Teoretická Fyzika 1 — Analytická Mechanika

Kniha: Klasická teoretická fyzika,
I. Štoll, J. Tolar, I. Jex, Karolinum 2017

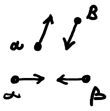
Mechanika klasická /relativistická /kvantová

— Newtonova mechanika (používá vektory)

Isaac Newton — 1. dílo teoretické fyziky

Matematické principy přírodní filozofie (1687)

1. Zákon setrvačnosti — inerciální vztažná soustava
2. Zákon síly $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $\quad m\vec{a} = \vec{F}$
3. Zákon akce a reakce $\vec{F}_{\alpha\beta} = -\vec{F}_{\beta\alpha}$ slabá verze



silná verze

Gravitační zákon

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = -\varkappa \frac{m_\alpha m_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \qquad \varkappa = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\, m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

síla kterou působí β na α

Newtonovy pohybové rce. $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$

— Analytická mechanika (používá skaláry)

Soubor alternativních formulací klasické mechaniky vycházejících z tzv. principů mechaniky.

Gottfried Wilhelm Leibniz — živá síla $m\vec{v}^2 = 2T$

Maupertuis, Bernoulli, Euler, d'Alembert, Laplace

Principy mechaniky => pohybové rovnice.

Např.: "Při pohybu soustavy mezi dvěma konfiguracemi je $S = \langle T \rangle - \langle U \rangle$ minimální."

(Fermatův princip 1662 — šíření světla)

- Lagrangeova mechanika 1788
- Hamiltonova mechanika 1833
- Hamilton—Jacobiho rovnice

Analytická Mechanika

výhody — eliminace síly, snadné zobecnění mimo oblast mechaniky (teorie pole, kvantová mechanika)
— efektivita pro složité úlohy s vazbami, elegance, možnost užití vyšší matematiky

Lagrangeův formalizmus — nejprve pro soustavu volných hmotných bodů

Počet stupňů volnosti s = nejmenší počet parametrů nutných k určení polohy (konfigurace) soustavy (počet navzájem nezávislých pohybů, které může soustava konat — pouze pro holonomní vazby)

- pro soustavu $N \in \mathbb{N}$ volných hmotných bodů v 3—dimenzionálním prostoru je $s = 3N$
- konfiguraci soustavy (polohu všech jejích bodů) budeme reprezentovat jediným bodem $\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$ v 3N rozměrném euklidovském prostoru tzv. **konfiguračním prostoru**

$$\vec{x} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = (r_{1_1}, r_{1_2}, \dots, r_{N_3}) = (x_1, \dots, x_{3N})$$

kartézské souřadnice $r_{\alpha_i} = x_{(\alpha-1)N+i}$

- hmotnosti $m_1 = m_2 = m_3$ hmotnost 1. bodu
  $m_4 = m_5 = m_6$ 2. bodu
  $\vdots$ $\vdots$

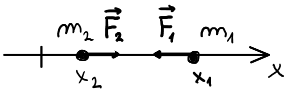
$(x_1, x_2, x_3) = \vec{r}_1$

$(x_4, x_5, x_6) = \vec{r}_2$

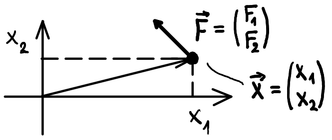
$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \qquad \frac{\partial r_{\alpha i}}{\partial r_{\beta j}} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}$$

hmotnosti budeme místo jednotlivým bodům přiřazovat jednotlivým stupňům volnosti $\mathbb{M} = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_{3N} \end{pmatrix}$

Př. $N = 2$ body v $\mathbb{R}$



⟶ 1 bod v $\mathbb{R}^2$



$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{pmatrix}$

Derivace funkce podle času: $F: \mathbb{R}^{2s+1} \to \mathbb{R}, \quad F = F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$

1) parciální derivace $\frac{\partial}{\partial t}$

$\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t$ jsou nezávislé proměnné fce. F

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t + \Delta t) - F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\Delta t}$$

2) funkce jedné proměnné $\frac{d}{dt}$

$\vec{x} = \vec{\tilde{x}}(t) \quad \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{\tilde{x}}}(t) = \frac{d\vec{\tilde{x}}(t)}{dt}$

složená funkce času

$$\tilde{F}(t) = F(\underbrace{\vec{\tilde{x}}(t), \dot{\vec{\tilde{x}}}(t)}, \underset{\uparrow}{t})$$

implicitní a explicitní závislost na čase

$$\dot{\tilde{F}}(t) = \frac{d\tilde{F}(t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\bigg|_{(\vec{\tilde{x}}(t), \dot{\vec{\tilde{x}}}(t), t)}$$

parciální derivace jsou vypočteny v bodě

Einsteinova sumace !!!

3) operátor úplné (totální) $\frac{\hat{d}}{dt}$ časové derivace

$$\dot{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, t) = \frac{\hat{d}}{dt}F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{\partial F}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\bigg|_{(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}$$

$$\frac{\hat{d}}{dt}f(\vec{x}) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\dot{x}_i \qquad i = 1$$

Stříšku nad operátorem psát nebudeme.

$$\begin{tikzcd}
F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \arrow[r, "\frac{\hat{d}}{dt}"] \arrow[d, "\vec{x} = \vec{\tilde{x}}(t)"] & \dot{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, t) \arrow[d, "\vec{x} = \vec{\tilde{x}}(t)"] \\
F(\vec{\tilde{x}}(t), \dot{\vec{\tilde{x}}}(t), t) \arrow[r, "\frac{d}{dt}"'] & \dot{F}(\vec{\tilde{x}}(t), \dot{\vec{\tilde{x}}}(t), \ddot{\vec{\tilde{x}}}(t), t) \\
" \tilde{F}(t) & " \dot{\tilde{F}}(t)
\end{tikzcd}$$

Začínat s popisem budeme vždy v inerciální vztažné soustavě (v kartézských souřadnicích).

Newtonovy rovnice $m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{F}_\alpha \quad \forall \alpha \in \widehat{N} \longrightarrow m_i \ddot{x}_i = F_i \quad \forall i \in \widehat{3N}$ nebo $\mathbb{M}\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$

V neinerciální soustavě bychom museli přidat setrvačné síly a najít pro ně potenciály.

- upravíme levou stranu rovnic $m_i \ddot{x}_i = F_i \quad \forall i \in \widehat{3N}$ (tj. bez sumace přes i)

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = F_i \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{1}{2}\sum_j m_j \dot{x}_j^2\right) = \frac{1}{2}\sum_j m_j 2\dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} = \sum_j m_j \dot{x}_j \delta_{ji} = m_i \dot{x}_i \quad \forall i \in \widehat{3N}$$

kinetická energie soustavy $T(\dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2$ má v kartézských souřadnicích vždy tento tvar

- Síly vtištěné (akční) na pravé straně rovnic nahradíme potenciály → Silové pole (síla) $\vec{F}$ se nazývá:

1) <u>konzervativní</u> $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ pokud $\exists U = U(\vec{x})$ potenciální energie tak, že $F_j(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_j} \quad \forall j \in \hat{s}$

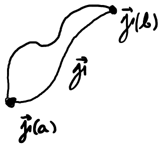
2) <u>potenciální</u> $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, t)$ pokud $\exists U = U(\vec{x}, t)$ potenciál tak, že $F_j(\vec{x}, t) = -\frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial x_j} \quad \forall j \in \hat{s}$

3) <u>zobecněná potenciální</u> $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ pokud $\exists U = U(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ tak, že $F_j(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = -\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\right) \quad \forall j \in \hat{s}$

(souhrnně tzv. monogenní síly – Goldstein) zobecněný potenciál

Pozn. práce konzervativních sil nezávisí na trajektorii

$$W = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(\ell)) \cdot \vec{\gamma}'(\ell)\, d\ell = \int_a^b -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}}(\vec{\gamma}(\ell)) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\ell}\, d\ell = -\int_a^b \frac{dU(\vec{\gamma}(\ell))}{d\ell}\, d\ell$$



Pozn. v $\mathbb{R}^3$ podmínka $\operatorname{rot}\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}(\vec{x}, t)$ je potenciální

$$= -\left[U(\vec{\gamma}(\ell))\right]_a^b = U(\vec{\gamma}(a)) - U(\vec{\gamma}(b))$$

Př. – homogenní tíhové pole $U(\vec{x}) = -m\vec{g} \cdot \vec{x}$

– centrální gravitační pole $U(\vec{x}) = -\varkappa \frac{Mm}{|\vec{x}|}$

– harmonický oscilátor (elastické pole) $U(\vec{x}) = \frac{1}{2}K\left(\sqrt{\vec{x}^2} - a_0\right)^2$

– Lorentzova síla (E.M. pole)

$$U(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = q\left(\varphi(\vec{x}, t) - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)\right)$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

- LR1D

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = F_i = F_i^{(nep)} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial U}{\partial x_i}}_{F_i^{(pot)}}$$

$T = T(\dot{\vec{x}})$ tj. $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial x_i} = F_i^{(nep)}$$

Lagrangeova funkce (v kartézských)

$$\boxed{\begin{aligned} &L = T - U \\ &L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2 - U(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \end{aligned}}$$

$$\forall i \in \widehat{3N} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^{(nep)}$$

Po vypočtení derivací funkce L dosadíme za x_i neznámé funkce času $x_i(t)$ a získáme tak obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu pro tyto neznámé funkce.

Pozn: Lagrangeovy funkce dvou neinteragujících soustav lze sečíst a získat Lagr. fci. popisující obě soustavy.

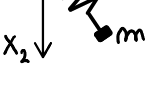
- **Nejednoznačnost Lagrangeovy funkce** $L' = L + \frac{d}{dt}h(\vec{x}, t) \qquad h = h(\vec{x}, t) \in C^2 \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial h}{\partial t}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{dh}{dt} =$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

$$= LS + \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i}\dot{x}_j + \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x_i} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\dot{x}_j - \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial t} = LS \Rightarrow L \text{ a } L' \text{ vedou na stejné LR1D}$$

Př. rovinný izotropní harmonický oscilátor



$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \qquad U = \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}_1) - (-kx_1) = m\ddot{x}_1 + kx_1 = 0$$

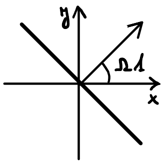
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}_2) - (-kx_2) = m\ddot{x}_2 + kx_2 = 0$$

Vazby, Konfigurační prostor a obecné souřadnice

Vazby – jakékoliv podmínky omezující pohyb hm. bodů nebo těles tvořících mechanickou soustavu

- holonomní – vazby které snižují počet stupňů volnosti, lze je zapsat ve tvaru $f_k(\vec{x},t)=0,\ \forall k\in\hat{n}$
- neholonomní – všechny ostatní (např. $g(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)=0,\ |\ddot{\vec{x}}|\leq K$)

- skleronomní (stacionární) – nezávislé na čase (např. $f(\vec{x})=0,\quad x^2+y^2+z^2-l^2=0$)
- rheonomní (nestacionární) – závislé na čase (např. $g(x,y,t)=x\cos\Omega t+y\sin\Omega t=0$



- udržující (oboustranné) – vyjádřené pomocí rovnosti $=$
- neudržující (jednostranné) – vyjádřené pomocí nerovností $>,\geq$

- ideální – nedochází k disipaci mechanické energie (Virtuální práce vazebných sil je nula)
- neideální – dochází k disipaci energie (např. tření)

Pozn: z řečtiny holos=celý sklérós=pevný, tvrdý
nomos=zákon rheó=teče, plyne

Pozn. Holonomní vazba je vždy udržující.

Skrytě holonomní vazby (semiholonomní) – vazby afinní v rychlostech, které lze nahradit holonomními

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i(\vec{x},t)\dot{x}_i+b(\vec{x},t)=0\ \Big/\cdot dt \qquad \dot{x}_i\,dt=dx_i$$

$$\Rightarrow \overbrace{\sum_{i=1}^{3N}\underbrace{a_i(\vec{x},t)}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}dx_i+\underbrace{b(\vec{x},t)}_{\frac{\partial f}{\partial t}}dt}^{\omega}=0$$

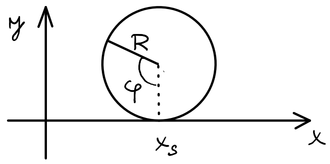
pokud je tato diferenciální forma exaktní tj. existuje $f=f(\vec{x},t),\ df=\omega$ pak je vazba skrytě holonomní

Vazba je skrytě holonomní pokud $\exists\mu=\mu(\vec{x},t)\neq 0$ (integrační faktor $\mu\omega=df$) a platí podmínky:

$$\frac{\partial(\mu a_i)}{\partial x_j}=\frac{\partial(\mu a_j)}{\partial x_i}\qquad \frac{\partial(\mu a_i)}{\partial t}=\frac{\partial(\mu b)}{\partial x_i}\qquad \forall i,j\in\widehat{3N}$$

Př. Valení válce bez prokluzování

(vzájemná rychlost bodů dotyku je nulová)



$$\dot{x}_s-R\dot{\varphi}=0\ \Big/\int dt \qquad \int\underbrace{\dot{x}_s dt}_{dx_s}-\int\underbrace{R\dot{\varphi}dt}_{d\varphi}=0$$

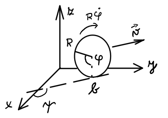
$$dx_s-R\,d\varphi=0$$

$$f(x_s,\varphi)=x_s+x_0-R\varphi=0$$ je holonomní

Př. Valení kotouče po rovině bez prokluzování a naklánění – neholonomní vazby

$$\dot{x}-R\dot{\varphi}\cos\psi=0\qquad \dot{y}-R\dot{\varphi}\sin\psi=0$$

neexistuje $f(x,y,\varphi,\psi)=0$

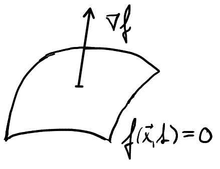


Holonomní soustava – soustava, která je podrobena pouze holonomním nebo semiholonomním vazbám – dále budeme pracovat pouze s holonomními soustavami a zapisovat všechny jejich vazby jako holonomní

Vazbové síly holonomních vazeb (Reakční síly) – nejsou známé předem (na rozdíl od akčních sil)

$$\vec{F}^{(vaz)}=\underset{\uparrow}{\vec{T}}+\underset{\uparrow}{\vec{N}}\in\mathbb{R}^{3N}$$ pro jednu vazbu $f(\vec{x},t)=0$

tečná a normálová složka



$$\vec{N}=\lambda\nabla f\qquad N_i=\lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}\quad\forall i\in\widehat{3N}$$

Lagrangeův multiplikátor λ

- určuje velikost vazbové síly
- představuje novou neznámou fci. $\lambda=\lambda(t)=?$ která se objeví v pohybových rovnicích

holonomní vazba
- hladká $\vec{T}=0$ (ideální)
- drsná $\vec{T}\neq 0$ (tření, neideální)

Př. izotropní vlečné tření $\vec{T}=-K|\lambda\nabla f|\frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$

pro $n\in\mathbb{N}$ hladkých holonomních vazeb $f_k(\vec{x},t)=0$ platí $F_i^{(vaz)}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$

Pozn. Nebude-li řečeno jinak, pak holonomní vazbu považujeme vždy za hladkou.

