\ dV\ . \tag{4.2}$$

Je-li těleso homogenní, s konstantní hustotou, je jeho hustota prostě

$$\rho\ =\ \frac{M}{V}\ =\ \text{konst}\ . \tag{4.3}$$

Hustota má fyzikální rozměr $[\rho]\ =\ \mathrm{L}^{-3}\mathrm{M}$ a měří se v jednotkách kg.m^{-3}. U plošných útvarů můžeme zavést *plošnou hustotu* (hmotnost na jednotku plochy) σ, u lineárních útvarů *lineární hustotu* (hmotnost na jednotku délky) τ.

[1] Někdy se hustota zavádí jako derivace $\rho\ =\ \frac{dm}{dV}$. Není to ovšem korektní, neboť funkce $m(V)$ není definována.

obr. 4.1 obr. 4.2

Těleso podle povahy můžeme tedy popisovat buď jako nespojité rozložení hmotnosti (je to vlastně soustava hmotných bodů v nějakém objemu) a udávat hmotnosti m_α a polohové vektory $\vec{r}_\alpha$ jednotlivých bodů, nebo jako spojité rozložení hmotnosti a udávat funkci $\rho\ (x,\ y,\ z)$. V prvním případě je celková hmotnost $M = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha$, ve druhém $M = \int_V\ \rho dV$.

V této kapitole se budeme zabývat důležitým případem *tělesa tuhého*. Pojem tuhého tělesa je opět pouhou fyzikální idealizací, modelem, a reálná tělesa se mu mohou více nebo méně blížit. U tuhého tělesa předpokládáme, že vzájemné vzdálenosti jeho částí se nemohou měnit, tuhé těleso se nemůže deformovat. [2] To ovšem podstatně zjednodušuje popis pohybu takového tělesa. Považujeme-li tuhé těleso za soustavu N hmotných bodů v neměnných vzájemných vzdálenostech, je celkový počet stupňů volnosti tuhého tělesa dán počtem stupňů volnosti těchto bodů zmenšený o počet nezbytných vazeb mezi nimi. Přitom poloha tuhého tělesa je dána, známe-li polohu tří jeho bodů neležících v přímce - víme z praxe, že těleso stačí upevnit ve třech bodech. Tyto tři body, jsou-li volné, mají 9 stupňů volnosti. Protože jsou však vzájemně vázány třemi neměnnými vzdálenostmi, bude celkový počet stupnů volnosti takového tělesa tvořeného třemi body roven 9 - 3 = 6. Připojení dalších bodů nebude již počet stupňů volnosti zvětšovat. Každý nový bod má sice tři stupně volnosti, ale musí být upevněn třemi vazbami.

Můžeme tedy očekávat, že pohyb tuhého tělesa bude záviset na dvanácti integračních konstantách a alespoň pro izolované tuhé těleso bude možno najít řešení jeho pohybu v kvadraturách. Pohyb tuhého tělesa může být zásadně dvojí - *translační* a *rotační*; každý z nich vyžaduje obecně tři stupně volnosti. Translační pohyb lze popsat jako pohyb jednoho bodu pevně spojeného s tělesem, například těžiště, který můžeme zvolit za počátek kartézské soustavy S', v inerciální kartézské soustavě S (obr. 4.1). Soustava S' spojená s tělesem nemusí být obecně inerciální. Pouze tehdy, nebude-li na těleso působit výslednice vnějších sil, inerciální bude, a počátek O' se bude pohybovat rovnoměrně přímočaře.

[2] V teorii relativity je existence tuhého tělesa dokonce principiálně vyloučena. Zapůsobí-li na jeden konec takového tělesa silový impuls, musí se tuhé těleso dát do pohybu najednou jako celek. To ovšem znamená, že silové působení se musí rozšířit v objemu tělesa nekonečně rychle, což teorie relativity nepřipouští.

Sledování translačního pohybu tuhého tělesa nám nepřináší nic nového - lze jej popsat pohybovou rovnicí těžiště. Budeme se tedy zajímat především o rotační pohyb tuhého tělesa. Pak je vhodné spojit počátky obou soustav S a S' v jeden a zajímat se jen o změny směru os soustavy S' vzhledem k soustavě S. Popis rotace tuhého tělesa se pak redukuje na vzájemný pohyb dvou kartézských soustav se společným počátkem (obr. 4.2).

Při takovém přístupu považujeme jeden bod tuhého tělesa za nehybný a jde o *rotaci tělesa kolem bodu*. Vedle toho může těleso konat též známou *rotaci kolem osy*, při čemž tato osa může být buď *pevná* nebo *volná*. Kola automobilu rotují kolem pevné osy (která se však přemisťuje translačním pohybem), zeměkoule nebo umělá družice uvedená do rotace rotuje kolem volné osy.

Lze ukázat, že jakékoli pootočení kolem bodu lze nahradit pootočením kolem osy. Opíšeme-li totiž bodu kulovou plochu, přejdou v důsledku pootočení nějaké dva body A, B na povrchu koule v nové dva body A', B'. Roviny symetrie úseček AA', BB' se protnou v přímce, která představuje hledanou osu rotace. Při rotaci kolem této náhradní osy nebude však těleso obecně procházet týmiž mezipolohami, jako při rotaci kolem bodu. Půjde-li však o nekonečně malé pootočení, je možno je vždy považovat za *rotaci kolem okamžité osy*, jejíž poloha se může každým okamžikem měnit.

Rozložíme nyní obecný okamžitý pohyb tuhého tělesa na translaci počátku vztažné soustavy O' spojené s tělesem rychlostí $\vec{V}$ a pootočení tělesa kolem okamžité osy rotace procházející tímto počátkem úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$. Rychlosti jednotlivých bodů tvořících těleso v inerciální soustavě S budou podle (2.149) rovny

$$\vec{v} \;=\; \vec{V} \;+\; \vec{\Omega} \times \vec{r}' \,. \tag{4.4}$$

Vzniká ovšem otázka, jak se změní tento výsledek, zvolíme-li v tělese jiný počátek vztažné soustavy O''. Nechť vektor spojující tyto dva počátky je $O'O'' = \vec{R}$. Podle (**??**) bude

$$\vec{v} \;=\; \vec{V} \;+\; \vec{\Omega} \times \vec{R} \;+\; \vec{\Omega} \times \vec{r}'' \,. \tag{4.5}$$

Počátek O'' však není o nic lepší než počátek O'; zatím jsme ani o žádném z nich nepředpokládali, že by musel ležet v těžišti. Proto i vzhledem k počátku O'' musí platit stejný vztah jako (**??**), kde označíme $\vec{V}^*$ rychlost tohoto počátku v soustavě S a $\vec{\Omega}^*$ úhlovou rychlost rotace vybraného bodu kolem okamžité osy procházející O'':

$$\vec{v} \;=\; \vec{V}^* \;+\; \vec{\Omega}^* \times \vec{r}'' \,. \tag{4.6}$$

Aby vztahy (**??**) a (**??**) mohly platit pro každý bod tělesa, musí být

$$\vec{V}^* \;=\; \vec{V} \;+\; \vec{\Omega} \times \vec{R} \;\;, \qquad \vec{\Omega}^* \;=\; \vec{\Omega} \,. \tag{4.7}$$

Odtud můžeme učinit důležitý závěr, že úhlová rychlost $\vec{\Omega}$ rotace kolem okamžité osy je společná všem bodům tělesa, nezávisí ne volbě bodu jímž osa rotace prochází a **charakterizuje tedy rotační pohyb tělesa jako celku**. Obecný pohyb tělesa v každém okamžiku můžeme tedy rozložit na pohyby dva:

1. Je-li $\vec{V} \perp \vec{\Omega}$, tj. pohybuje-li se těleso translačním pohybem kolmo k ose rotace, leží podle (**??**) rychlosti všech bodů tělesa v rovinách kolmých k ose rotace a můžeme vybrat počátek O'' (polohu osy) tak, aby $\vec{V}^* = 0$. Potom pohyb představuje *čistou rotaci kolem*

obr. 4.3 obr. 4.4

okamžité osy. Tak pohyb kola automobilu nebo valení válce po rovině můžeme popsat dvojím způsobem: jako translační pohyb osy symetrie a současné rotace kolem ní nebo jako čistou rotaci kolem dotekové přímky s rovinou.

2. Má-li vektor $\vec{V}$ složku ve směru osy rotace, koná těleso navíc translační pohyb podél osy rotace rychlostí $\vec{V} \cdot \vec{\Omega}$. To je případ smyku automobilového kola.

4.2 Dynamika tuhého tělesa

4.2.1 Silová dvojice

Působí-li na tuhé těleso vnější síly a jejich momenty, můžeme opět použít první a druhou větu impulsovou. Je-li $\vec{P}$ hybnost tuhého tělesa a $\vec{L}$ jeho moment hybnosti, $\vec{F}$ a $\vec{N}$ výslednice vnějších sil a výsledný moment hybnosti vnějších sil, platí

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \, , \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \, . \tag{4.8}$$

Při určování výslednice vnějších sil a výsledného momentu vnějších sil musíme však uvážit, v kterých bodech tělesa tyto síly působí. Síly nemůžeme považovat za volné vektory, nanejvýš za klouzavé (můžeme je posouvat po přímce jejich působení). Vnější síly mohou přitom ovlivnit jak translační tak rotační pohyb tělesa. Můžeme postupovat tak, že zvolíme nějaký bod tuhého tělesa za působiště vnějších sil, všechny síly do tohoto bodu přeneseme a určíme jejich výslednici. Takové přenášení sil je na obr. 4.3.

Půosbí-li síla $\vec{F}_\alpha$ v bodě A_α tuhého tělesa, můžeme ji přenést do nového působiště A tak, že v tomto bodě jakoby umístíme dvě stejné proti sobě působící síly $\vec{F}_\alpha$ a $-\vec{F}_\alpha$; tím se samozřejmě na uspořádání sil nic nezmění. Můžeme však nyní mít za to, že síla $\vec{F}_\alpha$ působí v bodě A a navíc na těleso působí *dvojice sil* $\vec{F}_\alpha, \ -\vec{F}_\alpha$, jejichž působiště spojuje vektor $\vec{a}_\alpha$. Taková silová dvojice vyvolává rotaci tělesa.