Konfigurační prostor (varieta)... množina všech možných konfigurací (poloh všech bodů) soustavy

$$M(t)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^{3N}\mid f_k(\vec{x},t)=0\ \forall k\in\hat{n}\}\subseteq\mathbb{R}^{3N}$$

dimenze M(t) = dimenze tečného prostoru k M(t)

Vazby jsou <u>nezávislé,</u> pokud nelze žádnou z nich vynechat, aniž by se změnil konfigurační prostor.

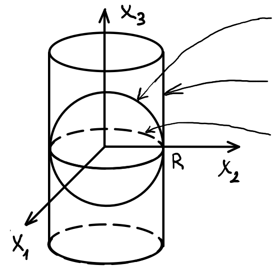
Pokud je $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_r)$ $\forall \vec{x} \in M(t)$, $\forall t$ lineárně nezávislý soubor vektorů, pak jsou vazby nezávislé a platí $\dim M(t) = 3N - r = s$ (počet stupňů volnosti).

$$\underbrace{f_k(\vec{x},t)=0 \quad \forall k \in \hat{r}}_{\text{"obecné rovnice" konf. prostoru}}$$

Jsou–li vazby závislé, pak přebytečné vazby vypustíme a zbylých r nezávislých vazeb zapíšeme v takovém tvaru, aby jejich gradienty tvořily lineárně nezávislý soubor tj. aby hodnost matice

$$h\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_{3N}} \end{pmatrix} = r \quad \forall \vec{x} \in M(t) \quad \forall t.$$

Př. bod na povrchu koule a válce



$f_1(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0$

$f_2(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$

M = kružnice s osou z a středem v počátku

popíšeme M pomocí funkcí s LN gradienty

$f_1(\vec{x}) - f_2(\vec{x}) = x_3^2 = 0 \iff \tilde{f}_1(\vec{x}) = x_3 = 0$

$\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$ $\nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ jsou LZ pro $x_3 = 0$

$\nabla \tilde{f}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ jsou LN na M

Obecné souřadnice φ

$s = 3 \cdot 1 - 2 = 1$

$x_1 = R\cos\varphi$
$x_2 = R\sin\varphi$
$x_3 = 0$

- soustava N hm. bodů s $r \in \mathbb{N}_0$ (nezávislými) holonomními vazbami $f_k(\vec{x},t) = 0$ $\forall k \in \hat{r}$ (fce. třídy C^1)

Lagrangeovy rovnice 1. druhu (1775)

$$\boxed{\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \\ f_j(\vec{x},t) &= 0 \quad \forall j \in \hat{r} \quad \forall i \in \widehat{3N} \end{aligned}} \; + \underbrace{\sum_{k=1}^{r} T_i^{(k)}}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ \shortparallel}}$$

pro hladké vazby

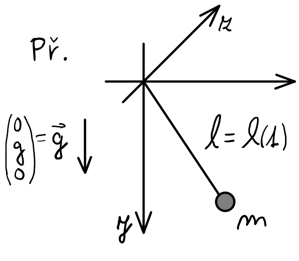
- pro soustavu N hmotných bodů s holonomními vazbami v inerciální vztažné soustavě (kartézské souřadnice) získáme přidáním rovnic vazeb a vazebných sil do původních rovnic
- 3N obyčejných diferenciálních rovnic II. řádu a r algebraických rovnice pro $3N + r$ neznámých funkcí $x_i(t) = ?$ $i \in \widehat{3N}$, $\lambda_k(t) = ?$ $k \in \hat{r}$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \\ f_j(\vec{x},t) &= 0 \quad \forall j \in \hat{r} \quad \forall i \in \widehat{3N} \end{aligned}} + \sum_{k=1}^{r} T_i^{(k)}$$

Pokud vazby nejsou hladké pak se tečné složky vazebných sil obvykle zahrnou mezi zbylé nepotenciální síly.

Pozn. $L'(\vec{x}, \vec{\lambda}, \dot{\vec{x}}, t) = L + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_k$ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}_k}\right) - \frac{\partial L'}{\partial \lambda_k} = 0$

Př.



vazby: $f_1(z) = z = 0$
$f_2(x,y) = x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$

$\vec{F}_1^{(vaz)} = \lambda_1 \nabla f_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{F}_2^{(vaz)} = \lambda_2 \nabla f_2 = \lambda_2 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$m\ddot{x} = 0 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 + 0 + 2\lambda_2 x$$
$$m\ddot{y} = mg + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = mg + 0 + 2\lambda_2 y$$
$$m\ddot{z} = 0 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 + \lambda_1 + 0$$

$\Big\}$ $y\ddot{x} - x\ddot{y} = -xg$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{m\ddot{x}}{2x}$

substituce
$x = l\sin\varphi$
$y = l\cos\varphi$

$2l\dot{l}\dot{\varphi} + l^2\ddot{\varphi} + gl\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi(t)$

Obecné (zobecněné) souřadnice q_j $j \in \hat{s}$ – parametry, které jednoznačně popisují možné konfigurace soustavy (lokální souřadnice na konfigurační varietě)

$\vec{x} = \hat{\vec{x}}(\vec{q}, t)$ $\qquad \hat{\vec{x}} : \mathbb{R}^{s+1} \to \mathbb{R}^{3N}$

POZOR $\vec{q} = (q_1, \dots, q_s)$ již není vektor, ale jen uspořádaná s–tice

$x_i = \hat{x}_i(q_1, \dots, q_s, t)$ $\quad i \in \widehat{3N}$ $\quad$ parametrické rovnice konf. prostoru (z věty o implicitní funkci) $\quad h\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right) = s$

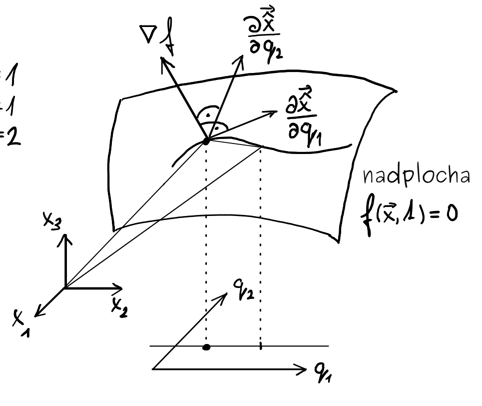
funkce třídy C^2 zvolené tak, aby splnily vazby:

$$\hat{f}_k(\vec{q}, t) = f_k(\hat{\vec{x}}(\vec{q}, t), t) \equiv 0 \quad \forall \vec{q} \; \forall t \quad \forall k \in \hat{r}$$

skalární součin

$$0 = \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \underbrace{\nabla f_k}_{\text{normálový vektor k nadploše } f_k(\vec{x},t)=0} \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{\vec{x}}}{\partial q_j}}_{\text{tečný vektor k j–té souřadnicové křivce ležící v nadploše}}$$

Př. $\mathbb{R}^3$
$N = 1$
$r = 1$
$s = 2$



Pozn. závislost na čase je dána vývojem vazby, v případě skleronomních vazeb bude $x_i = \hat{x}_i(\vec{q})$ $\forall i \in \widehat{3N}$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu (pro holonomní soustavu N hm. bodů s $r \in \mathbb{N}_0$ nezávislými vazbami)

$$\boxed{\begin{array}{ll}\text{Lagr. rce. 1. druhu:} \quad f_k(\vec{x},t)=0 & \forall k \in \hat{r} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} & \forall i \in \widehat{3N}\end{array}}$$

převedeme do obecných souřadnic $x_i = \hat{x}_i(\vec{q},t) \quad \forall i \in \widehat{3N}$

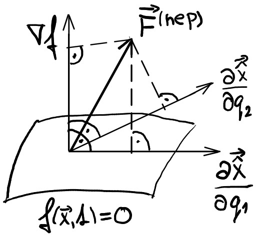
tím splníme rovnice vazeb $\hat{f}_k(\vec{q},t) = f_k(\vec{x}(\vec{q},t),t) \equiv 0 \quad \forall k \in \hat{r}\ \forall \vec{q}\ \forall t$

Zbylých 3N diferenciálních rovnic vezmeme jako sloupcový vektor a přenásobíme maticí $\mathbb{S}^T$

kde $\mathbb{S} = \Big(\underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_s}}, \underbrace{\nabla f_1, \dots, \nabla f_r}\Big)$ je regulární matice řádu $3N \times 3N$

báze tečného a normálového prostoru ke konfiguračnímu prostoru $M(t)$

Př. $\mathbb{R}^3$



(1) $$\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right] = \underbrace{\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} F_i^{(nep)}}_{Q_j^{(nep)}} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \underbrace{\underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}}\ \underbrace{\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}}}_{\nabla f_k \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} = 0}$$

prvních s rovnic $\forall j \in \hat{s} \quad \Big/ \sum_{i=1}^{3N}$

(2) $$\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right] = \frac{\partial f_l}{\partial x_i} F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \underbrace{\underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}}\ \underbrace{\frac{\partial f_l}{\partial x_i}}}_{\nabla f_k \cdot \nabla f_l = G_{kl}}$$

dalších r rovnic $\forall l \in \hat{r} \quad \Big/ \sum_{i=1}^{3N} \quad \Big/ \cdot (\mathbb{G}^{-1})_{lm}$

prvky Gramovy matice souboru $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_r)$

$\det \mathbb{G} = \det(G_{kl}) \neq 0 \Leftrightarrow$ je LN soubor

$$(\mathbb{G}^{-1})_{lm}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right] - \frac{\partial f_l}{\partial x_i} F_i^{(nep)}\right) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k G_{kl} (\mathbb{G}^{-1})_{lm} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \delta_{km} = \lambda_m \quad \forall m \in \hat{r} \quad \Big/ \sum_{i=1}^{3N}$$

Tím je těchto r rovnic vyřešeno. Dále upravíme levou stranu prvních s rovnic. K tomu využijeme:

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{jk} = \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} \qquad \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} = 0 = \frac{\partial q_k}{\partial \dot{q}_j} \qquad x_i = \hat{x}_i(\vec{q},t) \qquad \dot{x}_i = \dot{\hat{x}}_i = \frac{d\hat{x}_i}{dt} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} \qquad \dot{x}_i = \dot{\hat{x}}_i(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$$

obecné souřadnice a rychlosti jsou navzájem nezávislé

1) $$\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

2) $$\frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} + 0 = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\delta_{jk} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_k}$$

"pravidlo krácení teček"

3) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 \hat{x}_i}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \hat{x}_i}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\hat{x}_i}{dt}\right) = \frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j}$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} = Q_j^{(nep)} \qquad \forall j \in \hat{s}}$$

- neobsahují vazbové síly (ideálních holonomních vazeb)
- jejich tvar nezávisí na konkrétní volbě obecných souřadnic
- rovnice pro proměnné $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$, dosazením $q_i = \tilde{q}_i(t)$, $\dot{q}_i = \dot{\tilde{q}}_i(t)$, $\ddot{q}_i = \ddot{\tilde{q}}_i(t)$ dostaneme obyčejné difr. 2. řádu

Obecná nepotenciální síla

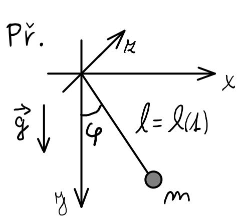
$$Q_j^{(nep)} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} F_i^{(nep)}$$

Lagrangeova funkce (v obecných) - není určena jednoznačně

$$\hat{L}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = L(\vec{x}(\vec{q},t), \dot{\vec{x}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t), t) \qquad \hat{L}' = \hat{L} + \frac{d}{dt}h(\vec{q},t)$$

při $Q_j^{(nep)} = 0$ plně charakterizuje holonomní soustavu s ideálními vazbami

Př.



vazby: $f_1(z) = z = 0$

$f_2(x,y) = x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$

$\boxed{s = 3 - 2 = 1}$

obecné souřadnice φ

$x = l(t)\sin\varphi$

$y = l(t)\cos\varphi$

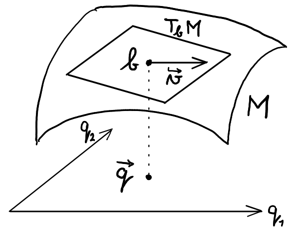
$z = 0$

$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy$

$\hat{L} = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2(t) + l^2(t)\dot{\varphi}^2) + mgl(t)\cos\varphi$

LR2.D $$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(ml^2(t)\dot{\varphi}\right) - (-mgl(t)\sin\varphi) = 2ml(t)\dot{l}(t)\dot{\varphi} + ml^2(t)\ddot{\varphi} + mgl(t)\sin\varphi$$

Pozorovatelné veličiny (polohy, rychlosti, hybnosti, momenty, síly, energie ...) jsou funkce $2s+1$ proměnných $\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t$ na tzv. rozšířeném rychlostním fázovém prostoru $\underbrace{TM}_{\text{tečný bandl}} \times \mathbb{R}$ kde $TM = \bigcup_{b \in M} \underbrace{T_b M}_{\text{tečný prostor k M v bodě b}}$



Kinetická energie v obecných souřadnicích

$$\hat{T}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = T(\dot{\vec{X}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{X}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} \overbrace{m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l}}^{T_{kl}(\vec{q},t)} \dot{q}_k \dot{q}_l +$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}}_{\beta_k(\vec{q},t)}\dot{q}_k + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l}}_{\beta_l(\vec{q},t)}\dot{q}_l + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial t}}_{\alpha(\vec{q},t)} = \underbrace{\frac{1}{2}T_{kl}(\vec{q},t)\dot{q}_k\dot{q}_l}_{\text{P.D.}} + \beta_k(\vec{q},t)\dot{q}_k + \alpha(\vec{q},t)$$

- pokud jsou všechny vazby skleronomní pak $\hat{T}(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2}T_{kl}(\vec{q})\dot{q}_k\dot{q}_l$ je homogenní stupně 2 v rychlostech

Obecná síla $Q_j = \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} + Q_j^{(nep)}$

Obecná (kanonická) hybnost $p_j = p_j(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$

(nemusí mít rozměr hybnosti)

Pozn. LR2D: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) = Q_j^{(nep)} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} \iff \dot{p}_j = Q_j$

Př. $L = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 - e(\varphi - \dot{x}_i A_i)$ $\quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j + eA_j \neq m\dot{x}_j$

Obecná energie $E = E(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \hat{L}$

(má rozměr energie)

Pokud je $\hat{T}$ homogenní fce. 2. stupně v rychlostech $\dot{\vec{q}}$ (všechny vazby jsou skleronomní) a $\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \ \forall j \in \hat{s}$ pak E je celková mechanická energie soustavy.

$$E = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \hat{L} = \underbrace{\frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j}_{=2\hat{T}} - \underbrace{\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j}_{=0} - (\hat{T} - \hat{U}) = \hat{T} + \hat{U}$$

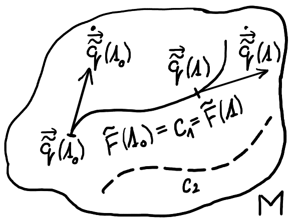
Integrály pohybu (zákony zachování) – jsou 1. integrály pohyb. rovnic, fce. konstantní podél trajektorie

Funkce $F(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ je integrálem pohybu pro systém popsaný pohybovými rovnicemi $\vec{R}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\ddot{\vec{q}},t) = 0$, pokud pro každé jejich řešení $\vec{q} = \vec{q}(t)$ (tzv. trajektorii) $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $\tilde{F}(t) = F(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) = c \ \forall t$.

Funkce $F = F(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ je I. P. $\iff 0 = \frac{dF}{dt}\Big|_{\underbrace{\vec{R}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\ddot{\vec{q}},t)=0}} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\right)\Big|_{\vec{R}=0}$

$\Rightarrow \ddot{q}_i = G_i(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$

ověřit, že F je I. P. znamená řešit LR2D jako lineární algebraické rovnice pro $\ddot{\vec{q}}$ a toto řešení dosadit do $\frac{\hat{d}F}{dt} = 0$



Dále budeme předpokládat, že na soustavu nepůsobí žádné nepotenciální síly tj. $Q_j^{(nep)} = 0$, pak lze některé integrály pohybu nalézt na základě chybějících proměnných v předpisu Lagrangeovy funkce:

1) čas t $\quad \hat{L} = \hat{L}(\vec{q},\dot{\vec{q}})$ tj. $\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} = 0 \longrightarrow$ obecná energie $E = E(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = konst.$ je I. P.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \hat{L}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j - \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial \hat{L}}{\partial t}\right] = \dot{q}_j \underbrace{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j}\right]}_{\text{LR2D} \ = Q_j^{(nep)}} - \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} = \underbrace{\dot{q}_j Q_j^{(nep)}}_{\text{výkon sil nepotenciálních}} - \underbrace{\frac{\partial \hat{L}}{\partial t}}_{=0} = 0$$

Pozn. Obecná energie holonomní soustavy se skleronomními vazbami a konzervativními silami je konstantní.

2) cyklická souřadnice q_k, $k \in \hat{s}$ tj. $\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_k} = 0 \longrightarrow$ obecná hybnost $p_k = p_k(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = konst.$ je I. P.

je souřadnice, na které Lagr. fce. $\hat{L}$ nezávisí

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{p_k} - \underbrace{\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_k}}_{=0} = Q_k^{(nep)} = 0 \Rightarrow \frac{dp_k}{dt} = 0 \text{ tj. } \dot{p}_k = 0$$

Pozn. 3) $\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_k} = Q_k^{(nep)} = 0$ nenastává

Teorém Noetherové (1915) spojité symetrie -> zákony zachování

"Ke každé jednoparametrické grupě transformací konfiguračního prostoru které ponechávají Lagrangeovu funkci invariantní (symetrie Lagr. fce.) existuje integrál pohybu. "

Grupou G je každá neprázdná množina spolu s operací (součin) $\cdot : G \times G \to G$ splňující:

1, $\forall a, b, c \in G \quad a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ asociativita

2, $\exists e \in G \ \forall a \in G \quad a\cdot e = e\cdot a = a$ jednotka

3, $\forall a \in G \ \exists_1 a^{-1} \in G \quad a^{-1}\cdot a = a\cdot a^{-1} = e$ inverzní prvek

Př. $(\mathbb{Z}, +)$ $(\mathbb{R}/\{0\}, \cdot)$

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \middle| \varepsilon \in \mathbb{R} \right\}$$

Transformace (aktivní) $\phi^\varepsilon \in \mathrm{Dif}(M)$ je zde bijekce $\phi^\varepsilon : M \to M$ taková, že ϕ^ε a $(\phi^\varepsilon)^{-1}$ jsou třídy C^1.

Jednoparametrická grupa transformací M je spojitý homomorfizmus grup $\phi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathrm{Dif}(M), \circ)$

$$\phi : \varepsilon \to \phi^\varepsilon \qquad \phi^0 = \mathrm{Id} \qquad \phi^{\varepsilon+\delta} = \phi^\varepsilon \circ \phi^\delta \qquad (\phi^\varepsilon)^{-1} = \phi^{-\varepsilon}$$

Znění, které dokážeme:

Transformace (aktivní)

$$q_j' = q_j'(\vec{q}, \varepsilon) = \phi_j^\varepsilon(\vec{q}) \quad \text{fce. třídy } C^2, \ \det\left(\frac{\partial q_i'}{\partial q_j}\right) \neq 0$$

$$q_j'(\vec{q}, 0) = q_j \qquad \forall j \in \hat{s}$$

$$\dot{q}_j' = \dot{q}_j'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \varepsilon) = \phi_{*j}^\varepsilon(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{d q_j'}{dt} = \frac{\partial q_j'}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

Invariance Lagrangeovy funkce $\forall \vec{q} \ \forall \dot{\vec{q}} \ \forall t \ \forall \varepsilon$

$$L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t, \varepsilon) := L(\vec{q}'(\vec{q}, \varepsilon), \dot{\vec{q}}'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \varepsilon), t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

$$\Downarrow$$

Veličina $I(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial q_k'}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ je I. P.

Důkaz: invariance $L \iff \forall \varepsilon \forall \vec{q} \forall \dot{\vec{q}} \forall t$

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial \varepsilon}\bigg|_{(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t, \varepsilon)} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\bigg|_{(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)} \cdot \frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon}\bigg|_{(\vec{q}, \varepsilon)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bigg|_{(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)} \cdot \frac{\partial \dot{q}_i'}{\partial \varepsilon}\bigg|_{(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \varepsilon)} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon} =$$

$$\frac{\partial \dot{q}_i'}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{d q_i'}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial q_i'}{\partial q_k} \dot{q}_k\right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial q_i'}{\partial q_k}\right) \dot{q}_k = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon}\right) \dot{q}_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon}\right)$$

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\bigg|_{(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)} \cdot \frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon}\right)$$

zeslabíme požadavky z $\forall \varepsilon$ na $\varepsilon = 0$ a dosadíme z LR2D

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]}_{= -Q_i^{(nep)} = 0 \ \forall i \in \hat{s}}\bigg|_{(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)} \cdot \frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right)\bigg|_{\vec{R}=0} = \frac{d}{dt}(I)\bigg|_{\vec{R}=0}$$

LR2D $\vec{R}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}, t) = 0 \Rightarrow$

QED.

Pozn. $L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t, \varepsilon) = L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t, 0) + \frac{\partial L'}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon = \text{lin. část}\left[L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t, \varepsilon) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\right]$$

Infinitezimální verze teorému:

Transformace (Taylorův rozvoj do 1. řádu v ε)

$$q_j' = q_j'(\vec{q}, 0) + \frac{\partial q_j'}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = q_j + Y_j \cdot \varepsilon \qquad \underbrace{Y_j = \frac{\partial q_j'}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = Y_j(\vec{q})}_{\text{vektorové pole tzv. generátor transformace}}$$

$$\dot{q}_j' = \frac{d q_j'}{dt} = \dot{q}_j + \dot{Y}_j \cdot \varepsilon \quad \text{kde } \dot{Y}_j = \frac{\partial Y_j}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Invariance L do 1. řádu v ε $\forall \vec{q} \ \forall \dot{\vec{q}} \ \forall t$

$$\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial q_i} Y_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{Y}_i = 0$$

$$\Downarrow$$

Veličina $I(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} Y_k$ je I. P.

Př. rotace kolem osy x_3

$$x_1' = x_1 \cos\varepsilon - x_2 \sin\varepsilon$$
$$x_2' = x_1 \sin\varepsilon + x_2 \cos\varepsilon$$
$$x_3' = x_3$$

$$Y_1 = \left(\frac{\partial x_1'}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = (-x_1 \sin\varepsilon - x_2 \cos\varepsilon)_{\varepsilon=0} = -x_2$$
$$Y_2 = \left(\frac{\partial x_2'}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = (x_1 \cos\varepsilon - x_2 \sin\varepsilon)_{\varepsilon=0} = x_1$$
$$Y_3 = \left(\frac{\partial x_3'}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0$$

Infinitezimálně

$$x_1' = x_1 - x_2 \varepsilon$$
$$x_2' = x_2 + x_1 \varepsilon$$
$$x_3' = x_3$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \mathbb{1}\vec{x} + \varepsilon \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{\mathbb{A}} \vec{x}$$

Pokud

$$L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t) = L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \Rightarrow I = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} Y_i = p_i Y_i = p_1(-x_2) + p_2 x_1 + 0 = L_3$$

(pro infinitezimální do 1. řádu v ε)

Pozn. původní transformace $\vec{x}' = \exp(\varepsilon \mathbb{A}) \vec{x}$

$$\exp(\varepsilon \mathbb{A}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^k \mathbb{A}^k}{k!} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon & 0 \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Základní principy mechaniky

– jiné matematicky ekvivalentní formulace zákonů mechaniky

- **Diferenciální principy** – určují chování mechanické soustavy (trajektorii) lokálně v okolí daného bodu

1) Princip virtuální práce

(Bernoulli 1708–1717) – statická rovnováha systému N částic:

Statická rovnováha (rovnovážná konfigurace) soustavy částic nastává pokud jsou souřadnice všech částic konstantní.

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0 = \begin{pmatrix} X_{0,1} \\ \vdots \\ X_{0,3N} \end{pmatrix} \quad \forall t \quad \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{X}}(t) = 0,\ \ddot{\vec{X}}(t) = 0\ \forall t \overset{2NZ}{\Rightarrow} \boxed{\vec{F}(\vec{X}_0, 0, t) = 0\ \forall t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{F}(\vec{x}_0, 0, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$ uvažujeme pouze síly nezávislé na čase

$$\Leftarrow \quad \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0,\ \dot{\vec{X}}(t_0) = 0,\ m_i \ddot{X}_i(t_0) = F_i(\vec{X}_0, 0) = 0 \quad \forall i \in \widehat{3N} \Rightarrow m_i \dddot{X}_i(t_0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} F_i(\vec{X}, \dot{\vec{X}}) = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(\vec{X}_0, 0)\underbrace{\dot{X}_j(t_0)}_{=0} + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{X}_j}(\vec{X}_0, 0)\underbrace{\ddot{X}_j(t_0)}_{=0} = 0$$

$$\vdots$$

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(t_0) + \dot{\vec{X}}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\vec{X}}(t_0)(t - t_0)^2 + \ldots = \vec{X}_0$$

omezíme se na analytické funkce $x(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ e^{-\frac{1}{t^2}} & t \neq 0 \end{cases}$ nefunguje Taylor v 0

neplatí to pro tzv. flat funkce

a) volných (2NZ)

$$0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \Leftrightarrow 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{X} \quad \underbrace{\forall \delta\vec{X} \in \mathbb{R}^{3N}}$$

↑ výslednice sil

(stačilo by pro lib. bázi $\mathbb{R}^{3N}$)

stačí libovolně malé – infinitezimální

Vektor $\delta\vec{X} = \vec{X} - \vec{X}_0$ je (virtuální) posunutí z rovnovážné polohy $\vec{X}_0$ do bodu $\vec{X}$

Pozn. práce $A = \int_\gamma \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ je integrál z diferenciální formy $\overset{\text{nemusí být exaktní}}{đA}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) \cdot \underbrace{d\vec{x}}_{\text{musí být malé (infinitezimální)}}$ po křivce γ (kdy $d\vec{x} = \gamma'(l)\,dl$)

Virtuální práce $\delta A(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}, 0) \cdot \delta\vec{X} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i$ je práce sil při virtuálních posunutích

Princip virtuální práce:

$\vec{X}_0$ je rovnovážná konfigurace $\Leftrightarrow \delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{X}_0, 0) \cdot \delta\vec{X} = 0 \quad \forall \delta\vec{X}$

Pozn. Variace funkce (izochronní $\delta t = 0$)

$$f = f(\vec{x}, t) \qquad f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i}_{=\delta f} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\delta x_i \delta x_j}_{=\delta^2 f} + \ldots = f(\vec{x}, t) + \delta f(\vec{x}, t) + \frac{1}{2}\delta^2 f(\vec{x}, t) + \ldots$$

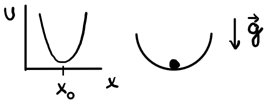
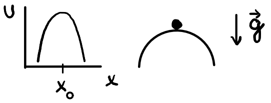
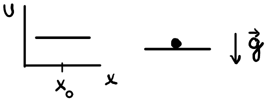
$$\delta f = \text{lineární část}\,[f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) - f(\vec{x}, t)]$$

Jsou-li všechny síly konzervativní

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \quad \text{pak}$$

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{X} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \cdot \delta\vec{X} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i = -\delta U$$

a rovnovážné polohy $\vec{X}_0$ jsou stacionární body $\delta U(\vec{x}_0) = 0$ potenciální energie.

Typ polohy	$U(\vec{x}_0)$	např.	
• stabilní	minimum	$\delta^2 U(\vec{X}_0) > 0$	
• labilní	maximum	$\delta^2 U(\vec{X}_0) < 0$	
• indiferentní	ostatní	"$(\delta^2 U = 0)$"	

b) vázaných – podrobených holonomním skleronomním vazbám $f_k(\vec{x}) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

Rozložíme posunutí a síly do směru tečného a normálového ke konf. pr. M v bodě $\vec{x}_0$

$\delta\vec{x} = \delta\vec{x}^T + \delta\vec{x}^N \quad \vec{F} = \vec{F}^T + \vec{F}^N$

(LR1D) $0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) + \vec{R}(\vec{x}_0, 0) = \vec{F} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k \Leftrightarrow 0 = \left(\vec{F} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k\right) \cdot \delta\vec{X} \quad \forall \delta\vec{X} \in \mathbb{R}^{3N}$

vtištěné síly (akční) – vazbové síly (reakční)

$f_k(\vec{X}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$ $\qquad$ $f_k(\vec{X}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(\vec{F}^T + \vec{F}^N + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k\right) \cdot (\delta\vec{x}^T + \delta\vec{x}^N) = (\underbrace{\vec{F}^T + \vec{F}^N}_{\vec{F}}) \cdot \delta\vec{x}^T + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \underbrace{\nabla f_k \cdot \delta\vec{x}^T}_{=0} + \underbrace{\vec{F}^T \cdot \delta\vec{x}^N}_{=0} + \underbrace{\left(\vec{F}^N + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k\right)}_{=0} \cdot \delta\vec{x}^N = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x}^T \quad \forall \delta\vec{x}^T \in \mathbb{R}^{3N}$$

$f_k(\vec{X}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

zvolíme $-\lambda_k$ jako složky $\vec{F}^N$ v bázi $(\nabla f_1, \ldots, \nabla f_r)$ normálového prostoru k M v bodě $\vec{x}_0$

$\delta\vec{x}^T \cdot \nabla f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

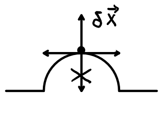
Princip virtuální práce

$$\boxed{\begin{array}{ll} \delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x} = 0 & \forall \delta\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \\ f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \hat{r} & \delta\vec{x} \cdot \nabla f_k(\vec{x}_0) = 0 \end{array}}$$

Soustava částic je v rovnovážné konfiguraci $\vec{x}_0 \in M \subset \mathbb{R}^{3N} \Leftrightarrow$ virtuální práce vtištěných sil je rovna nule $\delta A(\vec{x}_0) = 0 \Leftrightarrow$ práce vtištěných sil při virtuálních posunutích ve shodě s vazbami je nulová.