Sečteme-li momenty sil této dvojice, dostaneme *moment silové dvojice*, který nezávisí na volbě počátku soustavy souřadnic (obr. 4.3):

$$\vec{D}_\alpha = \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha - \vec{r}_A \times \vec{F}_\alpha = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_A) \times \vec{F}_\alpha = \vec{a}_\alpha \times \vec{F}_\alpha . \tag{4.9}$$

Jeho velikost je zřejmě rovna součinu velikosti síly a ramene silové dvojice, tj. vzdálenosti obou přímek, v nichž síly dvojice působí. Pootočí-li se těleso tvaru válce například působením silové dvojice tečných sil o úhel φ, vykoná silová dvojice práci (obr. 4.4)

$$A = 2 \int_0^\varphi F\, R\, d\varphi = \int_0^\varphi D\, d\varphi . \tag{4.10}$$

Působí-li na tuhé těleso v různých bodech síly $\vec{F}_\alpha$, přeneseme je popsaným způsobem do jednoho zvoleného bodu (například těžiště) a najdeme zde výslednici těchto sil $\vec{F} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha$. Dále musíme sečíst momenty všech silových dvojic

$$\vec{D} = \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_A) \times F_\alpha = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha - \vec{r}_A \times \sum_\alpha \vec{F}_\alpha = \vec{N} - \vec{r}_a \times \vec{F} . \tag{4.11}$$

Je-li výslednice vnějších sil nulová, je výsledný moment silových dvojic právě roven výslednému momentu vnějších sil, $\vec{D} = \vec{N}$, a nezávisí na poloze bodu A.

Představme si nyní tuhé těleso v homogenním tíhovém poli. Výslednice rovnoběžných tíhových sil, které působí v jednotlivých bodech tělesa, bude zřejmě

$$\vec{F} = \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{g} = M\, \vec{g}.$$

Výsledný moment vnějších sil bude

$$\sum_\alpha m_\alpha (\vec{r}_\alpha \times \vec{g}) = (\sum_\alpha m_\alpha\, \vec{r}_\alpha) \times \vec{g} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha\, \vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} \times \vec{F} = \vec{R} \times \vec{F} , \tag{4.12}$$

kde $\vec{R}$ je polohový vektor těžiště. Odtud je vidět, že výsledná tíhová síla působí v homogenním tíhovém poli skutečně v těžišti. Poloha těžiště (hmotného středu) je přitom definována bez ohledu na vnější pole, pouze na základě rozložení hmoty v tělese. Bude-li těleso v nehomogenním tíhovém poli (například velmi rozměrné těleso v zemském tíhovém poli), nelze už obecně tvrdit, že výsledná tíhová síla působí v hmotném středu (těžišti).

4.2.2 Tenzor momentu setrvačnosti

Nechť se tuhé těleso tvořené hmotnými body m_α pohybuje tak, že počátek vztažné soustavy spojené s tělesem se pohybuje obecnou rychlostí $\vec{V}(t)$ a těleso koná rotaci obecnou úhlovou rychlostí $\Omega(t)$. Potom jeho kinetická energie bude

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{v}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha\, (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_\alpha)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\, M\, V^2 \,+\, \vec{V} \cdot \vec{\Omega} \times \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{r}'_\alpha \,+\, \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha\, (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_\alpha)^2 \,. \tag{4.13}$$

Využijeme nyní výhody těžišťové soustavy a umístíme počátek O' do těžiště tělesa. Potom bude druhý člen na pravé straně (**??**) roven nule a máme

$$T \,=\, \frac{1}{2} M\, V^2 \,+\, \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha\, (\, \vec{\Omega} \times \vec{r}'_\alpha\,)^2 \,=\, T_p \,+\, T_r \,. \tag{4.14}$$

Kinetickou energii tak můžeme rozdělit v souladu s Königovou větou na kinetickou energii postupného pohybu těžiště a vnitřní kinetickou energii rotačního pohybu.

Upravíme nyní výraz pro rotační kinetickou energii s pomocí Lagrangeovy identity (M.64), z níž plyne

$$(\, \vec{a} \times \vec{b}\,)^2 \,=\, a^2 b^2 \,-\, (\, \vec{a} \cdot \vec{b}\,)^2 \,.$$

Tak dostaneme

$$T_r \,=\, \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha\, (\, \vec{\Omega} \times \vec{r}'_\alpha\,)^2 \,=\, \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha\, [\, \Omega^2\, r'^2_\alpha \,-\, (\vec{\Omega}\, \cdot\, \vec{r}'_\alpha)^2\,] \,=$$

$$=\, \frac{1}{2}\, \vec{\Omega}\, \cdot\, \sum_\alpha m_\alpha\, [r'^2_\alpha\, \vec{\Omega} \,-\, (\, \vec{\Omega}\, \cdot\, \vec{r}'_\alpha\,)\, \vec{r}'_\alpha] \,. \tag{4.15}$$

Podobně upravíme výraz pro moment hybnosti tuhého tělesa s použitím věty o dvojitém vektorovém součinu (M.63). Protože se zajímáme pouze o rotaci tělesa, můžeme ztotožnit počátky soustav souřadnic $O,\ O'$ a máme

$$\vec{r}_\alpha \,=\, \vec{r}'_\alpha \,, \quad \vec{v}'_\alpha \,=\, 0 \,, \quad \vec{v}_\alpha \,=\, \vec{\Omega} \times \vec{r}'_\alpha \,.$$

Potom moment hybnosti tělesa bude

$$\vec{L} \,=\, \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha \,=\, \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{r}'_\alpha \times (\, \vec{\Omega} \times \vec{r}'_\alpha) \,=\, \sum_\alpha m_\alpha [\, r'^2_\alpha \vec{\Omega} \,-\, (\, \vec{\Omega}\, \cdot\, \vec{r}'_\alpha\,)\, \vec{r}'_\alpha\,] \,. \tag{4.16}$$

Porovnáním (**??**) a (**??**) zjistíme, že mezi kinetickou energií rotačního pohybu a momentem hybnosti platí vztah

$$T_r \,=\, \frac{1}{2}\, \vec{L}\, \cdot\, \vec{\Omega} \,. \tag{4.17}$$

Upravíme nyní výraz pro moment hybnosti (**??**) dále. Přejdeme přitom ke složkovému vyjádření a budeme používat Einsteinovo sumační pravidlo (M.39). Potom

$$L_i \,=\, \sum_\alpha m_\alpha\, (\Omega_i\, x'_{\alpha j}\, x'_{\alpha j} \,-\, \Omega_k\, x'_{\alpha k}\, x'_{\alpha i}\,) \,. \tag{4.18}$$

V tomto výrazu probíhá sčítání přes všechny elementy tuhého tělesa, ale složky $\vec{\Omega}$ se tohoto sčítání nezúčastní. Bylo by proto vhodné vytknout tyto složky před celou sumu. Protože zde však vystupuje jednak složka Ω_i a jednak Ω_k, využijeme vlastností Kroneckerova symbolu δ_{ik}:

$$L_i \,=\, \sum_\alpha m_\alpha\, (\Omega_k \delta_{ik}\, x'_{\alpha j}\, x'_{\alpha j} \,-\, \Omega_k\, x'_{\alpha i}\, x'_{\alpha k}\,) \,. \tag{4.19}$$

Nyní můžeme složku Ω_k vytknout a psát

$$L_i \;=\; \Omega_k \,\sum_\alpha m_\alpha \,(\; x'_{\alpha j}\; x'_{\alpha j}\; \delta_{ik} \;-\; x'_{\alpha i}\; x'_{\alpha k}\;)\;. \tag{4.20}$$

Získaná suma vyjadřuje pouze rozložení hmoty v tělese rotujícím kolem těžiště a závisí na dvou indexech, i a k, je tvořena součiny složek vektorů s těmito indexy. Je to tedy tenzor a nazýváme jej *tenzorem setrvačnosti* vzhledem k těžišti:

$$I_{ik} \;=\; \sum_\alpha m_\alpha \,(\; x'_{\alpha j}\; x'_{\alpha j}\; \delta_{ik} \;-\; x'_{\alpha i}\; x'_{\alpha k}\;)\;. \tag{4.21}$$

Je-li hmota v tělese rozložena spojitě, máme místo (**??**) integrál

$$I_{ik} \;=\; \int_V \rho\;(\; x'_j\; x'_j\; \delta_{ik} \;-\; x'_i x'_k\;)\; dV\;. \tag{4.22}$$

Pomocí tenzoru setrvačnosti můžeme vyjádřit složky momentu hybnosti tělesa a jeho rotační kinetickou energii jako

$$L_i \;=\; I_{ik}\,\Omega_k \quad , \qquad T_r \;=\; \frac{1}{2}\; I_{ik}\;\Omega_i\;\Omega_k\;. \tag{4.23}$$

Zapíšeme tenzor setrvačnosti v podobě matice; v dalším budeme vynechávat čárkování souřadnic.

$$I_{ik} \;=\; \begin{pmatrix} \sum_\alpha m_\alpha(y_\alpha^2+z_\alpha^2) & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha z_\alpha \\ -\sum_\alpha y_\alpha x_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha(x_\alpha^2+z_\alpha^2) & -\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha z_\alpha \\ -\sum_\alpha m_\alpha z_\alpha x_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha(x_\alpha^2+y_\alpha^2) \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Je-li hmota v tělese rozdělena spojitě, bude tenzor setrvačnosti

$$I_{ik} \;=\; \begin{pmatrix} \int_V \;\rho\;(y^2+z^2)\;dV & -\int_V \;\rho\;x\;y\;dV & -\int_V \;\rho\;x\;z\;dV \\ -\int_V \;\rho\;y\;x\;dV & \int_V \;\rho\;(x^2+z^2)\;dV & -\int_V \;\rho\;y\;z\;dV \\ -\int_V \;\rho\;z\;x\;dV & -\int_V \;\rho\;z\;y\;dV & \int_V \;\rho\;(x^2+y^2)\;dV \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