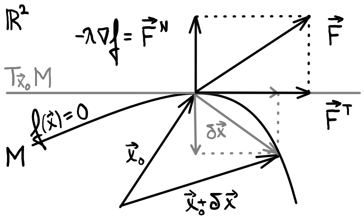
Pozn. uvažovali jsme pouze udržující vazby a jim odpovídající vratná posunutí $(\forall \delta\vec{x}\ \exists -\delta\vec{x})$

pro neudržující vazby a nevratná posunutí je třeba princip modifikovat $\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{x} \leq 0$



Posunutí ve shodě s vazbou $f(\vec{x})=0$ $\underbrace{f(\vec{x}_0+\delta\vec{x})}_{=0} = \underbrace{f(\vec{x}_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{x}}}_{\nabla f(\vec{x}_0)}\cdot \underbrace{\delta\vec{x}}_{} + \underbrace{\mathcal{O}(|\delta\vec{x}|^2)}_{\doteq 0}$

malé posunutí (infinitezimální)



Virtuální posunutí – myšlené okamžité infinitezimální posunutí ve shodě s vazbou

Jsou-li všechny vtištěné síly konzervativní $\vec{F}(\vec{x})=-\nabla U(\vec{x})$ pak $0=\delta A=(-\nabla U+\lambda_k\nabla f_k)\cdot\delta\vec{x}=-\delta(U-\underbrace{\lambda_k f_k}_{})=-\delta\tilde{U}$
a úloha se redukuje na hledání vázaného extrému funkce $U(\vec{x})$ vzhledem k varietě M

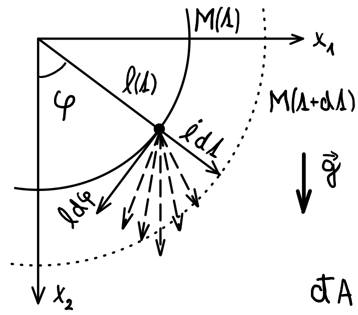
"potenciální energie vazebných sil"

t. j. $\delta\tilde{U}(\vec{x}_0)=0$ $f_k(\vec{x}_0)=0$ $\forall k\in\hat{r}$ $\delta^2\tilde{U}(\vec{x}_0)\Big/_{T_{\vec{x}_0}M}$ >0 stabilní
<0 labilní
$=0$ indiferentní

Infinitezimální posunutí holonomní soustavy s rheonomními vazbami $f_k(\vec{x},t)=0$ $\forall k\in\hat{r}$ $\vec{x}=\vec{X}(\vec{q},t)$

- možné (reálné) $0=df_k=\frac{\partial f_k}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_k}{\partial t}dt$ $dx_i=\frac{\partial\hat{X}_i}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial\hat{X}_i}{\partial t}dt$ $f(\vec{x}+d\vec{x},t+dt)=f(\vec{x},t)+\frac{\partial f}{\partial\vec{x}}\cdot d\vec{x}+\frac{\partial f}{\partial t}dt+\dots$
- virtuální $0=\delta f_k=\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\delta x_i$ $\delta x_i=\frac{\partial\hat{X}_i}{\partial q_j}\delta q_j$ $f(\vec{x}+\delta\vec{x},t)=f(\vec{x},t)+\frac{\partial f}{\partial\vec{x}}\cdot\delta\vec{x}+\dots$
- skutečné $0=d\tilde{f}_k=\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\dot{\tilde{x}}_i+\frac{\partial f_k}{\partial t}\right)dt$ $d\tilde{x}_i=\left(\frac{\partial\hat{X}_i}{\partial q_j}\dot{\tilde{q}}_j+\frac{\partial\hat{X}_i}{\partial t}\right)dt$ lze získat z možného posunutí dosazením trajektorie $x_i=\tilde{x}_i(t)$, $q_j=\tilde{q}_j(t)$

Př.



$f(x_1,x_2,t)=x_1^2+x_2^2-l^2(t)=0$

$x_1=l(t)\sin\varphi$
$x_2=l(t)\cos\varphi$
$\vec{F}=\begin{pmatrix}0\\mg\end{pmatrix}$

Virtuální posunutí a virtuální práce

$0=\delta f=2x_1\delta x_1+2x_2\delta x_2$ $\delta\vec{x}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\-\sin\varphi\end{pmatrix}l\delta\varphi$

$\delta A=(\vec{F}+\lambda\nabla f)\cdot\delta\vec{x}=\vec{F}\cdot\delta\vec{x}+\underbrace{\lambda\nabla f\cdot\delta\vec{x}}_{=0}=0\cdot\delta x_1+(mg)\delta x_2$ virtuální práce vazebných sil

Možné posunutí a práce

$0=df=2x_1dx_1+2x_2dx_2-2l\dot{l}dt$ $d\vec{x}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\-\sin\varphi\end{pmatrix}ld\varphi+\begin{pmatrix}\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}\dot{l}dt$

skutečná práce

$dA=(\vec{F}+\lambda\nabla f)\cdot d\vec{x}=\vec{F}\cdot d\vec{x}+\lambda\nabla f\cdot d\vec{x}=0\cdot dx_1+mgdx_2+2\lambda x_1dx_1+2\lambda x_2dx_2=mgdx_2+\overbrace{\lambda 2l\dot{l}dt}$

Př. pro $l=\text{konst.}$ $0=\delta A=mg\delta x_2=-mg\underbrace{\sin\varphi}_{=0}\delta\varphi \Rightarrow \varphi=0,\pi$ je rovnovážná poloha

výkon vazebné síly $=-\lambda\frac{\partial f}{\partial t}$

2) **d'Alembertův princip** – dynamická rovnováha soustavy částic podrobených vazbám $f_k(\vec{x},t)=0$ $\forall k\in\hat{r}$

(LR1D) $\mathbb{M}\ddot{\vec{x}}=\vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)+\vec{R}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)=\vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\nabla f_k$

Zavedení setrvačné síly $\vec{I}=-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}}$ umožňuje zobecnit princip virtuální práce ze statiky.

$\mathbb{M}=\operatorname{diag}(m_1,\dots,m_{3N})$ $f_k(\vec{x},t)=0$ $\forall k\in\hat{r}$

$\underbrace{\vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)}_{\text{vtištěné síly (akční)}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\nabla f_k}_{\text{vazbové síly (reakční)}}\underbrace{-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}}}_{\text{setrvačné síly}}=0$ ← podmínka rovnováhy sil

Rovnici opět přenásobíme $\delta\vec{x}=\delta\vec{x}^T+\delta\vec{x}^N$
kde $\delta\vec{x}^T\cdot\nabla f_k=0$ $\forall k\in\hat{r}$ $\delta\vec{x}^N\in\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\nabla f_1,\dots,\nabla f_r)$

$\underbrace{(\vec{F}-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})}_{\text{efektivní síly}}\cdot\delta\vec{x}^T+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\underbrace{\nabla f_k\cdot\delta\vec{x}^T}_{=0}+\underbrace{(\vec{F}-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})^T\cdot\delta\vec{x}^N}_{=0}+\Big[\underbrace{(\vec{F}-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})^N+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\nabla f_k}_{=0 \text{ volbou } \lambda_k}\Big]\cdot\delta\vec{x}^N=0$ $\forall\delta\vec{x}^T$

Virtuální práce efektivních sil

$\delta A_{ef}(\vec{x},\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}},t)=(\vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})\cdot\delta\vec{x}$

d'Alembertův princip (1743)

$$\boxed{\begin{gathered}\delta A_{ef}=(\vec{F}-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})\cdot\delta\vec{x}=0 \quad \forall\delta\vec{x}\in\mathbb{R}^{3N}\\ f_k(\vec{x},t)=0 \quad \forall k\in\hat{r} \qquad \delta\vec{x}\cdot\nabla f_k=0\end{gathered}}$$

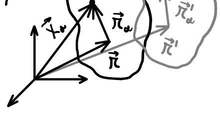
Pohyb mechanické soustavy se děje v dynamické rovnováze efektivních sil t. j. tak, že virtuální práce efektivních sil je v každém okamžiku rovna nule $\delta A_{ef}(\tilde{\vec{x}}(t),\dot{\tilde{\vec{x}}}(t),\ddot{\tilde{\vec{x}}}(t),t)=0$.

Pozn: výhoda – není třeba pracovat se silami ideálních holonomních vazeb např. držících pohromadě tuhé těleso složené z N hm. bodů: posunutí jsou pouze translace a rotace $\vec{x}_\alpha=\vec{r}+\vec{r}_\alpha$ $|\vec{r}_\alpha|=\text{konst}$ $\delta\vec{x}_\alpha=\underbrace{\delta\vec{r}}_{}+\underbrace{\delta\vec{\varphi}}_{}\times\vec{r}_\alpha$

jsou nezávislé

$\delta A_{ef}=\sum_{\alpha=1}^{N}(\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha)\cdot\delta\vec{x}_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{N}(\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha)\cdot(\delta\vec{r}+\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_\alpha)=\Big[\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha}_{=0}\Big]\cdot\delta\vec{r}+\Big[\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{r}_\alpha\times(\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha)}_{=0}\Big]\cdot\delta\vec{\varphi}=0$ $\forall\delta\vec{r}\ \forall\delta\vec{\varphi}$

$0=\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha=\vec{F}-\dot{\vec{P}}$ $0=\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{x}_\alpha\times(\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha)-\vec{r}\times\overbrace{\Big(\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha\Big)}=\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{x}_\alpha\times\vec{F}_\alpha-\Big(\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{x}_\alpha\times m_\alpha\dot{\vec{x}}_\alpha\Big)^{\cdot}=\vec{N}-\dot{\vec{L}}$



Pohybové rovnice (LR1D) pro neholonomní soustavu s vazbami lineárně závislými na rychlostech

vazby: r–holonomních (nezávislých)

$$f_k(\vec{x},t)=0 \quad \forall k\in\hat{r} \qquad h(\underbrace{\nabla f_1,\dots,\nabla f_r}_{\text{L.N.}})=r \quad \forall\vec{x}\in M(t)$$

$$0=\delta f_k=\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\delta x_i=\nabla f_k\cdot\delta\vec{x}$$

p–neholonomních (nezávislých)

$$\sum_{i=1}^{3N}a_{li}(\vec{x},t)\dot{x}_i+b_l(\vec{x},t)=0 \quad \forall l\in\hat{p} \qquad \mathbb{A}=(a_{li}) \text{ matice typu } p\times 3N$$

$$\mathbb{A}(\vec{x},t)\dot{\vec{x}}+\vec{b}(\vec{x},t)=0 \quad /\cdot dt \qquad h(\mathbb{A}(\vec{x},t))=p \quad \forall\vec{x}\in M(t)\,\forall t$$

$$\mathbb{A}(\vec{x},t)d\vec{x}+\vec{b}(\vec{x},t)\,dt=0 \leftarrow \dot{\vec{x}}dt=d\vec{x} \quad / \; dt=0\Rightarrow d\vec{x}\to\delta\vec{x}$$

$$\mathbb{A}(\vec{x},t)\delta\vec{x}=0 \qquad \sum_{i=1}^{3N}a_{li}(\vec{x},t)\delta x_i=0 \quad \forall l\in\hat{p}$$

d'Alembertův princip

$$\delta A_{ef}=\sum_{i=1}^{3N}(F_i-m_i\ddot{x}_i)\cdot\delta x_i=(\vec{F}-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})\cdot\delta\vec{x}=0 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{matrix}f_k(\vec{x},t)=0 \quad \forall k\in\hat{r}\\ \mathbb{A}(\vec{x},t)\dot{\vec{x}}+\vec{b}(\vec{x},t)=0\end{matrix}\right\}(3) \qquad \forall\delta\vec{x}\in\mathbb{R}^{3N} \quad \left.\begin{matrix}\nabla f_k\cdot\delta\vec{x}=0\\ \mathbb{A}\delta\vec{x}=0\end{matrix}\right\}(2) \rightarrow \forall\delta\vec{x}\in T_{\vec{x}}M(t)\cap\operatorname{Ker}\mathbb{A}(\vec{x},t)=\operatorname{Ker}\mathbb{B}(\vec{x},t)$$

$\mathbb{B}(\vec{x},t)$ matice $(r+p)\times 3N$ hodnosti $r+p$

$s=3N-r$

BÚNO: regulární matice typu$(r+p)\times(r+p)$

Metoda Lagrangeových multiplikátorů:
Místo vyjádření závislých posunutí složek δx_j pomocí $s-p$ nezávislých z podmínek (2) a jejich dosazení do rovnice (1) přenásobíme rovnice (2) Lagrangeovými multiplikátory λ_j,μ_j a přičteme k rovnici (1) a nastavíme λ_j,μ_j tak abychom vynulovali koeficienty u závislých δx_j

$\lambda_j,\mu_j \leftarrow$ funkce (t)

$$\underbrace{(\lambda_1,\dots,\lambda_r,\mu_1,\dots,\mu_p)}_{\text{nastavíme tak aby}}\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{s-p+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_{s-p+1}} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_{3N}}\\ a_{1,1} & \dots & a_{1,s-p+1} & \dots & a_{1,3N}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{p,1} & \dots & a_{p,s-p+1} & \dots & a_{p,3N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x_1\\ \vdots\\ \delta x_{s-p}\\ \delta x_{s-p+1}\\ \vdots\\ \delta x_{3N}\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}\text{nezávislé}\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}\text{závislé}\end{matrix}=0$$

$$(\overset{*}{-F_1^{ef}},\dots,\overset{\shortparallel}{-F_{s-p+1}^{ef}},\dots,\overset{\shortparallel}{-F_{3N}^{ef}})$$

$$0=\sum_{i=1}^{3N}\Big(F_i-m_i\ddot{x}_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\sum_{l=1}^{p}\mu_l a_{li}\Big)\underbrace{\delta x_i}=\sum_{i=1}^{s-p}\underbrace{\Big(F_i-m_i\ddot{x}_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\sum_{l=1}^{p}\mu_l a_{li}\Big)}_{0''}\underbrace{\delta x_i}+\sum_{i=s-p+1}^{3N}\underbrace{\Big(F_i-m_i\ddot{x}_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\sum_{l=1}^{p}\mu_l a_{li}\Big)}_{0''}\delta x_i$$

$\delta x_1,\dots,\delta x_{3N}$ nejsou nezávislé $\quad 0'' \Leftarrow \delta x_1,\dots,\delta x_{s-p}$ jsou nezávislé $\quad 0''$ vynulujeme volbou λ_k a μ_l

Pohybové rovnice: $m_i\ddot{x}_i=F_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\sum_{l=1}^{p}\mu_l a_{li} \quad \forall i\in\widehat{3N} \qquad f_k(\vec{x},t)=0 \;\forall k\in\hat{r} \qquad \sum_{j=1}^{3N}a_{lj}(\vec{x},t)\dot{x}_j+b_l(\vec{x},t)=0 \quad \forall l\in\hat{p}$

Věta o energii: $/\dot{x}_i \quad /\sum_{i=1}^{3N}$ $\qquad \frac{df_k}{dt}=\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial f_k}{\partial t}=0 \qquad$ pro konzervativní síly $F_i\dot{x}_i=-\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i}\dot{x}_i=-\frac{\hat{d}U(\vec{x})}{dt}$

$$m_i\ddot{x}_i\dot{x}_i=F_i\dot{x}_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\dot{x}_i+\sum_{l=1}^{p}\mu_l a_{li}\dot{x}_i \Rightarrow \frac{dT}{dt}=\vec{F}\cdot\dot{\vec{x}}-\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial t}-\sum_{l=1}^{p}\mu_l b_l \Rightarrow \frac{d}{dt}(T+U)=-\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial t}-\sum_{l=1}^{p}\mu_l b_l$$

Odvození LR2D pro holonomní soustavu:

$$x_i=\hat{x}_i(\vec{q},t) \qquad \delta x_i=\delta\hat{x}_i=\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$0=\delta A_{ef}=\sum_{i=1}^{3N}(F_i-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i=\sum_{i=1}^{3N}\sum_{j=1}^{s}\Big[F_i-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_i}\Big)\Big]\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}\delta q_j=\sum_{i=1}^{3N}\sum_{j=1}^{s}\Big[F_i\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_i}\Big)\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}\Big]\delta q_j=$$

jsou nezávislé

$$=\sum_{i=1}^{3N}\sum_{j=1}^{s}\Big[F_i\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_i}\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}\Big)+\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_i}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}\Big)\Big]\delta q_j=\sum_{i=1}^{3N}\sum_{j=1}^{s}\Big[Q_j-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_i}\frac{\partial\dot{\hat{x}}_i}{\partial\dot{q}_j}\Big)+\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_i}\Big(\frac{\partial\dot{\hat{x}}_i}{\partial q_j}\Big)\Big]\delta q_j=\sum_{j=1}^{s}\Big[Q_j-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\hat{T}}{\partial\dot{q}_j}\Big)+\frac{\partial\hat{T}}{\partial q_j}\Big]\underbrace{\delta q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\hat{T}}{\partial\dot{q}_j}\Big)-\frac{\partial\hat{T}}{\partial q_j}=Q_j \quad \forall j\in\hat{s} \qquad s=3N-r$$

$$Q_j=Q_j^{(nep)}+Q_j^{(pot)}=Q_j^{(nep)}+\Big[-\frac{\partial U}{\partial x_i}+\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial U}{\partial\dot{x}_i}\Big)\Big]\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}=Q_j^{(nep)}-\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}+\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial U}{\partial\dot{x}_i}\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}\Big)-\frac{\partial U}{\partial\dot{x}_i}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}\Big)=$$

$$=Q_j^{(nep)}-\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}-\frac{\partial U}{\partial\dot{x}_i}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}\Big)+\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial U}{\partial\dot{x}_i}\frac{\partial\dot{\hat{x}}_i}{\partial\dot{q}_j}\Big)=Q_j^{(nep)}-\frac{\partial\hat{U}}{\partial q_j}+\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\hat{U}}{\partial\dot{q}_j}\Big)$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\Big)-\frac{\partial\hat{L}}{\partial q_j}=Q_j^{(nep)} \leftarrow \hat{L}=\hat{T}-\hat{U}$$

Pozn: Záměnnost variace a derivace $\frac{d}{dt}(\delta\vec{x})=\frac{d}{dt}(\vec{x}'-\vec{x})=\dot{\vec{x}}'-\dot{\vec{x}}=\delta\dot{\vec{x}}=\delta\Big(\frac{d\vec{x}}{dt}\Big)$ platí i pro funkce $\frac{d}{dt}\delta f=\delta\frac{df}{dt}$

předpokládáme, že variace x je diferencovatelnou funkcí času, případně formálně definujeme jak působí operátor časové derivace

Jourdainův princip $\quad 0=\frac{d}{dt}\delta A_{ef}=\sum_{i=1}^{3N}\frac{\hat{d}}{dt}(F_i-m_i\ddot{x}_i)\underset{\text{zvolíme }\shortparallel\, 0}{\delta x_i}+\sum_{i=1}^{3N}(F_i-m_i\ddot{x}_i)\delta\dot{x}_i$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3N}(F_i-m_i\ddot{x}_i)\cdot\delta_1\dot{x}_i=0}$$

Jourdainovy variace $\delta_1 t=0 \quad \delta_1 x_i=0$

Gaussův princip $\quad 0=\sum_{i=1}^{3N}\frac{d}{dt}(F_i-m_i\ddot{x}_i)\underset{\text{zvolíme }\shortparallel\, 0}{\delta_1\dot{x}_i}+\sum_{i=1}^{3N}(F_i-m_i\ddot{x}_i)\delta_1\ddot{x}_i$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3N}(F_i-m_i\ddot{x}_i)\cdot\delta_2\ddot{x}_i=0}$$

Gaussovy variace $\delta_2 t=0 \quad \delta_2 x_i=0 \quad \delta_2\dot{x}_i=0$

Ústřední rovnice Lagrangeova – jiný tvar d'Alembertova principu

$$0=\delta A_{ef}=\sum_{i=1}^{3N}(F_i-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i=\underbrace{\sum_{i=1}^{3N}F_i\delta x_i}_{\delta A \text{ virtuální práce akčních sil}}-\sum_{i=1}^{3N}m_i\ddot{x}_i\delta x_i=\delta A-\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{3N}\underbrace{m_i\dot{x}_i}_{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}}\delta x_i\Big)+\delta\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2}_{T}\Big)=\delta A-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\Big)+\delta T$$

$$\ddot{x}_i\delta x_i=\frac{d}{dt}(\dot{x}_i\delta x_i)-\dot{x}_i\frac{d}{dt}(\delta x_i)=\frac{d}{dt}(\dot{x}_i\delta x_i)-\dot{x}_i\delta\dot{x}_i=\frac{d}{dt}(\dot{x}_i\delta x_i)-\frac{1}{2}\delta\dot{x}_i^2$$

$$\boxed{\delta T+\delta A=\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\Big)}$$

v obecných souřadnicích: $x_i=\hat{x}_i(\vec{q},t)$ $\quad\delta x_i=\delta\hat{x}_i=\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}\delta q_j$ $\quad\hat{T}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)=T(\dot{\vec{x}}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t))$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\delta q_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j=\frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j \qquad \delta A=F_i\delta x_i=F_i\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\delta q_j=Q_j\delta q_j=\delta\hat{A}$$

$$\boxed{\delta\hat{T}+\delta\hat{A}=\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Big)}$$

$$\delta\hat{A}=Q_j^{(nep)}\delta q_j+Q_j^{(pot)}\delta q_j=Q_j^{(nep)}\delta q_j+\Big(\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\hat{U}}{\partial\dot{q}_j}\Big)-\frac{\partial\hat{U}}{\partial q_j}\Big)\delta q_j=Q_j^{(nep)}\delta q_j+\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\hat{U}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\Big)-\frac{\partial\hat{U}}{\partial\dot{q}_j}\delta\dot{q}_j-\frac{\partial\hat{U}}{\partial q_j}\delta q_j=Q_j^{(nep)}\delta q_j+\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\hat{U}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\Big)-\delta\hat{U}$$

$$\delta\hat{T}-\delta\hat{U}+Q_j^{(nep)}\delta q_j=\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial(\hat{T}-\hat{U})}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\Big)\qquad\boxed{\delta\hat{L}+Q_j^{(nep)}\delta q_j=\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\Big)}$$

Pozn: diferenciální počet

Funkce $\quad$ přírůstek funkce $\quad$ lineární část přírůstku = diferenciál funkce $\quad$ derivace $\quad$ stacionární bod

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad \Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=\overbrace{A(x)\Delta x}+\underbrace{\omega(x,\Delta x)}_{\downarrow\, 0 \text{ pro } \Delta x\to 0}\cdot\Delta x$ $\quad df=A(x)\Delta x=f'(x)dx$ $\quad f'(x)=\frac{df}{dx}=A(x)$ $\quad f'(x_0)=0$

$f(x)=x \quad dx=\Delta x$

$f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ $\quad \Delta f=f(\vec{x}+\Delta\vec{x})-f(\vec{x})=\sum_{j=1}^{m}A_j(\vec{x})\Delta x_j+\underbrace{\omega(\vec{x},\Delta\vec{x})}_{\downarrow\, 0 \text{ pro } |\Delta\vec{x}|\to 0}\cdot|\Delta\vec{x}|$ $\quad df=\underbrace{A(\vec{x})\Delta\vec{x}}_{\nabla f(\vec{x})\cdot d\vec{x}}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}dx_j$ $\quad f'(\vec{x})=A(\vec{x})\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ $\quad \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_j}=0$

$A_j(\vec{x})=\frac{\partial f}{\partial x_j}=\partial_j f=f_j$ $\quad \forall j\in\hat{m}$

pokud existuje, pak $df=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}f(\vec{x}+\varepsilon d\vec{x})$

Variační počet $\quad$ body → křivky $\quad$ funkce → funkcionály

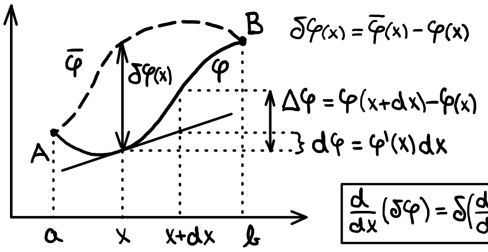
Křivka (třídy $n\in\mathbb{N}_0$) je spojité zobrazení $\varphi:\langle a,b\rangle\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (třídy C^n tj. má spojité derivace do řádu n).

$C^n\langle a,b\rangle$ mn. všech křivek třídy n tvoří vektorový prostor dim $+\infty$

s normu $\|\varphi\|=\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle}\{|\varphi(x)|,|\varphi'(x)|,\dots,|\varphi^{(n)}(x)|\}$ který označíme $\vec{C}^n\langle a,b\rangle$

$C^n_{(A,B)}\langle a,b\rangle=\{\varphi\in C^n\langle a,b\rangle\,|\,\varphi(a)=A\wedge\varphi(b)=B\}$ mn. křivek z A do B

$(C^n_{(A,B)}\langle a,b\rangle,-,\vec{C}^n_{(0,0)}\langle a,b\rangle)$ normovaný afinní prostor



$$\boxed{\frac{d}{dx}(\delta\varphi)=\delta\Big(\frac{d\varphi}{dx}\Big)}$$

Buď $\varphi\in C^n_{(A,B)}\langle a,b\rangle$ pak pro lib. $\bar{\varphi}\in C^n_{(A,B)}\langle a,b\rangle$ nazýváme $\delta\varphi=\bar{\varphi}-\varphi\in\vec{C}^n_{(0,0)}\langle a,b\rangle$ variací křivky φ s pevnými konci.

$C^n\langle a,b\rangle$ $\quad$ $\vec{C}^n\langle a,b\rangle$ $\quad$ s volnými konci.

Funkcionál je zobrazení z prostoru (např. vektorového) do reálných čísel.

Funkcionál $I:C^n\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ je spojitý na křivce φ, pokud $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\bar{\varphi}\in C^n\langle a,b\rangle\ \ \|\bar{\varphi}-\varphi\|<\delta\Rightarrow|I(\bar{\varphi})-I(\varphi)|<\varepsilon$

Funkcionál $I:C^n\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ je diferencovatelný na křivce φ pokud existuje spojitý lineární funkcionál $\Phi:\vec{C}^n\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ (nazývaný <u>variace I na křivce φ</u> značený $\delta I(\varphi)$) tak, že platí $\lim\limits_{\|\delta\varphi\|\to 0}\frac{I(\varphi+\delta\varphi)-I(\varphi)-\Phi[\delta\varphi]}{\|\delta\varphi\|}=0$.

tj. $\quad \Delta I=I(\varphi+\delta\varphi)-I(\varphi)=\underbrace{\Phi[\delta\varphi]}_{\text{lineární část přírůstku } \delta I(\varphi)[\delta\varphi]}+\underbrace{\omega(\varphi,\delta\varphi)}_{\downarrow\, 0 \text{ pro } \|\delta\varphi\|\to 0}\cdot\|\delta\varphi\|$

Pokud ve výpočtu níže dosadíme za $\eta=\delta\varphi$ *dostaneme následující vzorec:*

roli variace křivky $\delta\varphi$ *zde hraje*

Pozn: existuje–li variace, lze ji najít takto $\quad \eta\in\vec{C}^n\langle a,b\rangle$ $\quad \hat{I}(\varepsilon)=I(\varphi+\overbrace{\varepsilon\eta})$ $\quad \forall\varepsilon\in\mathbb{R}$ $\quad \delta I(\varphi)[\delta\varphi]=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}I(\varphi+\varepsilon\delta\varphi)$

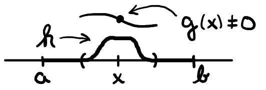
$$\frac{d\hat{I}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\big(I(\varphi+\varepsilon\eta)-I(\varphi)\big)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\big(\Phi[\varepsilon\eta]+\omega(\varphi,\varepsilon\eta)\cdot\|\varepsilon\eta\|\big)=\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\Phi[\eta]+\mathrm{sgn}(\varepsilon)\,\omega(\varphi,\varepsilon\eta)\cdot\|\eta\|\big)=\Phi(\eta)=\delta I(\varphi)[\eta]$$

Funkcionál $I:C^n\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ má na křivce φ – stacionární hodnotu (φ je extremálou I) pokud $\quad \delta I(\varphi)=0$

– maximum (minimum) pokud $\exists\delta>0\ \forall\bar{\varphi}\in C^n\langle a,b\rangle\ \ \|\bar{\varphi}-\varphi\|<\delta\Rightarrow I(\varphi)\geq I(\bar{\varphi})\ \ (I(\varphi)\leq I(\bar{\varphi}))$

Základní lemma variačního počtu: Buď $g \in C\langle a,b\rangle$ pokud $\forall h \in C^n_{(0,0)}\langle a,b\rangle$ platí $\int_a^b g(x)\cdot h(x)\,dx = 0$ pak $g(x)=0$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$.