Tenzor momentu setrvačnosti je symetrický, jak se snadno přesvědčíme. Nyní se nám hodí poznatky o vlastnostech symetrických tenzorů, které jsme načerpali ve třetím odstavci kapitoly Matematický aparát. Především víme, že symetrické tenzory lze diagonalizovat, tj. najít takové směry os souřadnic, že tenzor setrvačnosti bude mít v těchto osách tvar

$$I_{ik} \;=\; \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \int_V \;\rho\;(y^2+z^2)\;dV & 0 & 0 \\ 0 & \int V\;\rho\;(x^2+z^2)\;dV & 0 \\ 0 & 0 & \int_V \;\rho(x^2+y^2)\;dV \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

Veličiny $I_1,\ I_2,\ I_3$ se nazývají *hlavní momenty setrvačnosti* a takto zvolené osy *hlavní osy setrvačnosti.* V tuhém tělese tedy existuje nejen význačný bod těžiště, ale tři význačné kolmé směry z těžiště vycházející (směry hlavních os setrvačnosti). Nediagonální prvky tenzoru momentu setrvačnosti $I_{ik},\ i \neq k$ nazýváme *deviační momenty.*

Dále víme, že symetrický tenzor je možno geometricky vyjásřit středovou kvadrikou, kvadratickou plochou, která je invariantní, s tělesem jakoby pevně spojená. Rovnici této kvadriky pro tenzor setrvačnosti můžeme napsat v kanonickém tvaru jako

$$I_1\, x^2 \;+\; I_2\, y^2 \;+\; I_3\, z^2 \;=\; 1\,. \tag{4.27}$$

Jednička na pravé straně má ovšem příslušný fyzikální rozměr. Protože všechny tři hlavní momenty setrvačnosti jsou kladné a konečné, leží body této kvadriky v konečnu. Takovou kvadrikou je elipsoid, říkáme mu *elipsoid setrvačnosti.* Elipsoid setrvačnosti plně určuje tenzor setrvačnosti a tím i rotační vlastnosti tělesa, jeho moment hybnosti, kinetickou energii rotačního pohybu atd. Tato skutečnost si zaslouží zvláštní pozornosti - u libovolného tělesa sebekomplikovanějšího tvaru stačí znát jen polohu těžiště a tři poloosy elipsoidu setrvačnosti, abychom vystihli všechny možné rotace takového tělesa. Bude-li tedy například rotovat umělá družice s různými nepravidelnými výstupky a anténami nebo baletka či krasobruslařka, lze tato tělesa, alespoň z hlediska rotace, nahradit krásnou a jednoduchou symetrickou geometrickou plochou jakou je trojosý elipsoid!!

V hlavních osách setrvačnosti bude moment hybnosti tělesa a jeho rotační kinetická energie (**??**)

$$L_x \;=\; I_1\,\Omega_x\,, \quad L_y \;=\; I_2\,\Omega_y\,, \quad L_z \;=\; I_3\,\Omega_z$$

$$T_r \;=\; \frac{1}{2}\,(I_1\,\Omega_x^2 \;+\; I_2\,\Omega_y^2 \;+\; I_3\,\Omega_z^2)\,. \tag{4.28}$$

Ptejme se nyní, jak určit moment setrvačnosti tělesa, které rotuje kolem osy procházející těžištěm, ale svírá s hlavními osami obecný směr daný jednotkovým vektorem $\vec{n}$. Pod momentem setrvačnosti I přitom rozumíme veličinu, která souvisí s momentem hybnosti a kinetickou energií rotačního pohybu vztahy

$$\vec{L} \;=\; I\,\vec{\Omega}\,, \quad T_r \;=\; \frac{1}{2}\,I\,\Omega^2\,. \tag{4.29}$$

Známe-li hlavní momenty setrvačnosti tělesa, určíme moment setrvačnosti vzhledem k dané ose prostě jako

$$I \;=\; I_1\,n_x^2 \;+\; I_2\,n_y^2 \;+\; I_3\,n_z^2\,, \tag{4.30}$$

jak vyplývá z (**??**). Hlavní momenty setrvačnosti tedy odpovídají kinetické energii rotace kolem hlavních os setrvačnosti.

Známe-li elipsoid setrvačnosti, můžeme stanovit moment setrvačnosti vzhledem k libovolné ose procházející těžištěm geometricky. Pro hlavní osy setrvačnosti je to zřejmé - z rovnice elipsoidu plyne, že $I_1,\ I_2,\ I_3$ jsou převrácenými čtverci odpovídajících poloos elipsoidu. Míří-li osa rotace směrem $\vec{n}$, máme

$$I \;=\; I_1\,n_x^2 \;+\; I_2\,n_y^2 \;+\; I_3\,n_z^2 \;=\; \frac{1}{r^2}\,(I_1\,x^2 + I_2\,y^2 + I_3\,z^2) \;=\; \frac{1}{r^2}\,, \tag{4.31}$$

kde r je délka průvodiče z těžiště k průsečíku osy rotace s elipsoidem setrvačnosti.

Steinerova věta

Často bývá výhodné a nutné určovat moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose, která **neprochází** těžištěm. K tomu se používá tzv. Steinerova věta. Přejděme v tělese od počátku O' ležícím v těžišti k novému počátku O'' mimo těžíště; nechť vektor vedený z počátku O' k O'' jest $\vec{R}$. Potom pro moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející novým počátkem (a rovnoběžné s původní osou) máme

$$I^*_{ik} \;=\; \sum_\alpha m_\alpha\;(\;x''_{\alpha j}\;x''_{\alpha j}\;\delta_{ik} - x''_{\alpha i}\;x''_{\alpha k}\;) \;=$$

$$=\;\sum_\alpha m_\alpha[\;(\;x'_{\alpha j} - R_j\;)\;(\;x'_{\alpha j} - R_j\;)\;\delta_{ik}\;-\;(\;x'_{\alpha i} - R_i\;)\;(\;x'_{\alpha k} - R_k\;)\;]\;=$$

$$=\;\sum_\alpha m_\alpha\;x'_{\alpha j}\;x'_{\alpha j}\;\delta_{ik}\;-\;2R_j\;\sum_\alpha m_\alpha\;x'_{\alpha j}\;+\;R_j\;R_j\delta_{ik}\;\sum_\alpha m_\alpha\;-$$

$$-\;\sum_\alpha m_\alpha\;x'_{\alpha i}\;x'_{\alpha k}\;+\;R_i\;\sum_\alpha m_\alpha\;x'_{\alpha k}\;+\;R_k\;\sum_\alpha m_\alpha\;x'_{\alpha i}\;-\;R_i\;R_k\;\sum_\alpha m_\alpha\;.$$

V těžišťové soustavě druhý, pátý a šestý člen tohoto výrazu jsou rovny nule, takže zbývá

$$I^*_{ik}\;=\;\sum_\alpha m_\alpha\;(\;x'_{\alpha j}\;x'_{\alpha j}\;\delta_{ik}\;-\;x'_{\alpha i}\;x'_{\alpha k}\;)\;+\;M\;(\;R_j\;R_j\;\delta_{ik}\;-\;R_i\;R_k\;)\;.$$

Podle Steinerovy věty je tedy vztah mezi momenty setrvačnosti I a I^*

$$I^*_{ik}\;=\;I_{ik}\;+\;M\;(\;R_j\;R_j\;\delta_{ik}\;-\;R_i\;R_k\;)\;. \tag{4.32}$$

V praxi se ovšem setkáváme s jednodušší podobou Steinerovy věty. Rotuje-li těleso například kolem osy z procházející těžištěm a posune-li se tato osa rovnoběžně o vzdálenost a, půjde pouze o transformaci složky momentu setrvačnosti $I = I_{33}$. Potom bude

$$I^*\;=\;I\;+\;M\;(\;R_1^2 + R_2^2 + R_3^2\;-\;R_3^2\;)\;=\;I\;+\;M\;(\;R_1^2\;+\;R_2^2\;)\;=\;M\;a^2\;.$$

Úloha (Momenty setrvačnosti symetrických těles)

Určíme hlavní momenty setrvačnosti nejčastěji se vyskytujících symetrických těles:

Rotátor

Pod rotátorem rozumíme dva hmotné body o stejné hmotnosti m pevně spojené nehmotnou tyčkou délky l ("činku"). V kvantové mechanice se podobně chovají dvouatomové molekuly tvořené stejnými atomy. Podle obr. 4.5 umístíme rotátor ve směru osy z s těžištěm v počátku.

Podle definice hlavních momentů setrvačnosti

$$I_1\;=\;I_2\;=\;2m\;\left(\frac{l}{2}\right)^2\;=\;\frac{1}{2}m\;l^2\;,\quad I_3\;=\;0\;.$$

obr. 4.5 obr. 4.6

Dvouatomová molekula

Jsou-li hmotné body tvořící "činku" nestejné hmotnosti $m_1,\ m_2$, vznikne těleso, které je obdobou dvouatomové molekuly tvořené různými atomy (např. HCl). Umístíme je opět na ose z tak, že souřadnice obou bodů budou $z_1,\ z_2$ (obr. 4.6). Protože počátek je v těžišti, platí jak víme

$$z_1 \ = \ \frac{m_2\ l}{m_1+m_2} \quad , \qquad z_2 \ = \ -\ \frac{m_1\ l}{m_1+m_2} \ .$$

Potom

$$I_1 \ = \ I_2 \ = \ \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\ l^2 \ = \ m_r\ l^2 \ ,$$

kde m_r je redukovaná hmotnost.

Obruč

Obruč hmotnosti M a poloměru R umístíme v rovině $x,\ y$ s osou symetrie z (obr. 4.7).

Moment setrvačnosti vzhledem k ose z určíme snadno, uvážíme-li, že všechna hmota obruče je rozložena ve vzdálenosti R od osy rotace:

$$I_3 \ = \ \int_V \rho\ (\ x^2+y^2\ )\ dV \ = \ \int_V \rho\ R^2\ dV \ = \ R^2 \int_V \rho\ dV \ = \ M\ R^2 \ .$$

Pokud jde o momenty $I_1,\ I_2$, budou stejné. Je výhodné počítat jejich součet a pak jej dělit dvěma:

$$I_1 \ = \ I_2 \ = \ \frac{1}{2}\,(I_1+I_2) \ = \ \frac{1}{2}\int_V \rho\ (\ y^2+z^2+x^2+z^2\ )\ dV \ = \ \frac{1}{2}\int_V \rho\, R^2\ dV \ = \ \frac{1}{2}\ M\ R^2 \ .$$

Moment setrvačnosti kolem hlavních os ležících v rovině obruče je tedy poloviční vzhledem k momentu setrvačnosti kolem osy symetrie a tato rotace je nestabilní. Volně visící obruč roztočená kolem této osy má snahu přejít do rotace kolem osy symetrie, tj. rotovat ve vodorovné poloze.

obr. 4.7 obr. 4.8

Tyč

Snadno určíme momenty setrvačnosti tenké homogenní tyče délky l a hmotnosti M rozložené s lineární hustotou τ, umístěné ve směru osy z (obr. 4.8):

$$I_1 = I_2 = \int_{-l/2}^{l/2} \tau\, z^2\, dz = \frac{1}{12}\, \tau\, l^3 = \frac{1}{12}\, M\, l^2 .$$

Kvádr

Mějme homogenní kvádr s těžištěm v počátku a hranami $a,\ b,\ c$ rovnoběžnými s osami $x,\ y,\ z$ (obr. 4.9). Trojnásobnou integrací v kartézských souřadnicích dostáváme

$$I_1 = \int_V \rho\, (\, y^2 + z^2\,)\, dV = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2} \rho\, (\, y^2 + z^2\,)\, dxdydz =$$

$$= \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \left(\int_{-c/2}^{c/2} y^2\, dz + \int_{-c/2}^{c/2} z^2\, dz \right) = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \left(cy^2 + \frac{c^3}{12} \right) =$$

$$= \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \left(\frac{cb^3}{12} + \frac{bc^3}{12} \right) = \rho\, a\, b\, c\, \frac{b^2 + c^2}{12} = \frac{1}{12}\, M\, (\, b^2 + c^2\,) .$$

Podobně

$$I_2 = \frac{1}{12}\, M\, (\, a^2 + c^2\,) \ , \qquad I_3 = \frac{1}{12}\, M\, (\, a^2 + b^2\,) .$$

obr. 4.9 obr. 4.10

Válec

U válce (obr. 4.10) je výhodné použít cylindrických souřadnic. Pro hlavní moment vzhledem k ose rotační symetrie máme

$$I_3 \;=\; \int_V \rho\, r^2\, dV \;=\; \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} r^2\, r\, dr\, d\varphi\, dz \;=\; 2\pi\, h\, \rho \int_0^R r^3\, dr \;=$$

$$=\; \frac{1}{2}\, \rho\pi\, h\, R^4 \;=\; \frac{1}{2}\, M\, R^2\,.$$

Ve výrazu nevystupuje výška válce, takže ho lze použít i na případ **tenké kruhové desky**.

Pro osy rotace kolmé k ose válce využijeme opět symetrie válce a určíme

$$I_1 \;=\; I_2 \;=\; \frac{1}{2}\,(I_1 + I_2) \;=\; \frac{1}{2} \int_V \rho\,(\, x^2 + y^2 + 2z^2\,)\, dV \;=$$

$$=\; \frac{1}{2} \left(\rho \int_V r^3\, dr\, d\varphi\, dz \;+\; 2\rho \int_V z^2\, r\, dr\, d\varphi\, dz \right) \;=$$

$$\frac{1}{4}\, M\, R^2 \;+\; \frac{1}{2}\, 2\rho\, 2\pi\, \frac{R^2}{2}\, \frac{h^3}{12} \;=\; \frac{1}{4}\, M \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right)\,.$$

Válcová slupka

Pro tenkostěnný dutý válec (válcovou slupku) je $r = R =$ konst a označíme-li plošnou hustotu jako σ, dostaneme

$$I_3 \;=\; M\, R^2 \qquad \text{jako obruč}$$

obr. 4.11 obr. 4.12

$$I_1 \;=\; I_2 \;=\; \frac{1}{2}(I_1+I_2) \;=\; \frac{1}{2}\left(\sigma \int_S R^3\, d\varphi\, dz \;+\; 2\sigma \int_S z^2\, R\, d\varphi\, dz\right) \;=$$

$$=\; \frac{1}{2}\, M \left(R^2 \;+\; \frac{h^2}{6}\right) .$$

Kužel

Jak víme, těžiště kužele leží ve vzdálenosti 3/4 jeho výšky od vrcholu. Budeme opět integrovat v cylindrických souřadnicích, při čemž umístíme počátek souřadnic ne do těžiště, ale do vrcholu kužele (obr. 4.11).

Rovnice povrchové přímky kužele je vzhledem k tomuto počátku $z \;=\; \frac{h}{R}\; r$. Hlavní moment I_3 se při tomto posunutí počátku nezmění, takže máme

$$I_3 \;=\; \int_V \rho\, r^2\, r\, dr\, d\varphi\, dz \;=\; \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{hr/R}^{h} r^3\, dr\, d\varphi\, dz \;=$$

$$2\pi\, \rho \int_0^R r^3 \left(h - \frac{h}{R}\, r\right) dr \;=\; 2\pi\, h\, \rho \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^5}{5R}\right) \;=\; 2\pi\, h\, \rho\, \frac{R^4}{20} \;=\; \frac{3}{10}\, M\, R^2 .$$

Pokud jde o momenty setrvačnosti kolem osy kolmé k ose kužele, bude výhodné najít moment kolem osy procházející vrcholem kužele a pak pomocí Steinerovy věty přejít k hlavnímu mumentu procházejícím těžištěm. Tedy

$$I_1^* \;=\; I_2^* \;=\; \frac{1}{2}\,(I_1^* + I_2^*) \;=\; \frac{1}{2}\,\rho \int_V (\, x^2 + y^2 + 2z^2 \,)\, dV \;=$$

$$= \frac{1}{2} \left(\rho \int_V r^3 \; dr \; d\varphi \; dz \; + \; 2\rho \int_V z^2 \; r \; dr \; d\varphi \; dz \right) \; = \; \frac{3}{20} \; M \; (\; R^2 \; + \; 4h^2 \;) \; .$$

Hlavní momenty setrvačnosti $I_1, \; I_2$ pak budou

$$I_1 \; = \; I_2 \; = \; I_1^* \; - \; \frac{9}{16} \; M \; h^2 \; = \; \frac{3}{20} \; M \; \left(\; R^2 \; + \; \frac{h^2}{4} \; \right) \; .$$

Koule

Všechny tři hlavní momenty setrvačnosti koule jsou zřejmě stejné (obr. 4.12). Použijeme-li sférických souřadnic, dostaneme

$$I \; = \; \frac{1}{3} \; (I_1 + I_2 + I_3) \; = \; \frac{2}{3} \; \rho \; \int_V (\; x^2 + y^2 + z^2 \;) \; dV \; = \; \frac{2}{3} \; \rho \; \int_V r^2 \; r^2 \; \sin\theta \; dr \; d\theta \; d\varphi \; =$$

$$\frac{2}{3} \; \rho \; \int_\Omega d\Omega \; \int_0^R r^4 \; dr \; = \; \frac{2}{3} \; \rho \; 4\pi \; \frac{R^5}{5} \; = \; \frac{2}{5} \; M \; R^2 \; .$$

Kulová slupka

Pro tenkostěnnou dutou kouli (kulovou slupku) s plošnou hustotou σ máme

$$I \;=\; \frac{2}{3}\,\sigma\,\int_S R^2\,dS \;=\; \frac{2}{3}\,\sigma\,R^4\,\int_\Omega d\Omega \;=\; \frac{2}{3}\,\sigma\,4\pi\,R^4 \;=\; \frac{2}{3}\,M\,R^2\,.$$

Elipsoid

Homogenní trojosý elipsoid má všechny tři hlavní momenty setrvačnosti různé. Jejich výpočet lze usnadnit, provedeme-li substituci $x = a\xi,\quad y = b\eta,\quad z = c\zeta$, kde $a,\ b,\ c$ jsou poloosy elipsoidu. V nových proměnných má povrch elipsoidu rovnici $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, tedy představuje kouli k jednotkového poloměru. Pro moment I_1 máme

$$I_1 \;=\; \rho\,\int_V (y^2 + z^2)\,dV \;=\; \rho\,abc\,\int_{V_k} (\,b^2\eta^2 + c^2\zeta^2\,)\,dV_k\,.$$

Integrály funkcí η^2 a ζ^2 přes objem jednotkové koule určíme snadno jako

$$\int_{V_k} \eta^2\,dV_k \;=\; \int_{V_k} \zeta^2\,dV_k \;=\; \frac{1}{3}\,\int_{V_k} (\,\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\,)\,dV_k \;=\; \frac{1}{3}\,\frac{4\pi}{5}\,,$$

a protože objem elipsoidu je $V = \frac{4}{3}\pi abc$, dostáváme

$$I_1 \;=\; \frac{1}{5}\,M\,(b^2 + c^2)\,.$$

Druhé dva momenty dostaneme cyklickou záměnou $a,\ b,\ c$.

4.2.3 Pohybové rovnice tuhého tělesa

Protože tuhé těleso představuje soustavu mnoha částic, byť pevně vázaných, můžeme jeho pohyb řešit pomocí první a druhé věty impulsové (**??**). Tyto rovnice lze dobře použít zejména tehdy, rotuje-li těleso kolem osy, která nemění svůj směr. Přitom je jedno, je-li osa upevněna v ložiscích (rumpál, kolo na hřídeli) nebo zda se rovnoběžně posouvá. To je případ valení kola nebo válce po rovině, vodorovné nebo svislé, pohyb hračky známé jako jojo, pohyb fyzického kyvadla apod.