Dk. sporem



Dále speciální případ funkcionálu:

Buď $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ třídy C^2 pak funkcionál $J: C^1\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $J(\varphi) := \int_a^b F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\,dx$ je diferencovatelný na $C^1\langle a,b\rangle$.

$$\delta J(\varphi)[\delta\varphi] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} J(\varphi+\varepsilon\delta\varphi) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(x,\varphi+\varepsilon\delta\varphi,\varphi'+\varepsilon\delta\varphi')\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi'\,dx =$$

$$\boxed{\delta\int_a^b F\,dx = \int_a^b \delta F\,dx}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\delta\varphi\,dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial\varphi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\right]\delta\varphi\,dx + \left[\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right]_a^b$$

Křivka $\varphi \in C^1_{(A,B)}\langle a,b\rangle$ je extremálou funkcionálu $J\big|_{C^1_{(A,B)}\langle a,b\rangle} \iff \boxed{\frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi(x),\varphi'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi(x),\varphi'(x))\right) = 0}$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$

Eulerova rovnice pro funkcionál J $\qquad \varphi(a)=A$

ODR 2. řádu s okrajovými podmínkami $\qquad \varphi(b)=B$

Zobecnění:

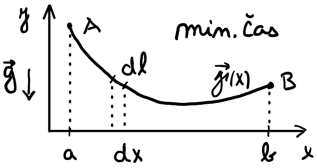
$\vec\varphi: \langle a,b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^s \in C^1$ $\quad \vec\varphi(a)=\vec A$ $\quad \vec\varphi(b)=\vec B$

$F: \mathbb{R}^{2s+1} \to \mathbb{R} \in C^2$ $\quad J(\vec\varphi) = \int_a^b F(x,\vec\varphi(x),\vec\varphi'(x))\,dx$ $\qquad \delta J(\vec\varphi)=0 \wedge \delta\vec\varphi(a)=0=\delta\vec\varphi(b) \iff \forall i \in \hat{s}$ $\frac{\partial F}{\partial\varphi_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_i'}\right) = 0$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$

Je-li $\vec\varphi$ minimála (maximála) funkcionálu $J\big|_{C^{(1)}_{(A,B)}\langle a,b\rangle}$ pak $\delta^2 J(\vec\varphi) \geq 0$ (≤ 0) a matice $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi_i'\partial\varphi_j'}\right)$ je PSD (NSD)

- **Integrální principy** –jsou globální, vyšetřují trajektorii v intervalu <t1,t2> jako celek
  –jdou zobecnit na nemechanické úlohy (elmag. pole, kvantová mechanika)

Fermatův princip (1662) – světlo se z bodu A do bodu B šíří po "časově" nejkratší dráze tj. po dráze



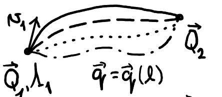
která extremalizuje funkcionál $\quad T(\vec y) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v} = \frac{1}{c}\int_A^B n(\vec x)\,dl = \frac{1}{c}\int_a^b n(\vec y(x))\cdot|\vec y'(x)|\,dx$

index lomu $n = n(\vec x)$ $\quad$ rychlost světla c

Brachistochrona (Johann Bernoulli 1696) $\quad T(\vec y) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v(y)} = \int_a^b \frac{|\vec y'(x)|\,dx}{\sqrt{2gy}} = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$

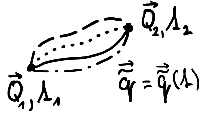
Maupertuis (1744) hypotéza: Každý děj v přírodě probíhá tak, že určitá veličina (tzv. akce) je minimální.

Princip nejmenší akce	– Lagrange (1760) pro konzervativní soustavy – Hamilton (1834) pro nekonzervativní soustavy



$E = T(\vec q,\dot{\vec q}) + U(\vec q)$ $\quad S_0 = \int_{\vec Q_1}^{\vec Q_2} 2T\,dt$

$\Rightarrow v(\vec q) \Rightarrow \vec{\tilde q} = \vec{\tilde q}(t)$



$T(\vec q,\dot{\vec q},t)$ $\quad S = \int_{t_1}^{t_2} T-U\,dt$

$U(\vec q,t)$

Z ústřední rce. Lagrangeovy odvodíme Hamiltonův princip

budeme předpokládat, že virtuální posunutí jsou diferencovatelné funkce času $\delta\vec q = \delta\vec q(t) \in C^1_{(0,0)}\langle t_1,t_2\rangle$ tvoří tedy variace křivky $\vec q(t) \in C^1\langle t_1,t_2\rangle$ s pevnými konci $\delta\vec q(t_1) = 0 = \delta\vec q(t_2)$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} \hat L\,dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_j^{(nep)}\delta q_j\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\hat L + Q_j^{(nep)}\delta q_j\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\hat L}{\partial\dot q_j}\delta q_j\right)dt = \left[\frac{\partial\hat L}{\partial\dot q_j}\delta q_j\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Hamiltonův princip: Pohyb holonomní soustavy s potenciálními silami v časovém intervalu $\langle t_1,t_2\rangle$ se děje po křivce $\vec q(t)$ (trajektorii) na které akce nabývá stacionární hodnoty vzhledem k (izochronním $\delta t=0$) variacím s pevnými konci $\delta\vec q(t_1) = 0 = \delta\vec q(t_2)$.

$$\boxed{S[\vec q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec q(t),\dot{\vec q}(t),t)\,dt}$$

$$\delta S[\vec q(t)] = 0 \wedge \delta\vec q(t)\Big|_{t_1,t_2} = 0 \iff \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{(\vec q(t),\dot{\vec q}(t),t)} = 0 \quad \forall i \in \hat{s}$$

Eulerovy–Lagrangeovy rce. pro funkcionál S

O.D.R. 2. řádu pro $\vec q(t) = ?$ $\qquad \vec q(t_1) = \vec Q_1$ $\quad \vec q(t_2) = \vec Q_2$

s okrajovými podmínkami

- Akce je funkcionál $S: C^1_{(\vec Q_1,\vec Q_2)}\langle t_1,t_2\rangle \to \mathbb{R}$ a neboť $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot q_i\partial\dot q_j}\right)$ je PD, je trajektorie zpravidla její minimála.
- Hamiltonův princip nezávisí na volbě obecných souřadnic $\Rightarrow$ LR2D mají stejný tvar ve všech obecných s.
- Nejednoznačnost Lagrangiánu $\quad L' = L + \frac{d\,h(\vec q,t)}{dt}$ $\quad S' = \int_{t_1}^{t_2} L'\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt + [h(\vec q(t_2),t_2) - h(\vec q(t_1),t_1)] = S + K \Rightarrow \delta S' = \delta S$
- Lze zobecnit mimo mechaniku – potřeba najít příslušnou Lagrangeovu funkci (pomocí principů symetrie)

Routhova funkce – vyloučení cyklické souřadnice Q $\boxed{L,\, s+1,\, \vec{q}, Q} \to \boxed{R,\, s,\, \vec{q}}$

nechť $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{Q}, t)$ $\quad \frac{\partial L}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{Q}, t) = konst$ (rovnice pro Q) $\Rightarrow \dot{Q} = \hat{\dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, t)$

do zbylých s rovnic $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \;\forall i \in \hat{s}$ dosadíme za $\dot{Q}$ a $\ddot{Q}$ tyto rovnice pro neznámé $\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}$ lze získat

z Routhovy funkce $R(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, t) = \hat{L} - P\hat{\dot{Q}} = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \hat{\dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, t), t) - P\hat{\dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, t)$ (někdy $R = P\hat{\dot{Q}} - \hat{L}$)

která převezme roli Lagrangeovy funkce pro nový systém o s stupních volnosti

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot{Q}}}{\partial q_i}\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{\dot{Q} = \hat{\dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, t)}$$

Jacobiho princip – pro konzervativní soustavy (skleronomní holonomní vazby a konzervativní síly)

$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2}T_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i\dot{q}_j - U(\vec{q})$ $\quad T$ je P.D. kvadratická forma v $\dot{\vec{q}}$ $\quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = T + U = konst$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t))\, dt = \left/ \begin{matrix} \text{substituce: změna parametrizace} \\ t = t(\tau) \quad \vec{q}(\tau) = \vec{q}(t(\tau)) \\ dt = t'd\tau \quad \vec{q}\,' = \frac{d\vec{q}}{d\tau} = \dot{\vec{q}}t' \end{matrix} \right/ = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(\vec{q}, \frac{\vec{q}\,'}{t'}\right) t'd\tau$$

"nový" variační princip pro $s+1$ křivek $\vec{q}(\tau), t(\tau)$ s funkcí $\hat{L}(\vec{q}, \vec{q}\,', t') = L\left(\vec{q}, \frac{\vec{q}\,'}{t'}\right)t'$ kde čas t je cyklickou souřadnicí, kterou vyloučíme pomocí Routhovy funkce

$$p_t = \frac{\partial(Lt')}{\partial t'} = \frac{\partial L}{\partial t'}t' + L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(-\frac{q'_k}{t'^2}\right)t' + L = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k + L = -p_k\dot{q}_k + L = -E$$

$$R = Lt' - p_t \cdot t' = (L - p_t)t' = (L + p_k\dot{q}_k - L)t' = p_k\dot{q}_k t' = (L+E)t' = (T - U + T + U)t' = 2Tt'$$

$$S_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} R\, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} p_k\dot{q}_k t'd\tau = \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2} p_k dq_k = \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2Tt'd\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{2T}\sqrt{2T}\,t'd\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{2(E - U(\vec{q}))}\sqrt{T_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i\dot{q}_j}\,t'd\tau =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{2(E - U(\vec{q}))}\sqrt{T_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i t'\dot{q}_j t'}\,d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\underbrace{\sqrt{2(E - U(\vec{q}))}\sqrt{T_{ij}(\vec{q})q'_i q'_j}}_{F(\vec{q}, \vec{q}\,')}\,d\tau \overset{q'_i d\tau = dq_i}{=} \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2}\sqrt{2(E - U(\vec{q}))}\underbrace{\sqrt{T_{ij}(\vec{q})\,dq_i dq_j}}_{\text{element délky } d\ell^T \text{ v konf. pr. s metrickým tenzorem } T_{ij}(\vec{q})}$$

Jacobiho princip: Konzervativní soustava se mezi konfiguracemi $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$ pohybuje po křivce na které zkrácená akce

$$S_0[\vec{q}(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{2(E - U(\vec{q}))}\sqrt{T_{ij}(\vec{q})q'_i q'_j}\,d\tau = \int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2}\sqrt{2(E - U(\vec{q}))}\,d\ell^T$$

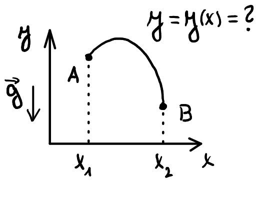
nabývá stacionární hodnoty vzhledem k variacím s pevnými konci $\delta\vec{q}(\tau_{1,2}) = 0$.

Pozn. z Eulerových rovnic $\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial q'_j}\right) = 0 \;\forall j \in \hat{s} \Rightarrow \vec{q} = \vec{q}(\tau)$ získáme pouze tvar trajektorie (τ není čas)

časovou parametrizaci trajektorie lze získat pomocí integrálu pohybu $E = T + U$ $\Rightarrow 1 = \sqrt{\frac{2T}{2(E-U)}}$

$$t = \int_0^t 1\, d\tilde{t} = \int_0^t \sqrt{\frac{T_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i\dot{q}_j}{2(E - U(\vec{q}))}}\, d\tilde{t} = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{\frac{T_{ij}(\vec{q})q'_i q'_j}{2(E - U(\vec{q}))}}\, d\tau$$

Př. tvar trajektorie šikmého vrhu $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$ $\quad U = mgy$ $\quad T = \frac{1}{2}(\dot{x}, \dot{y})\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ $\quad E = T + U = konst$



$$S_0 = \int_A^B \sqrt{2(E - mgy)}\sqrt{m(dx)^2 + m(dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2(E - mgy)}\sqrt{m(1 + y'^2)}\,dx = \underbrace{\sqrt{2g}\,m}_{\text{konst.}}\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{\sqrt{\frac{E}{mg} - y}\sqrt{1 + y'^2}}_{F(y, y')}\,dx$$

parametrizace $y = y(x)$ $\quad dy = y'dx$

(tj. $\tau = x$)

Eulerova rce. $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ protože $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ přejde na

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}}_{= C_1}\Big) = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' + \frac{\partial F}{\partial x} - \left(y''\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) = y'\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] = 0$$

$C_1 = F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}$ $\qquad K = \frac{E}{mg}$

$C_1 = \sqrt{K - y}\sqrt{1 + y'^2} - y'\sqrt{K - y}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$

$$C_1 = \frac{\sqrt{K - y}}{\sqrt{1 + y'^2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{C_1}\sqrt{K - y - C_1^2} \Rightarrow \int\frac{1}{C_1}dx = \int\frac{y'dx}{\sqrt{K - y - C_1^2}} \Rightarrow \frac{x}{C_1} = -2\sqrt{K - y - C_1^2} + \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow (x - C_2)^2 = 4C_1^2\left(\frac{E}{mg} - C_1^2 - y\right)$$

Řešitelné modely mechaniky

Pokud síly kterými na sebe tyto body působí nezávisí na rychlostech, pak z omezení daných Galileiho principem relativity plyne, že tyto síly jsou konzervativní.

1) Problém dvou těles – izolovaná soustava dvou hmotných bodů

Izolovanou soustavu dvou těles jejichž vzájemné silové působení nezávisí na rychlostech a splňuje 3. Newtonův zákon můžeme popsat Lagrangeovou funkcí:

$$L(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dot{\vec{x}}_1,\dot{\vec{x}}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{x}}_2^2 - U(|\vec{x}_1-\vec{x}_2|)$$

Integrály pohybu

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{x}}_2^2 + U(|\vec{x}_1-\vec{x}_2|)$$

symetrie Teorém Noetherové $i=1,2$

$$\vec{x}_i' = \vec{x}_i + \varepsilon\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m_1\dot{\vec{x}}_1 + m_2\dot{\vec{x}}_2$$

$$\vec{x}_i' = \mathbb{S}(\varepsilon)\vec{x}_i \Rightarrow \vec{L} = \vec{x}_1\times m_1\dot{\vec{x}}_1 + \vec{x}_2\times m_2\dot{\vec{x}}_2$$

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{M}(m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 - \vec{P}t)$$

$$\vec{P} = (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)^{\cdot} = M\dot{\vec{R}}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2}{m_1+m_2} \qquad M = m_1+m_2$$

$$\dot{\vec{R}} = \frac{\vec{P}}{M} = \text{Konst} \quad \Big/ \int dt \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \frac{\vec{P}}{M}t + \vec{R}_0$$

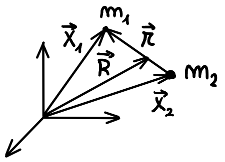
rovnoměrný přímočarý pohyb hmotného středu

Celkem 10 nezávislých integrálů pohybu

Přejdeme k souřadnicím $\vec{x}_1,\vec{x}_2 \longrightarrow \vec{R},\vec{r}$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2}{m_1+m_2} \qquad \vec{x}_1 = \vec{R} + \frac{m_2\vec{r}}{M}$$

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \qquad \vec{x}_2 = \vec{R} - \frac{m_1\vec{r}}{M}$$



$$\hat{L}(\vec{R},\vec{r},\dot{\vec{R}},\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}}+\frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}}-\frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 - U(|\vec{r}|) = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_1m_2}{M}}_{\mu}\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

redukovaná hmotnost μ

Pohybové rovnice

$$M\ddot{\vec{R}} = 0$$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

Cyklické souřadnice $\vec{R}$ $\qquad \vec{P} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\vec{R}}} = M\dot{\vec{R}}$

Routhova funkce

$$\tilde{L} = \hat{L} - \dot{\vec{R}}\cdot\vec{P} = \frac{1}{2}\frac{\vec{P}^2}{M} + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|) - \frac{\vec{P}^2}{M} = \overbrace{-\frac{1}{2}\frac{\vec{P}^2}{M}}^{\text{Konstanta (lze vypustit)}} + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

2) Pohyb částice ve sféricky symetrickém potenciálovém poli

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

Integrály pohybu

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + U(|\vec{r}|)$$

$$\vec{r}' = \underbrace{\mathbb{S}(\varepsilon)}_{\in SO(3)}\vec{r} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r}\times\mu\dot{\vec{r}} = \text{Konst}$$

$$\Downarrow \quad \vec{r}\cdot\vec{L} = r_iL_i = 0$$

pohyb probíhá v rovině jdoucí počátkem a kolmé k $\vec{L}$

přejdeme k sférickým souřadnicím pro které osa z míří ve směru $\vec{L}$ pak $\Theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \dot{\Theta} = 0$

$$\hat{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) - U(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

Cyklická souřadnice φ $\qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2\dot{\varphi} = L_3 = l = \text{Konst} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2} \qquad \varphi(t) = \int\frac{l}{\mu r^2}dt + \varphi_0$