Na obr. 4.13 je krásný jednoduchý pokus demonstrující účinek momentu síly na pohyb tělesa. Na cívce, která se může valit po vodorovné rovině, je navinuta nit. Táhneme-li nití, která svírá s rovinou malý úhel, bude se nit navíjet a cívka k nám přibližovat. Táhneme-li pod velkým úhlem, bude se nit odvíjet a těleso se bude vzdalovat. Existuje hraniční úhel, kdy síla právě protíná okamžitou osu rotace a nepůsobí momentem. Pak cívka nemůže rotovat, a budeme-li táhnout, bude se smýkat po rovině. Názorně jsou tyto případy ukázány na obr. 4.15.

Je-li moment setrvačnosti vzhledem k ose rotace procházející těžištěm roven I, můžeme pohybové rovnice upravit na

$$M\,\frac{d\vec{V}}{dt} \;=\; \vec{F}\;,\qquad I\,\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \;=\; \vec{N}\,. \tag{4.33}$$

obr. 4.13

obr. 4.14

obr. 4.15

Úloha (Valení těles na nakloněné rovině)

Použití těchto rovnic lze dobře ukázat na úloze o valení těles na nakloněné rovině (obr. 4.14). Jde-li o drsnou rovinu, po níž se těleso valí bez prokluzování, působí na těleso dvě síly - síla tíhová v těžišti a síla tření v bodě dotyku s rovinou. Přeneseme-li sílu tření rovněž do těžiště, máme zde pohybovou rovnici pro složku rychlosti ve směru svahu

$$M \, \frac{dV}{dt} \; = \; M \; g \; \sin\alpha \; - \; F_t \, . \tag{4.34}$$

Rotaci vyvolává silová dvojice o velikosti $F_t R$, kde F_t je velikost síly tření a R vzdálenost těžiště od bodu dotyku, tedy např. poloměr válce. Máme tedy druhou rovnici

$$I \, \frac{d\Omega}{dt} \; = \; R \; F_t \, . \tag{4.35}$$

Přitom zřejmě $V = R\ \Omega$. Z rovnic (**??**), (**??**) vyloučíme neznámou sílu tření a dostaneme

$$(\; I \; + \; M \; R^2 \;) \; \frac{d\Omega}{dt} \; = \; R \; M \; g \; \sin\alpha \, . \tag{4.36}$$

Tuto rovnici však můžeme chápat tak, že těleso koná čistě rotační pohyb kolem okamžité osy rotace (přímky doteku), vzhledem k níž má moment setrvačnosti $I^* = I + MR^2$.

Dosadíme nyní za I moment setrvačnosti konkretního tělesa. Jde-li o válec, máme $I = \frac{1}{2}MR^2$, a tedy

$$\frac{3}{2} \; M \; R^2 \; \frac{d\Omega}{dt} \; = \; R \; M \; g \; \sin\alpha \, .$$

Válec se bude valit po nakloněné rovině s postupným zrychlením

$$a \; = \; R \; \frac{d\Omega}{dt} \; = \; \frac{2}{3} \; g \; \sin\alpha \, , \tag{4.37}$$

které nezávisí na jeho poloměru. Stejně tak zjistíme, že dutý válec se bude valit se zrychlením $a = \frac{1}{2} g \sin\alpha$, koule $a = \frac{5}{7} g \sin\alpha$, dutá koule $a = \frac{3}{5} g \sin\alpha$ atd. Připomeňme, že po ideálně hladké rovině by se těleso smýkalo se zrychlením $a = g \sin\alpha$.

Poněkud jiná situace nastává, neudržuje-li osa rotace stálý směr, rotuje-li těleso například kolem bodu obecným způsobem. Přitom okamžitá osa rotace tělesa může měnit svůj směr, a to jak v prostoru, **tak v tělese**, tj. vzhledem k soustavě souřadnic pevně spjaté s tělesem. To ovšem znamená, že v každém okamžiku těleso rotuje s jiným momentem setrvačnosti a pak nemůžeme dost dobře použít pohybové rovnice (**??**). Vzniká tak **úloha o pohybu setrvačníku**, kterou se zabýval L. Euler. Euler zformuloval **setrvačníkové rovnice**, které popisují změnu vektoru úhlové rychlosti tělesa v soustavě souřadnic spojených s tělesem, tj. se souřadnými osami ve směru hlavních os setrvačnosti tělesa. Přitom předpokládáme, že jeden bod tělesa je pevný a zvolíme ho za společný počátek soustav souřadnic $O \equiv O'$.

Vyjdeme opět z druhé věty impulsové a přetransformujeme ji do soustavy S'. Víme, že změna nějakého vektoru v soustavě S a v soustavě S' souvisí vztahem (2.148). Z druhé věty impulsové tak dostaneme

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{N} \,. \tag{4.38}$$

Rozepíšeme-li tuto rovnici do složek a vezmeme-li v úvahu, že

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\Omega}}{dt} \,,$$

dostaneme

$$\frac{d' L_i}{dt} + (\vec{\Omega} \times \vec{L})_i = \frac{d'(I_{ik}\Omega_k)}{dt} + (\vec{\Omega} \times \vec{L})_i =$$
$$= I_{ik} \frac{d'\Omega_k}{dt} + \varepsilon_{ikl}\, \Omega_k\, L_l = I_{ik} \frac{d\Omega_k}{dt} + \varepsilon_{ikl}\, \Omega_k\, I_{lj}\, \Omega_j = N_i \,,$$

kde ε_{ikl} je Levi-Civitův tenzor (viz M.58). Souhrnně tedy můžeme zapsat Eulerovy setrvačníkové rovnice

$$I_{ik} \frac{d\Omega_k}{dt} + \varepsilon_{ikl}\, I_{lj}\, \Omega_k\, \Omega_j = N_i \,. \tag{4.39}$$

V hlavních osách setrvačnosti tedy

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\, \Omega_2\, \Omega_3 = N_1$$

$$I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\, \Omega_3\, \Omega_1 = N_2$$

$$I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\, \Omega_1\, \Omega_2 = N_3 \,. \tag{4.40}$$

Uvažme nyní pohyb setrvačníků, na něž nepůsobí výsledná vnější síla ani moment síly. Měli bychom je nazývat "bezsilové" a "bezmomentové", ale je zvykem jim říkat "volné". V takovém případě můžeme mít za to, že těžiště setrvačníku je v klidu a že momenty setrvačnosti I_1, I_2, I_3 jsou hlavními momenty setrvačnosti vzhledem k hlavním osám procházejícím těžištěm.

Pohyb setrvačníků pak závisí na jejich symetrii. V nejsymetričtějším případě má setrvačník všechny tři hlavní momenty setrvačnosti stejné, $I_1 = I_2 = I_3 = I$. Říkáme mu *kulový* setrvačník, neboť jeho elipsoid setrvačnosti přechází v kulovou plochu. Přitom kulovým setrvačníkem je například i krychle!

Pro volný kulový setrvačník se Eulerovy rovnice zjednoduší na

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0, \tag{4.41}$$

a tedy

$$\vec{\Omega} = \text{konst} \,. \tag{4.42}$$

obr. 4.16

Volný kulový setrvačník může být buď v klidu nebo může konat rovnoměrnou rotaci kolem některé z os procházejících těžištěm. V tomto tvrzení je možno spatřovat určité zobecnění zákona setrvačnosti na rotační pohyb.

Mějme nyní volný setrvačník, který má jen dva hlavní momenty setrvačnosti stejné, $I_1 = I_2 \neq I_3$. Takovému setrvačníku říkáme *symetrický*. Ze setrvačníkových rovnic pro něj plyne

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = \omega_p \, \Omega_2 \, , \qquad \frac{d\Omega_2}{dt} = -\, \omega_p \, \Omega_1 \, , \qquad \frac{d\Omega_3}{dt} = 0 \, , \tag{4.43}$$

kde

$$\omega_p = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \, \Omega_3 \tag{4.44}$$

se nazývá *úhlová rychlost precese v tělese*. Odtud plyne, že $\Omega_3 =$ konst, těleso koná rotační pohyb s konstantní úhlovou rychlostí kolem osy z'. Kromě toho však se mění v čase složky úhlové rychlosti Ω_1 a Ω_2.

Ze setrvačníkových rovnic pro tyto složky dostaneme

$$\frac{d^2\Omega_1}{dt^2} + \omega_p^2 \, \Omega_1 = 0 \, .$$

Tuto rovnici vyřešíme obvyklým způsobem a pak z první setrvačníkové rovnice určíme i Ω_2:

$$\Omega_1 = A \, \sin(\omega_p \, t + \alpha) \, , \quad \Omega_2 = A \, \cos(\omega_p \, t + \alpha) \, , \quad \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = A^2 = \text{konst} \, . \tag{4.45}$$

Složka úhlové rychlosti v rovině x', y' tedy koná rovnoměrný kruhový pohyb úhlovou rychlostí (**??**) a zachovává si svou velikost. To je možné tak, že vektor úhlové rychlosti opisuje plášť kruhového přímého kužele (obr. 4.16). Tomuto pohybu se říká *precese osy* *rotace v tělese* a opisovaný kužel byl nazván řeckým slovem *polhodiový*. [3]

Za takový volný symetrický setrvačník můžeme přibližně považovat naši Zemi, bereme-li její tvar jako tvar rotačního elipsoidu. Jeho poloosy mají délky 6 378 km a 6 357 km [4] a určíme-li odtud její hlavní momenty setrvačnosti, dostaneme úhlovou rychlost precese v tělese

$$\omega_p \;=\; -0,0033\;\Omega_3 \;\approx\; \frac{\Omega_3}{300}\;.$$

To znamená, že osa zemské rotace opisuje kuželovou plochu s uvedenou úhlovou rychlostí, tedy s periodou 10 měsíců, kolem osy geodynamické symetrie. Tato precese probíhá v opačném smyslu než zemská rotace (znaménko minus!). [5]. Kinematický pól Země přitom opisuje malou kružnici kolem geodynamického pólu (tzv. Eulerova kružnice). Ve skutečnosti se ukazuje, že perioda této precese je o něco delší, asi 14 měsíců, vzhledem k tomu, že Země není dokonale tuhým tělesem. Kružnice s touto periodou se nazývá Chandlerova.

Položme si nyní otázku, za jakých podmínek bude těleso rovnoměrně rotovat kolem **volné osy**. V praxi může jít například o umělou družici obecného tvaru, kterou chceme z důvodu stabilizace uvést do rotace. Na volnou osu přitom nesmí působit žádné síly ani momenty sil. Počátek soustavy souřadnic spojené s tělesem můžeme zvolit na volné ose, která má být nehybná. Potom na těžiště tělesa budou v neinerciální vztažné soustavě působit setrvačné síly [6]

$$\vec{F} \;=\; -M\;[\;\vec{\varepsilon}\times\vec{r}' \;+\; \vec{\Omega}\times(\;\vec{\Omega}\times\vec{r}'\;) \;+\; 2\,\vec{\Omega}\times\vec{v}'\;]\;.$$

Eulerova síla bude nulová, bude-li $\varepsilon = 0$, rotace bude rovnoměrná. Odstředivá síla bude rovna nule, budou-li vektory $\vec{\Omega}$ a $\vec{r}'$ rovnoběžné, tj. bude-li osa rotace procházet těžištěm. Coriolisova síla se neuplatní, protože body na ose rotace musí být vůči tělesu v klidu. Zbývá ještě vyšetřit vliv momentů vnějších sil. Je-li jedinou nenulovou složkou vektoru úhlové rychlosti Ω_3, dostaneme ze setrvačníkových rovnic (**??**)

$$I_{13}\,\frac{d\Omega_3}{dt} \;-\; I_{23}\;\Omega_3^2 \;=\; N_1$$

$$I_{23}\,\frac{d\Omega_3}{dt} \;+\; I_{13}\;\Omega_3^2 \;=\; N_2$$

$$I_{33}\,\frac{\Omega_3}{dt} \;=\; N_3\;.$$

Jsou-li nyní momenty vnějších sil nulové, bude především ze třetí rovnice $\Omega_3 =$ konst. Dále musí platit

$$-I_{23}\;\Omega_2^2 \;=\; 0\;, \qquad I_{13}\;\Omega_3^2 \;=\; 0\;.$$

[3] Řecky polos = pól, hodos = cesta

[4] Ve skutečnosti je vzhledem k nerovnoměrnému rozložení kontinentů Země elipsoid trojosý a její přesný tvar a rozložení hmotnosti v ní jsou stále předmětem výzkumu.

[5] Mluvíme o geodynamické symetrii, protože hlavní osa setrvačnosti je dána nejen geometrickým tvarem, ale i rozložením hmoty v tělese. Kdyby Země byla homogenním tělesem, její geodynamická osa by byla totožná s osou geometrickou.

[6] Působení pravých vnějších sil na těžiště neuvažujeme, neboť to vyvolává pohyb tělesa jako celku a neovlivňuje rotaci.

Deviační momenty vzhledem k volné ose rotace musí být tedu nulové.

Můžeme tedy shrnout: Těleso libovolného tvaru a rozložení hmotnosti může být uvedeno do stavu rotace kolem volné osy za předpokladů, že

1. Volná osa bude procházet těžištěm
2. Volná osa bude jednou z hlavních os setrvačnosti
3. Rotace bude rovnoměrná.

Zbývá ještě otázka. zda taková rotace bude **stabilní**, tj. zda při malém vychýlení volné osy se tato bude vracet do původní polohy. V teoretické mechanice se dokazuje, že u těles, která mají všechny tři hlavní momenty setrvačnosti různé, bude možná stabilní rotace pouze **kolem osy s největším a nejmenším momentem setrvačnosti.** U symetrických těles, která mají dva hlavní momenty setrvačnosti stejné, nastane stabilní rotace pouze **kolem osy s větším momentem setrvačnosti.** Těleso bude mít snahu rozmístit hmotu co nejdále od osy rotace.

Tento zajímavý jev můžeme pozorovat při rotaci válce. Roztočíme-li jej kolem osy jeho symetrie, bude záležet na poměru jeho výšky a poloměru podstavy. Vysoký, podlouhlý válec nebude rotovat stabilně, ale bude se snažit přejít do rotace v rovině kolmé k ose. [7] Nízký, krátký válec (kotouč) stabilně rotovat bude. Zřejmě existuje určitý poměr výšky a poloměru podstavy, kdy se válec stane kulovým setrvačníkem a pak bude rotovat stabilně kolem kteréhokoliv osy procházející těžištěm.

4.2.4 Fyzické kyvadlo

Důležitým případem rotace tělesa kolem (pevné) osy je pohyb *fyzického kyvadla.* Pod fyzickým kyvadlem rozumíme těleso, které je zavěšeno nad těžištěm tak, aby mohlo působením tíhy kývat kolem osy daného směru. Vzhledem k tomu, že matematické kyvadlo, o němž jsme mluvili v kap. 2 je pouze určitou idealizací a reálná kyvadla jsou vždy fyzická, je třeba odvodit vztahy, které platí pro kývání kyvadla fyzického. Fyzické kyvadlo je důležitým nástrojem fyziků, zejména k měření tíhového zrychlení a jeho složek, slapových sil, uplatňuje se v gravimetrii, seismografii i jinde.

Důležitou charakteristikou fyzického kyvadla je vzdálenost jeho těžiště od osy rotace l (obr. 4.17). Budeme předpokládat, že osa rotace je vodorovná a že hlavní osy setrvačnosti kyvadla s ní svírají úhly $\alpha,\ \beta,\ \gamma$. Rychlost pohybu těžiště bude dáno jako $V = l\ \dot{\varphi}$. Omezíme-li se ze známých důvodů na malé kyvy, můžeme zapsat energii fyzického kyvadla jako

$$E = \frac{1}{2}M\ l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\ (\ I_1\ \cos^2\alpha + I_2\ \cos^2\beta + I_3\ \cos^2\gamma\ )\ \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\ g\ l\ \varphi^2\ . \qquad (4.46)$$

To je ovšem energie harmonického oscilátoru s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Ml^2 + I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma}{Mgl}}\ . \qquad (4.47)$$

Obyčejně však nastává jednodušší situace, kdy jedna z hlavních os setrvačnosti je rovnoběžná s osou rotace a druhé dvě k ní kolmé: $\alpha = \pi/2,\ \beta = \pi/2,\ \gamma = 0$. Nechť moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm $I_3 = I$ a moment setrvačnosti

[7] Vzpomeňme na pohyb akrobatky, která začne rotovat ve svislé poloze.

obr. 4.17

obr. 4.18

obr. 4.19

vzhledem k ose rotace podle Steinerovy věty $I^* = I + Ml^2$. Pak se perioda zjednoduší na

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Ml^2 + I}{Mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{I^*}{Mgl}}\,. \tag{4.48}$$

Redukovanou délkou fyzického kyvadla l_r nazýváme délku matematického kyvadla, které kýve s touž periodou. Je zřejmě

$$l_r = \frac{M\ l^2 + I}{M\ l} = \frac{I^*}{M\ l}\,. \tag{4.49}$$

Na obr. 4.19 je znázorněna závislost čtverce periody na vzdálenosti l, tedy funkce $(Ml^2 + I)/Mgl$. Je z něho patrno, že bude-li kyvadlo zavěšeno příliš blízko nebo příliš daleko od těžiště, bude perioda příliš velká. Existuje vzdálenost na obou stranách od těžiště, kdy bude perioda kmitů nejmenší, těleso tedy bude kývat nejrychleji. Je to

$$l_{min} = \sqrt{\frac{I}{M}} = \frac{l_r}{2}, \tag{4.50}$$

tedy právě polovina redukované délky. Redukovanou délku kyvadla můžeme tedy určit jako dvojnásobek délky l_{min}. Minimální doba kyvu pak je

$$T_{min} = \sqrt[4]{\frac{4I}{Mg^2}}. \tag{4.51}$$

Funkce na obr. 4.19 je ovšem sudá a obě části této funkce jsou vzdáleny právě o redukovanou délku. Vidíme, že pro danou periodu $T > T_{min}$ existují právě čtyři způsoby zavěšení kyvadlo, vždy dvě na každé straně od těžiště. Najdeme-li polohu dvou os na opačných stranách těžiště, a to nikoli symetrickou, při nichž je doba kyvu stejná, bude vzdálenost těchto os rovna redukované délce. Takové dvě osy se nazývají *sdružené*.

Vyhledávání sdružených os se provádí pomocí reverzního kyvadla (obr. 4.18). Reverzní kyvadlo je kovová tyč s dvěma rovnoběžnými osami otáčení, které jsou realizovány dvěma trojbokými hranoly obrácenými ostřím proti sobě.Po tyči se může pohybovat závaží, jehož posouváním měníme polohu těžiště a tím i moment setrvačnosti vzhledem k osám otáčení. Najdeme-li takovou polohu závaží, aby kyvadlo kývalo kolem obou os se stejnou periodou, představuje jejich vzdálenost redukovanou délku kyvadla. Pak můžeme z této periody určit například tíhové zrychlení ze vztahu

$$g = \frac{4\pi^2\, l_r}{T^2}. \tag{4.52}$$

4.3 Setrvačníky

Shrneme nyní poznatky o pohybu setrvačníků, tedy o obecné rotaci tuhého tělesa kolem daného bodu. Víme, že okamžitá osa rotace může přitom měnit svůj směr jak v prostoru, tak v tělese. Budeme opět používat dvou vztažných soustav S, S', jedné inerciální a druhé spojené s rotujícím tělesem, při čemž obě budou mít týž počátek. Připomeneme, že setrvačník podle symetrie může být

1. **kulový** - $I_1 = I_2 = I_3$, elipsoid setrvačnosti je kulová plocha

2. **symetrický** - $I_1 = I_2 \neq I_3$, elipsoid setrvačnosti je rotační

3. **asymetrický** - všechny tři hlavní momenty setrvačnosti různé, elipsoid setrvačnosti je trojosý

4. **rotátor** - $I_1 = I_2,\ I_3 = 0$, elipsoid setrvačnosti degeneruje v kružnici.

Podle toho, zda na setrvačník působí momenty vnějších sil, rozeznáváme setrvačník **volný** a **těžký**. Volný setrvačník je bezmomentový, pod těžkým setrvačníkem rozumíme pohyb setrvačníku v tíhovém poli.