Routhova funkce

$$\tilde{L} = \hat{L} - \dot{\varphi}p_\varphi = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\frac{l^2}{\mu^2r^4}\right) - U(r) - \frac{l^2}{\mu r^2} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \frac{l^2}{2\mu r^2} - U(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U_{ef}(r)$$

Efektivní potenciál

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

3) Pohyb konzervativní soustavy s jedním stupněm volnosti

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}T(q)\dot{q}^2 - U(q)$$

Integrál pohybu

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = T + U = \frac{1}{2}T(q)\dot{q}^2 + U(q) = \text{Konst}$$

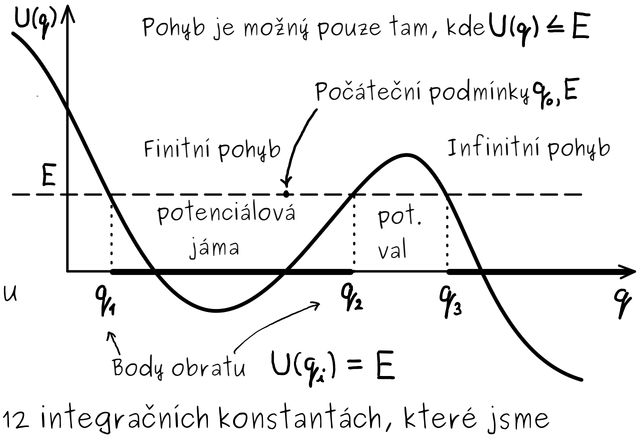
$$\dot{q}^2 = \frac{2(E-U(q))}{T(q)} \Rightarrow \dot{q} = \pm\sqrt{\frac{2(E-U(q))}{T(q)}}$$

znaménko určuje směr pohybu

$$\pm 1 = \sqrt{\frac{T(q)}{2(E-U(q))}}\,\dot{q} \quad \Big/ \int dt$$

$$\pm t = \int\sqrt{\frac{T(q)}{2(E-U(q))}}\,dq + t_0$$

řešení zapsané pomocí integrálu tzv. řešení v kvadraturách



Pozn. řešení původního problému dvou těles závisí celkem na 12 integračních konstantách, které jsme použili v tomto pořadí $\vec{P}, \vec{R}_0; \vec{L} \leftrightarrow (\theta,\dot{\theta},l), \varphi_0; E, t_0$

Řešitelné modely mechaniky

1) Problém dvou těles – izolovaná soustava dvou hmotných bodů

Budeme–li předpokládat, že síly kterými na sebe tyto body působí nezávisí na jejich rychlostech, pak z omezení daných Galieiho principem relativity plyne, že tyto síly jsou konzervativní.

Galileiho princip relativity–vyžaduje invarianci pohybových rovnic vzhledem k grupě Galieliho transforací.

Galileiho transformace $t_0 \in \mathbb{R}$ $\vec{V}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ $\mathbb{S} \in SO(3)$

$$\tilde{t} = t - t_0 \qquad t = \tilde{t} + t_0$$

$$\vec{\tilde{x}} = \mathbb{S}^T(\vec{x} - \vec{V}t - \vec{x}_0) \qquad \vec{x} = \mathbb{S}\vec{\tilde{x}} + \vec{V}t + \vec{x}_0$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbb{S}\vec{\tilde{x}} + \vec{V}t + \vec{x}_0) = \mathbb{S}\frac{d\vec{\tilde{x}}}{dt} + \vec{V} = \mathbb{S}\frac{d\vec{\tilde{x}}}{d\tilde{t}}\underbrace{\frac{d\tilde{t}}{dt}}_{1} + \vec{V}$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \mathbb{S}\frac{d^2\vec{\tilde{x}}}{d\tilde{t}^2}$$

Pohybové rovnice

$$m_\alpha \ddot{\vec{x}}_\alpha = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, t) \quad \alpha, \beta = 1,2 \qquad \longrightarrow \qquad m_\alpha \mathbb{S}\ddot{\vec{\tilde{x}}}_\alpha = \mathbb{S}\vec{\tilde{F}}_{\alpha\beta}(\vec{\tilde{x}}_\alpha, \vec{\tilde{x}}_\beta, \tilde{t}) \quad /\cdot \mathbb{S}^T$$

$$m_\alpha \ddot{\vec{\tilde{x}}}_\alpha = \vec{\tilde{F}}_{\alpha\beta}(\vec{\tilde{x}}_\alpha, \vec{\tilde{x}}_\beta, \tilde{t}) \underset{\uparrow}{=} \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{\tilde{x}}_\alpha, \vec{\tilde{x}}_\beta, \tilde{t}) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{S}^T\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, t) \underset{\uparrow}{=} \vec{F}_{\alpha\beta}(\mathbb{S}^T(\vec{x}_\alpha - \vec{V}t - \vec{x}_0), \mathbb{S}^T(\vec{x}_\beta - \vec{V}t - \vec{x}_0), t - t_0)$$

Invariance – rovnice se při transformaci nemá měnit
(pouze přibydou vlnky u proměnných)

Symetrie vůči
Galileiho transformaci

$\forall \mathbb{S} \in SO(3)$ $\forall \vec{V}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ $\forall t_0 \in \mathbb{R}$

Protože síly nezávisí na rychlostech stačí vzít $\vec{V} = 0$

a) Translace v čase

$\mathbb{S} = \mathbb{1}$ $\vec{x}_0 = 0$

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, t) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, t + t_0) \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\alpha\beta} = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta)$$

b) Translace v prostoru

$\mathbb{S} = \mathbb{1}$

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_0, \vec{x}_\beta - \vec{x}_0) \quad \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$$

Přejdeme k novým souřadnicím

$$\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta$$

$$\vec{u} = \vec{x}_\alpha + \vec{x}_\beta$$

$$\vec{G}(\vec{r}_{\alpha\beta}, \vec{u}) = \vec{G}(\vec{r}_{\alpha\beta}, \vec{u} - 2\vec{x}_0) \quad \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \vec{G} = \vec{G}(\vec{r}_{\alpha\beta}) \Rightarrow \vec{F}_{\alpha\beta} = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta)$$

c) Rotace

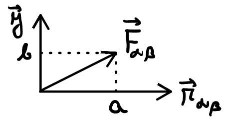
$\vec{x}_0 = 0$

$$\mathbb{S}^T\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\mathbb{S}^T\vec{r}_{\alpha\beta}) \quad \forall \mathbb{S} \in SO(3) \qquad |\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta})| = |\mathbb{S}\vec{F}_{\alpha\beta}(\mathbb{S}^T\vec{r}_{\alpha\beta})| = |\vec{F}_{\alpha\beta}(\mathbb{S}^T\vec{r}_{\alpha\beta})| \quad \forall \mathbb{S} \in SO(3)$$

velikost síly tedy nezávisí na směru $\vec{r}_{\alpha\beta}$ ale pouze na velikosti $\vec{r}_{\alpha\beta}$ $\quad |\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta})| = f_{\alpha\beta}(|\vec{r}_{\alpha\beta}|)$

označme $\mathbb{S}(\varphi) \in SO(3)$ matici rotace o úhel φ kolem osy $\vec{r}_{\alpha\beta}$ pak $\quad \mathbb{S}(\varphi)\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_{\alpha\beta} = \mathbb{S}^T(\varphi)\vec{r}_{\alpha\beta} \quad \forall\varphi$

rozložíme sílu $\vec{F}_{\alpha\beta}$ do směru $\vec{r}_{\alpha\beta}$ a směru kolmého na $\vec{r}_{\alpha\beta}$ pak



$$a\vec{r}_{\alpha\beta} + b\vec{y} = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = \mathbb{S}(\varphi)\vec{F}_{\alpha\beta}(\mathbb{S}^T(\varphi)\vec{r}_{\alpha\beta}) = \mathbb{S}(\varphi)\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = a\mathbb{S}(\varphi)\vec{r}_{\alpha\beta} + b\mathbb{S}(\varphi)\vec{y} = a\vec{r}_{\alpha\beta} + b\mathbb{S}(\varphi)\vec{y}$$

$$b(\mathbb{1} - \mathbb{S}(\varphi))\vec{y} = 0 \quad \forall\varphi \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = a\vec{r}_{\alpha\beta} = \pm f_{\alpha\beta}(|\vec{r}_{\alpha\beta}|)\frac{\vec{r}_{\alpha\beta}}{|\vec{r}_{\alpha\beta}|}$$

je izotropní (nezávisí na směru) a centrální (míří ve směru spojnice)

Centrální izotropní síly $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$ jsou potenciální

$$(\mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r}))_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial F_k(\vec{r})}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial f(r)x_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial x_j}x_k + f(r)\delta_{jk}\right) = \varepsilon_{ijk}\left(f'(r)\frac{x_j}{r}x_k + f(r)\delta_{jk}\right) = 0 \quad \Rightarrow \exists U = U(r)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,U(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial\vec{r}} \qquad \vec{F}_i(\vec{r}) = -\frac{\partial U(r)}{\partial x_i} = -U'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = -U'(r)\frac{x_i}{r} \Rightarrow U'_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = \mp f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})$$

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = -\frac{\partial U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})}{\partial\vec{r}_{\alpha\beta}} = -U'_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})\cdot\frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial\vec{r}_{\alpha\beta}} = -U'_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})\cdot\frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial\vec{x}_\alpha} = -\frac{\partial U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})}{\partial\vec{x}_\alpha}$$

3. Newtonův zákon

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = -\vec{F}_{\beta\alpha}(\vec{r}_{\beta\alpha}) \Rightarrow f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = f_{\beta\alpha}(r_{\beta\alpha}) \Rightarrow U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = U_{\beta\alpha}(r_{\alpha\beta})$$

Pozn. Pro jednočásticový systém plyne z Galileovské invariance pohybových rovnic nulovost síly.
Pohybové rovnice musí být invariantní vůči Galieliho transformacem pouze pokud popisují izolovanou mechanickou soustavu.

Izolovanou soustavu dvou těles jejchž vzájemné silové působení nezávisí na rychlostech a splňuje 3. NZ můžeme popsat Lagrangeovou funkcí:

$$L(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dot{\vec{x}}_1,\dot{\vec{x}}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{x}}_2^2 - U(|\vec{x}_1-\vec{x}_2|)$$

$$\vec{P} = (m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2)^{\cdot} = M\dot{\vec{R}}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2}{m_1+m_2} \qquad M = m_1+m_2$$

$$\dot{\vec{R}} = \frac{\vec{P}}{M} = \text{Konst} \quad \Big/ \int dt \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \frac{\vec{P}}{M}t + \vec{R}_0$$

Integrály pohybu

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{x}}_2^2 + U(|\vec{x}_1-\vec{x}_2|)$$

symetrie

Teorém $i=1,2$

Noetherové

$$\vec{x}_i' = \vec{x}_i + \varepsilon\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m_1\dot{\vec{x}}_1 + m_2\dot{\vec{x}}_2$$

$$\vec{x}_i' = \mathbb{S}(\varepsilon)\vec{x}_i \Rightarrow \vec{L} = \vec{x}_1 \times m_1\dot{\vec{x}}_1 + \vec{x}_2 \times m_2\dot{\vec{x}}_2$$

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{M}(m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 - \vec{P}t)$$

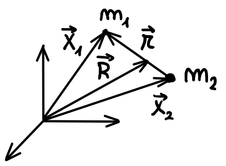
rovnoměrný přímočarý pohyb hmotného středu

Celkem 10 nezávislých integrálů pohybu

Přejdeme k souřadnicím $\vec{x}_1,\vec{x}_2 \longrightarrow \vec{R},\vec{r}$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2}{m_1+m_2} \qquad \vec{x}_1 = \vec{R} + \frac{m_2\vec{r}}{M}$$

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \qquad \vec{x}_2 = \vec{R} - \frac{m_1\vec{r}}{M}$$



$$\hat{L}(\vec{R},\vec{r},\dot{\vec{R}},\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m_1\Big(\dot{\vec{R}}+\frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\Big)^2 + \frac{1}{2}m_2\Big(\dot{\vec{R}}-\frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\Big)^2 - U(|\vec{r}|) = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_1m_2}{M}}\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

redukovaná hmotnost μ

Pohybové rovnice

$$M\ddot{\vec{R}} = 0$$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

Cyklické souřadnice $\vec{R}$ $\quad \vec{P} = \dfrac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\vec{R}}} = M\dot{\vec{R}}$

Routhova funkce

$$\tilde{L} = \hat{L} - \dot{\vec{R}}\cdot\vec{P} = \frac{1}{2}\frac{\vec{P}^2}{M} + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|) - \frac{\vec{P}^2}{M} = \overbrace{-\frac{1}{2}\frac{\vec{P}^2}{M}}^{\text{Konstanta (lze vypustit)}} + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

2) Pohyb částice ve sféricky symetrickém potenciálovém poli

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

Integrály pohybu $\quad \dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \dfrac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + U(|\vec{r}|)$

$$\vec{r}' = \underbrace{\mathbb{S}(\varepsilon)}_{\in SO(3)}\vec{r} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}} = \text{Konst}$$

$$\Downarrow \quad \vec{r}\cdot\vec{L} = r_iL_i = 0$$

pohyb probíhá v rovině jdoucí počátkem a kolmé k $\vec{L}$

přejdeme k sférickým souřadnicím pro které osa z míří ve směru $\vec{L}$ pak $\Theta = \frac{\pi}{2} \quad \dot{\Theta} = 0$

$$\hat{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2 + r^2\sin^2\Theta\,\dot{\varphi}^2) - U(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

Cyklická souřadnice φ $\quad \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2\dot{\varphi} = L_3 = l = \text{Konst} \Rightarrow \dot{\varphi} = \dfrac{l}{\mu r^2} \quad \varphi(t) = \displaystyle\int \frac{l}{\mu r^2}dt + \varphi_0$

Routhova funkce

Efektivní potenciál

$$\tilde{L} = \hat{L} - \dot{\varphi}p_\varphi = \frac{1}{2}\mu\Big(\dot{r}^2 + r^2\frac{l^2}{\mu^2r^4}\Big) - U(r) - \frac{l^2}{\mu r^2} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \frac{l^2}{2\mu r^2} - U(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U_{ef}(r) \qquad U_{ef}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

3) Pohyb konzervativní soustavy s jedním stupněm volnosti

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}T(q)\dot{q}^2 - U(q)$$

Integrál pohybu $\quad \dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = T + U = \dfrac{1}{2}T(q)\dot{q}^2 + U(q) = \text{Konst}$