Zatímco úloha o volném setrvačníku je řešitelná analyticky ("v kvadraturách") za použití zákonů zachování momentu hybnosti a energie, úloha o těžkém setrvačníku může být vyřešena jen v některých speciálních případech. Jsou to:

a) **Úloha Eulerova** - případ vyváženého setrvačníku s nehybným těžištěm

b) **Úloha Lagrangeova** - případ symetrického setrvačníku s pevným bodem na hlavní ose rotace z' pod těžištěm (pohyb dětského vlčku v tíhovém poli)

c) **Úloha Kovalevské** - speciální případ pohybu symetrického setrvačníku, který má $I_1 = I_2 = 2I_3$ a pevný bod v rovině $x',\ y'$.

Nejdříve se budeme zabývat volným setrvačníkem. Jde-li o setrvačník kulový nebo rotátor, je úloha snadná. Platí totiž

$$\vec{L} \;=\; I\,\vec{\Omega} \;=\; \mathbf{konst}, \quad \text{odkud} \quad \vec{\Omega} \;=\; \mathbf{konst}. \tag{4.53}$$

Volný kulový setrvačník může tedy být v klidu nebo vykonávat čistě rotační rovnoměrný pohyb kolem kterékoli osy procházející těžištěm. Rotátor může vykonávat takový pohyb kolem osy kolmé k přímce rotátoru. Rotátorem může být činka, tenká tyč apod.

Mějme nyní **volný symetrický setrvačník** (obr. 4.20). Platí

$$L_1 \;=\; I_1\,\Omega_1, \qquad L_2 \;=\; I_1\,\Omega_2, \qquad L_3 \;=\; I_3\,\Omega_3 \tag{4.54}$$

(souřadnice vektorů 1, 2, 3 se rozumí v hlavních osách setrvačnosti $x',\ y', z'$). Vektory momentu hybnosti, úhlové rychlosti a osy rotace z' mají tedy obecně v každém okamžiku různý směr. Protože se zachovává směr momentu hybnosti, můžeme zvolit v jeho směru osu z inerciální vztažné soustavy. Vektory $\vec{L}$ a z' určují rovinu, v níž můžeme vést osu x'. Fixujeme tedy polohu setrvačníku v okamžiku, kdy je osa y' kolmá k nákresně. Přitom ovšem $L_2 = 0$, a tedy i $\Omega_2 = 0$.

Odtud plyne, že tři vektory $\vec{L}$ (osa z), $\vec{\Omega}$ a osa z' leží v každém okamžiku v jedné rovině. Body na ose z' mají v každém okamžiku rychlost $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$. To je možné pouze tak, že osa z' opisuje kolem směru vektoru $\vec{L}$ kuželovou plochu s konstantním vrcholovým úhlem θ, kterému se říká *nutační úhel*. Takový pohyb osy rotace kolem nehybného směru v prostoru nazýváme **precese osy rotace v prostoru**. Protože nutační úhel zůstává stálý, nazývá se taková precese *regulární*. Volný symetrický setrvačník může tedy konat rovnoměrnou rotaci kolem osy z' a současně *regulární precesi* kolem osy z.

Vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$ musí zůstávat v rovině $z,\ z'$, a tedy musí též opisovat kuželovou plochu kolem vektoru $\vec{L}$. Tento kužel se nazývá herpolhodiový. [8] Víme však, že vektor $\vec{\Omega}$ opisuje polhodiový kužel kolem směru z'. Pohyb tedy musí probíhat tak, že oba

[8] Řecky herpo = plazím se

obr. 4.20 obr. 4.21

kužele se po sobě valí a úhlová rychlost leží v dotykové přímce (viz obr. 4.21). Podle **Poinsotovy věty** lze každý otáčivý pohyb kolem pevného bodu vytvořit valením polhodie po herpolhodii. [9]

Vraťme se nyní k obr. 4.20, z něhož můžeme určit úhlové rychlosti precese v prostoru i v tělese. Úhlovou rychlost tělesa $\vec{\Omega}$ můžeme rozložit do složek v hlavních osách setrvačnosti x', z'. Složka $\vec{\Omega}_3$ pak udává konstantní úhlovou rychlost rotace

[9] Názvy zavedl právě Poinsot [puanso].

$$\Omega_3 \;=\; \frac{L_3}{I_3} \;=\; \frac{L\ \cos\theta}{I_3} \;=\; \text{konst}\ .$$

Vektor úhlové rychlosti však také můžeme rozložit do složek ve směru os z, z'. Složka do každého z těchto směrů vyjadřuje tu část rotačního pohybu, při němž se daný směr nemění. Složka do směru z tak udává úhlovou rychlost precese v prostoru Ω_p, složka do směru z' úhlovou rychlost precese v tělese ω_p. Z obr. 4.20 máme

$$\Omega_p \;=\; \frac{\Omega_1}{\sin\theta} \;=\; \frac{L_1}{I_1 \sin\theta} \;=\; \frac{L\ \sin\theta}{I_1\ \sin\theta} \;=\; \frac{L}{I_1}. \tag{4.55}$$

Touto úhlovou rychlostí opisuje vektor úhlové rychlosti a osa rotace tělesa precesní kužel kolem pevného směru v prostoru $\vec{L}$. Určíme nyní precesi v tělese:

$$\omega_p \;=\; \Omega_3' \;=\; \Omega_3 \;-\; \Omega_p\ \cos\theta \;=\; \frac{L\ \cos\theta}{I_3} \;-\; \frac{L}{I_1}\ \cos\theta \;=\; L\ \cos\theta \frac{I_1 - I_3}{I_1 I_3} \;=\; \frac{I_1 - I_3}{I_1}\ \Omega_3\ . \tag{4.56}$$

Tento výsledek jsme však již odvodili z Eulerových setrvačníkových rovnic jako (**??**).

Případ obecně **asymetrického setrvačníku**, volného nebo vyváženého (Eulerova úloha), je sice analyticky řešitelný, ale vede na eliptické integrály. Důležité je, že trajektorie takového pohybu není uzavřena, že se takový setrvačník nikdy nevrací do původní polohy.

Všimněme si ještě úlohy o **těžkém symetrickém setrvačníku** (Lagrangeova úloha). Je to setrvačník v homogenním tíhovém poli s nehybným bodem pod těžištěm na ose rotace - tedy například opřený hrotem o podložku. Také tato úloha je analyticky řešitelná a vede na eliptické integrály; řešení lze nalézt v monografiích o teoretické mechanice. V daném případě netvoří již setrvačník izolovanou soustavu a vektor momentu hybnosti se nezachovává. Laboratorní inerciální vztažnou soustavu můžeme nyní zvolit tak, aby osa z mířila proti směru vnějšího tíhového pole. Ukazuje se, že vektor momentu setrvačnosti bude nyní opisovat precesní kužel kolem nehybné osy z. Protože však zároveň bude osa rotace opisovat rovněž precesní kužel kolem směru $\vec{L}$, nebude precese v prostoru regulární, ale nutační úhel se bude periodicky měnit. Těžký symetrický setrvačník bude tedy konat současně tři pohyby: **rovnoměrnou rotaci, (neregulární) precesi** a **nutaci**. Různé případy nutačního pohybu vidíme na obr. 4.22.

Zvláštním případem pohybu těžkého symetrického setrvačníku s pevným bodem pod těžištěm je přiblížení tzv. **rychlého setrvačníku**. Rotuje-li setrvačník rychle, bude kinetická energie jeho rotačního pohybu mnohem větší než energie jeho pohybu precesního a o ní předpokládáme, že je opět mnohem menší, než potenciální energie setrvačníku v tíhovém poli. Označíme-li vzdálenost těžiště od bodu opory l a nutační úhel vzhledem k pevnému směru η, můžeme zapsat energii takového setrvačníku jako

$$E \;=\; \frac{1}{2}\ I_3\ \Omega_3^2 \;+\; \frac{1}{2}\ I_1^*\ (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \;+\; M\ g\ l\ \cos\eta$$

(prvky momentu setrvačnosti označené hvězdičkou jsou vztaženy k pevnému bodu na podložce), kde první člen je mnohem větší než druhý a ten zas mnohem větší než třetí.

obr. 4.22

Těleso přitom rychle rotuje kolem osy z', ta koná pomalou precesi s malým nutačním úhlem kolem směru $\vec{L}$ a vektor $\vec{L}$ pak velmi pomalou precesi v tíhovém poli. Výsledkem je, že precesní kužel vytvořený v tíhovém poli je jen velmi mírně zvlněn, takže precese je téměř regulární. Říkáme jí **pseudoregulární precese**. Jak uvidíme, takovou pseudoregulární precesi koná právě naše Země v tíhovém poli Slunce a Měsíce (lunisolární precese).

Situaci můžeme dobře ilustrovat na pohybu známého dětského vlčku. Postavíme-li jeho osu svisle a roztočíme, mohl by vlček konat čistou rotaci. Poruchy však způsobí, že se jeho osa mírně nakloní a osa vlčku začne konat precesi kolem svislého směru. Tato precese bude zpočátku regulární, pak přejde v pseudoregulární, precesní kužel se mírně zvlní. Vlivem tření a odporu prostředí začne vlček ztrácet svou rotační energii a přestane být rychlým setrvačníkem. Precese přejde v neregulární, výkyvy vlčku se začnou zvětšovat, až nakonec dopadne na podložku.

Určíme úhlovou rychlost precese rychlého těžkého setrvačníku (obr. 4.23). Z druhé věty impulsové máme

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = l\,\vec{z}_0' \times M\,\vec{g}\,.$$

Vektor $\vec{z}_0'$ je jednotkový vektor ve směru osy z'. Protože tento vektor koná rychlou precesi kolem vektoru $\vec{L}$ (ve srovnání s rychlostí precese vektoru $\vec{L}$ v tíhovém poli), můžeme ho vystředovat a nahradit vektorem

$$z_0' \approx \frac{\vec{L}}{L}\cos\theta\,.$$

Pak dostaneme

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{M\ l\ \cos\theta}{L}\,\vec{g} \times \vec{L}\,. \tag{4.57}$$

Rovnice

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega}_t \times \vec{L} \tag{4.58}$$

obr. 4.23 obr. 4.24

však vyjadřuje, že vektor $\vec{L}$ koná v inerciální soustavě rotační pohyb úhlovou rychlostí Ω_t. Pro úhlovou rychlost precese rychlého těžkého setrvačníku jsme tak dostali

$$\Omega_t \;=\; \frac{M\ l\ \cos\theta\ g}{L} \;=\; \frac{M\ l\ g\ \cos^2\theta}{I_3\ \Omega_3} \;\approx\; \frac{M\ l\ g}{I_3\ \Omega}\ . \tag{4.59}$$

Předpokládali jsme, že úhel θ je velmi malý a úhlová rychlost rotace má převažující složku ve směru osy z' ($\cos\theta = L_3/L$).

Na pohybu těžkého rychlého setrvačníku lze demonstrovat tzv. **gyroskopický efekt**. Na obr. 4.24 je těžký setrvačník opřený spodním hrotem na podložce a s osou rotace ve vodorovné poloze. Zdá se neuvěřitelné, že tíha působící v jeho těžišti nezpůsobí jeho pád. Ve skutečnosti působí tíhová síla momentem $\vec{r} \times \vec{F}$ mířícím vodorovně, kolmo k vektoru momentu hybnosti. Tedy

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \;=\; \vec{N} \;=\; \vec{r} \;\times\; \vec{F} \;=\; \vec{\Omega}_t \;\times\; \vec{L}$$

a změna vektoru momentu hybnosti leží ve vodorovné rovině. Tento vektor se otáčí kolem svislého směru. Těleso se dává do pohybu nikoli směrem působící síly, ale kolmo k němu. Nespadne, ale musí konat precesní pohyb.

Nakonec ještě shrneme pohyb Země jako symetrického setrvačníku. Víme, že Země koná rotační pohyb kolem své osy symetrie s periodou jednoho dne. Tato osa vykonává volnou regulární precesi kolem směru momentu hybnosti s periodou 14 měsíců. Nutační úhel je přitom velmi malý, u pólu činí výchylka řádově 10 metrů. Astronomové ji však přesto mohou změřit, protože jakákoli změna směru osy zemské rotace se projeví na zdánlivém pohybu oblohy a změně polohy světového severního pólu.

Dále koná Země pseudoregulární precesi v tíhovém poli nebeských těles. Tato lunisolární precese probíhá s velkým nutačním úhlem ($23,5^0$), ale s periodou 26 000 let. Tomuto období se říká platónský rok. Během něho míří zemská osa na různá místa na obloze a světový pól se tak posouvá. Staří Egypťané určovali na obloze sever podle hvězdy Thuban v souhvězdí Draka. My se dnes orientujeme podle Polárky, za 10 000 let bude ukazovat sever hvězda $\alpha-$Cygni v souhvězdí Labutě, za 14 000 let Vega a za 26 000 let opět Polárka.

Precese zemské osy se projevuje též posouváním jarního bodu, tedy místa na obloze, kde se nachází Slunce v den jarní rovnodennosti. Leží ve směru průsečnice roviny ekliptiky a roviny světového rovníku, která se naklání. Vlivem lunisolární precese se jarní bod posouvá o 50,41" za rok směrem k Slunci, při planetární precesi o 0,12" za rok od Slunce a při tzv. geodetické precesi (efekt speciální teorie relativity) o 0,02" za rok, rovněž od Slunce. Vedle toho Měsíc způsobuje nutační pohyb zemské osy s periodou 19 let.

Příklady

4.1 Čtyři částice o hmotnostech m_1 =1 g, m_2 =2 g, m_3 =3 g, m_4 =4 g, jsou spojeny nehmotnými pevnými tyčkami délky 10 cm do uspořádání na obr. 4.25. Určete polohu těžiště těchto těles.

[a) x_s =20 cm, b) x_s =5 cm, y_s =7 cm, c) x_s =1 cm, y_s =2 cm, z_s=3 cm]

4.2 Určete polohu těžiště tenké tyčky délky l, jejž lineární hustota lineárně vzrůstá od τ_1 do τ_2.

$[x_s = \frac{l}{3}\ \frac{\tau_1+2\tau_2}{\tau_1+\tau_2}]$

4.3 Určete polohu těžiště homogenního rotačního kužele.

[ve vzdálenosti 3/4 výšky od vrcholu)

4.4 Částice téže hmotnosti m jsou umístěny v rozích krychle a spojeny pevnými nehmotnými tyčkami délky a. Určete moment setrvačnosti tohoto tělesa vzhledem k tělesové úhlopříčce krychle.

$[I = 4ma^2]$

obr. 4.25

4.5 Určete moment setrvačnosti tyčky délky l a hmotnosti m rotující kolem osy kolmé k tyčce a procházející a) jejím koncem, b) ve vzdálenosti $l/4$ od konce.

$$[I = \tfrac{1}{3}ml^2, \quad I = \tfrac{7}{48}ml^2]$$

4.6 Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního dutého válce o poloměrech r_1, r_2 a hmotnosti M vzhledem k jeho ose rotační symetrie.

$$[I = \tfrac{1}{2}M\ (\ r_1^2 + r_2^2\ )]$$

4.7 Je dán homogenní válec výšky h a poloměru podstavy R. Jaký musí být poměr h/R, aby tento válec byl kulovým setrvačníkem?

$$[\sqrt{3}]$$

4.8 Určete, s jakým zrychlením bude klesat k zemi (a opět stoupat) hračka zvaná jojo a jakou silou bude napínáno vlákno (obr. 4.26).

$$[a = \tfrac{2}{3}g\ ,\quad F_n = \tfrac{1}{3}mg]$$

4.9 Určete, jakou rychlostí bude klesat vědro s vodou o hmotnosti m, jehož závěs se odvíjí z rumpálu hmotnosti M a poloměru r (obr. 4.27)

$$[v = \tfrac{2mg}{2m+M}\ t]$$

4.10 Určete kinetickou energii obruče, plného válce a koule, které se valí po rovině postupnou rychlostí v.

$$[mv^2, \quad \tfrac{3}{4}mv^2, \quad \tfrac{7}{10}mv^2]$$

4.11 Na vodorovném homogenním kotouči hmotnosti M a poloměru R (kolotoči) stojí člověk hmotnosti m ve vzdálenosti r od svislé osy procházející středem kotouče, který se může otáčet bez tření. Jak velkou úhlovou rychlostí se bude otáčet kotouč, půjde-li člověk po kružnici poloměru r opsané kolem středu kotouče relativní rychlostí v vzhledem ke kotouči?

obr. 4.26

obr. 4.27

$[\omega = \frac{mvr}{\frac{1}{2}MR^2+mr^2}]$

obr. 4.28

4.12 Určete rychlost postupného pohybu válce a koule, které se začnou valit po nakloněné rovině o sklonu α, a klesnou přitom o výšku h.

$[\sqrt{\frac{4}{3}hg}, \quad \sqrt{\frac{10}{7}hg}]$

4.13 Určete rychlost postupného pohybu válce a koule, které se začnou valit po nakloněné rovině o sklonu α, za stejnou dobu t.

$[\frac{2}{3}gt\sin\alpha, \quad \frac{5}{7}gt\sin\alpha]$

4.14 *Atwoodův padostroj.* Přes kladku představující kotouč o momentu setrvačnosti I jsou na nehmotném závěsu zavěšena dvě břemena, s jedné strany břemeno hmotnosti m_1, s druhé strany břemeno o hmotnosti m_2. Závěs na kladce neprokluzuje. S jakým zrychlením bude klesat těžší břemeno?

$[a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}}\ g]$

4.15 Po nakloněné rovině svírající s vodorovnou rovinou úhel α se valí bez prokluzování plný homogenní válec. Určete a) velikost síly smykového tření válce na nakloněné rovině, b) maximální úhel α, při němž se válec bude ještě valit bez prokluzování, je-li koeficient smykového tření f.

$[F_{st} = \frac{1}{3}mg\sin\alpha, \quad \text{tg}\ \alpha_{max} = 3f]$

4.16 Homogenní dřevěná tyč délky $l = 40$ cm a hmotnosti $M = 1$ kg se může otáčet kolem osy, která je k ní kolmá a prochází těžištěm. Na konec tyče narazí střela hmotnosti $m = 10$ g rychlostí 200 m.s^{-1} ve směru kolmém k ose i tyči. Určete úhlovou rychlost ω, kterou nabude tyč, jestliže v ní střela uvázne.

$[\omega = \frac{6mv}{(M+3m)l} = 29,5\ \mathrm{s}^{-1}]$

4.17 Jakou rychlostí musí narazit střela hmotnosti m kolmo na spodní konec svisle zavěšené tyče hmotnosti M a délky l, aby ji vychýlila o úhel 90^0 ? Střela v tyči uvízne.

$[v = \frac{1}{m}\sqrt{gl(M+2m)\ (\frac{M}{3}+m)}]$

4.18 Tenká homogenní tyč hmotnosti M a délky l kývá kolem osy, která je k mí kolmá a prochází jejím horním koncem. a) Určete periodu malých kyvů. b) Existuje na tyči místo, do kterého můžeme připevnit těleso malých rozměrů (hmotný bod) o značné hmotnosti, aby se doba kyvu nezměnila? Kde?

[$T = 2\pi\ \sqrt{\frac{2}{3}\ \frac{l}{g}}$, je vzdáleno od bodu závěsu o $\frac{2}{3}l$]

4.19 Fyzické kyvadlo hmotnosti M je vytvořeno ze dvou stejných tyčí délky l spojených do tvaru T. Přitom může kývat zavěšeno za spodní konec dvěma způsoby: a) v rovině kolmé k rovině téčka, b) v rovině téčka (viz obr. 4.28). Určete periodu malých kyvů v těchto případech.

$[T = 2\pi\ \sqrt{\frac{17}{18}\ \frac{l}{g}}\ , \quad T = 2\pi\ \sqrt{\frac{16}{18}\ \frac{l}{g}}]$

4.20 Plný homogenní kotouč poloměru $r = 10$ cm kývá kolem osy, která prochází jeho okrajem a je kolmá k ose kotouče. Určete redukovanou délku tohoto kyvadla.

[$l_r = \frac{3}{2}\ r$ =15 cm]