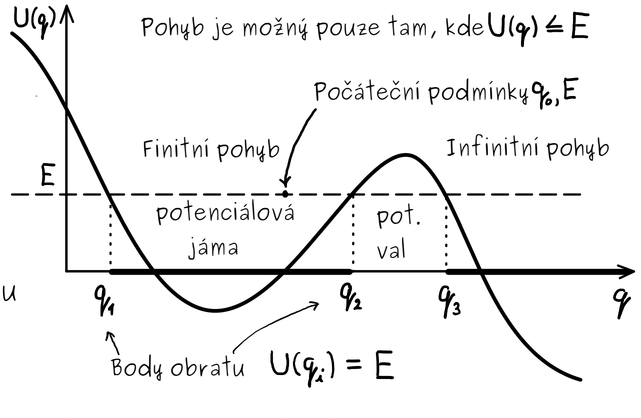
$$\dot{q}^2 = \frac{2(E-U(q))}{T(q)} \Rightarrow \dot{q} = \pm\sqrt{\frac{2(E-U(q))}{T(q)}}$$

znaménko určuje směr pohybu

$$\pm 1 = \sqrt{\frac{T(q)}{2(E-U(q))}}\,\dot{q} \quad \Big/ \int dt$$

$$\pm t = \int\sqrt{\frac{T(q)}{2(E-U(q))}}\,dq + t_0$$

řešení zapsané pomocí integrálu tzv. řešení v kvadraturách



Pozn. řešení původního problému dvou těles závisí celkem na 12 integračních konstantách, které jsme použili v tomto pořadí $\vec{P}, \vec{R}_0;\ \vec{L} \leftrightarrow (\Theta, \dot{\Theta}, l), \varphi_0;\ E, t_0$

Hamiltonův formalizmus (pro holonomní soustavy a potenciální síly v obecných souřadnicích)

Pozn: Kanonický tvar obyčejných diferenciálních rovnic $y_i' = \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_s) \quad \forall i \in \hat{s}$

LR2D $\frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot q_i} \underbrace{\dot q_j}_{v_j} + \underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_j \partial \dot q_i}}_{\mathbb{L}_{ij}} \underbrace{\ddot q_j}_{\dot v_j} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i \in \hat{s}$ $\longrightarrow$

$$\dot q_j = v_j \qquad \forall j \in \hat{s}$$

$$\dot v_k = (\mathbb{L}^{-1})_{ki} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot q_i} v_j \right] \Bigg|_{\dot{\vec q} = \vec v} \qquad \forall k \in \hat{s}$$

$$\det \mathbb{L} = \left| \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_j \partial \dot q_i} \right) \right| = \left| \left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot q_j} \right) \right| \neq 0$$

Jinak

$0 = \frac{d}{dt} \Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{p_i} \Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}$ $\quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(\vec q, \dot{\vec q}, t) \longrightarrow \dot q_j = \hat{\dot q}_j(\vec q, \vec p, t) \quad \forall j \in \hat{s}$

$$\dot p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Big|_{(\vec q, \hat{\dot{\vec q}}(\vec q, \vec p, t), t)} \qquad \forall i \in \hat{s}$$

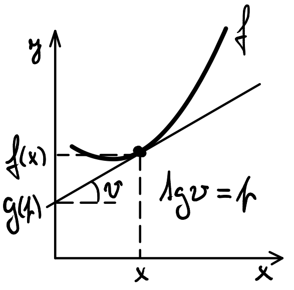
s ODR 2. řádu
přechází na
$2s$ ODR 1. řádu

Přejdeme pomocí fce. L od nezávislých proměnných $(\vec q, \dot{\vec q}, t) \underset{H}{\overset{L}{\rightleftarrows}} (\vec q, \vec p, t)$ k novým nezávislým proměnným a najdeme funkci H, která zprostředkuje přechod zpět a pomocí ní zapíšeme rovnice.

Legendreova duální transformace $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f = f(x) \quad$ (konvexní) $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x \xrightarrow{f} p \qquad \hat p = \frac{df}{dx}(x) = f'(x)$ inverzní funkce $\qquad df = \frac{df}{dx} dx = \hat p\, dx$

TEF
$p \xrightarrow{g} \pm x \qquad \pm \hat x = \frac{dg}{dp}(p) = g'(p) \qquad g'(f'(x)) = \pm x \qquad dg = \frac{dg}{dp} dp = \pm \hat x\, dp \quad \Big| \pm$
TSFA



$f(x) = px + g(p)$
$[x, f(x)]$
$\downarrow$
$[p, g(p)]$

$$d(f \pm g) = df \pm dg = p\,dx + x\,dp = d(px) \Rightarrow f \pm g = px + \underset{0}{\text{Konst.}}$$

$$g(p) = \pm (p \hat x(p) - \hat f(p)) \qquad \hat f(p) = f(\hat x(p))$$

$$f(x) = \hat p(x) x \mp \hat g(x) \qquad \hat g(x) = g(\hat p(x))$$

dualita transformace $\quad x \xrightarrow{f} p \xrightarrow{g} x$

Legendreova transformace Lagrangeovy funkce $\oplus \quad f \to L \quad x \to \dot{\vec q} \quad \frac{d}{dx} \to \frac{\partial}{\partial \dot q_i} \quad p \to \vec p \quad g \to H$

1) Obecná hybnost $\hat p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(\vec q, \dot{\vec q}, t) \Longrightarrow \dot q_i = \hat{\dot q}_i(\vec q, \vec p, t)$ lze pokud $\det \left(\frac{\partial \hat p_i}{\partial \dot q_j} \right) = \underbrace{\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_j \partial \dot q_i} \right)}_{\text{hessián}} \neq 0$

2) Hamiltonova funkce $H(\vec q, \vec p, t) = \sum_{j=1}^{\hat s} p_j \hat{\dot q}_j - \hat L = E(\vec q, \hat{\dot{\vec q}}(\vec q, \vec p, t), t)$ kde $\hat L(\vec q, \vec p, t) = L(\vec q, \hat{\dot{\vec q}}(\vec q, \vec p, t), t)$

obecná energie v proměnných $(\vec q, \vec p, t)$

3) Hamiltonovy kanonické rovnice (kanonický tvar LR2D)

I. sada $\boxed{\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}}$ nemá dynamický obsah, je ekvivalentní definici obecné hybnosti $\qquad \dot q_i = \hat{\dot q}_i(\vec q, \vec p, t) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \hat H(\vec q, \dot{\vec q}, t) = H(\vec q, \hat{\vec p}(\vec q, \dot{\vec q}, t), t) = E(\vec q, \dot{\vec q}, t)$

$\forall i \in \hat{s}$

$$\dot p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}(\hat p_j \dot q_j - \hat H) = \frac{\partial \hat p_j}{\partial q_i} \dot q_j - \frac{\partial \hat H}{\partial q_i} = \frac{\partial \hat p_j}{\partial q_i} \underbrace{\dot q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j}} \frac{\partial \hat p_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

II. sada $\boxed{\dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$ má dynamický obsah, nahrazuje Newtonovy rovnice $\quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(p_j \hat{\dot q}_j - \hat L) = \underbrace{p_j} \frac{\partial \hat{\dot q}_j}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}} \frac{\partial \hat{\dot q}_j}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \boxed{\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \Big|_{\dot{\vec q} = \hat{\dot{\vec q}}(\vec q, \vec p, t)}}$

Př. Konzervativní soustava (konzervativní síly a skleronomní vazby): $L(\vec q, \dot{\vec q}, t) = \frac{1}{2} T_{jk}(\vec q) \dot q_j \dot q_k - U(\vec q)$

obecná energie $E = \frac{1}{2} T_{jk}(\vec q) \dot q_j \dot q_k + \hat U(\vec q) \qquad \mathbb{T} = (T_{kj}(\vec q))$ symetrická pozitivně definitní matice

obecná hybnost

$$p_i = \frac{\partial \hat L}{\partial \dot q_i} = \frac{1}{2} T_{jk} \delta_{ji} \dot q_k + \frac{1}{2} T_{jk} \dot q_j \delta_{ki} = \frac{1}{2}(T_{ik} \dot q_k + T_{ji} \dot q_j) = T_{ik} \dot q_k \quad \Big/ (\mathbb{T}^{-1})_{ji} \Rightarrow (\mathbb{T}^{-1})_{ji} p_i = (\mathbb{T}^{-1})_{ji} (\mathbb{T})_{ik} \dot q_k = \dot q_j$$

Hamiltonova funkce

$$H = \frac{1}{2} T_{jk} (\mathbb{T}^{-1})_{ji} (\mathbb{T}^{-1})_{kl} p_i p_l + \hat U(\vec q) = \frac{1}{2} (\mathbb{T}^{-1})_{\underset{\circlearrowleft}{ji}} \delta_{jl} p_i p_l + U(\vec q) = \frac{1}{2} (\mathbb{T}^{-1})_{ij} p_i p_j + \hat U(\vec q)$$

Konfigurační prostor M – polohy systému, $\dim M = s$ souřadnice $(q_1, \dots, q_s)$

Fázový prostor Γ – stavy systému, $\dim \Gamma = 2s$ souřadnice $(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$

Pozn. hybnost "klasická" (kinetická) $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$ vektor X hybnost obecná (kanonická) $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$ kovektor

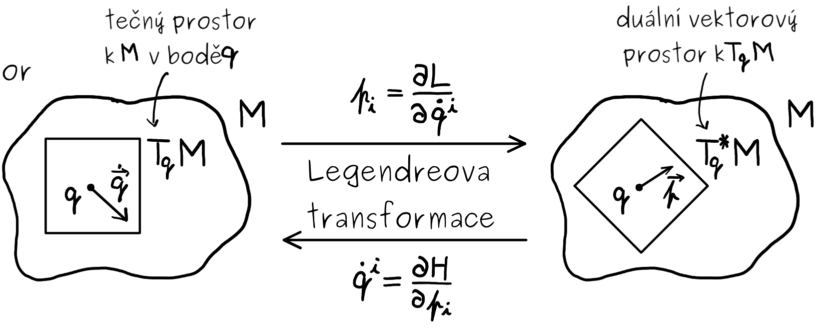
Pozn. Geometrie

Rychlostní fázový prostor
(tečný bandl)

$$TM = \bigcup_{q \in M} T_q M$$

Lagrangeova funkce

$$L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$



Fázový prostor
(kotečný bandl)

$$\Gamma = T^*M = \bigcup_{q \in M} T^*_q M$$

Hamiltonova funkce

$$H : \Gamma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Hamiltonovy rovnice *(dynamický systém na fázovém prostoru)*

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \forall i \in \hat{s}$$

$$dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \qquad dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt$$

$$q_i(t + dt) = q_i(t) + \frac{\partial H}{\partial p_i} dt$$

$$p_i(t + dt) \underset{\uparrow}{=} p_i(t) - \frac{\partial H}{\partial q_i} dt$$

Taylor do 1. řádu v dt => numerické řešení

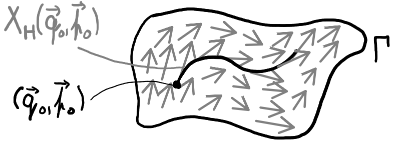
Vektorové pole (hamiltonovské)

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_i}}_{} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_i}}_{}$$

bazické vektory tečného prostoru k fázovému prostoru Γ v daném bodě

Fázová trajektorie – je řešení Hamiltonových rovnic $(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$

- je určena jednoznačně počátečními podmínkami $\vec{q}(0) = \vec{q}_0, \vec{p}(0) = \vec{p}_0$
- každým bodem Γ prochází právě jedna fázová trajektorie
- je integrální křivka pole X_H parametrizovaná časem tj. její tečný vektor v každém bodě $(\vec{q}, \vec{p})$ je $X_H(\vec{q}, \vec{p})$



Pozn. Hamiltonián H (resp. pole X_H) je generátorem časového vývoje =toku vektorového pole X_H

Fázový portrét – obraz na kterém jsou fázové trajektorie pro všechny počáteční podmínky (zobrazuje tzv. hamiltonovský tok – tok hamiltonovského vektorového pole X_H)

Př. Harmonický oscilátor $L(q, \dot q) = \frac{1}{2} m \dot q^2 - \frac{1}{2} k q^2$ $\quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = m \dot q \to \dot q = \frac{p}{m}$ $\quad H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k q^2$

Hamiltonovy rovnice

$$\left.\begin{aligned} \dot q &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot p &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \end{aligned}\right\}$$

řešení

$$\ddot q + \frac{k}{m} q = 0$$

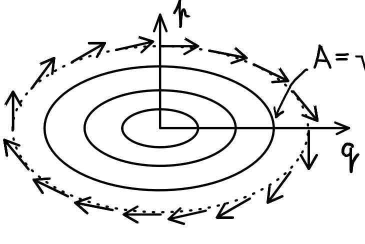
Fázová trajektorie

$$q(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + B\right)$$

$$p(t) = -\underbrace{\sqrt{km}\, A}_{\sqrt{2mE}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + B\right)$$

Hamiltonovské vektorové pole $X_H = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -kq \end{pmatrix}$

Fázový portrét



Integrál pohybu

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \text{Konst.} \Rightarrow H = \text{Konst.} \qquad \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = E \qquad \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{k}} = 1$$

Poissonovy závorky a Integrály Pohybu

Funkce $F = F(\vec{q}, \vec{p}, t)$ na fázovém prostoru se nazývá integrálem pohybu (I. P.), pokud pro každou fázovou trajektorii $(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t) = c \quad \forall t$.

$$\tilde F(t) = F(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t) = c \iff 0 = \frac{d\tilde F}{dt} = \left.\frac{dF}{dt}\right|_{H.R.} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{\partial H}{\partial p_i}}}{\dot q_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \underset{\overset{\shortparallel}{-\frac{\partial H}{\partial q_i}}}{\dot p_i} + \frac{\partial F}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{\{F, H\}} + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Věta Funkce $F(\vec{q}, \vec{p}, t)$ je integrálem pohybu pro systém s Hamiltonovou funkcí $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ $\iff$ $\boxed{\{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0}$

Poissonova závorka diferencovatelných funkcí F, G na fázovém prostoru

$$\{F,G\} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k}$$

Pozn. $\{.,.\} : \underbrace{C^\infty(\Gamma)}_{} \times C^\infty(\Gamma) \to C^\infty(\Gamma)$

Vektorový prostor hladkých funkcí na Γ
tj. fcí. třídy C^∞ na Γ

Vlastnosti Poissonových závorek $\forall F, G, F_1, F_2, F_3 \in C^2(\Gamma)$ platí:

1) antisymetrie $\{F,G\} = -\{G,F\} \Rightarrow \{F,F\} = 0$

2) bilinearita $\{c_1F_1 + c_2F_2, G\} = c_1\{F_1,G\} + c_2\{F_2,G\} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3) Jacobiho identita $\{F_1,\{F_2,F_3\}\} + \{F_2,\{F_3,F_1\}\} + \{F_3,\{F_1,F_2\}\} = 0$

4) Leibnitzovo pravidlo $\{F_1\cdot F_2, G\} = \{F_1,G\}\cdot F_2 + F_1\cdot\{F_2,G\}$

5) derivace podle parametru $\frac{\partial}{\partial t}\{F,G\} = \{\frac{\partial F}{\partial t}, G\} + \{F, \frac{\partial G}{\partial t}\}$

6) fundamentální Poissonovy závorky $\{q_i,q_j\} = 0 = \{p_i,p_j\}$, $\{q_i,p_j\} = \delta_{ij}$

Lineární algebra je vektorový prostor V vybavený bilineární operací : V×V→ V.

Lieova algebra $(C^\infty(\Gamma), \{.,.\})$ je lineární algebra jejíž operace je antisymetrická a splňuje Jacobiho identitu.

Poissonova algebra $(\overbrace{C^\infty(\Gamma), \{.,.\}}, \cdot)$

Asociativní algebra je lineární algebra jejíž operace je asociativní.

Hamiltonovy rovnice $\dot q_i = \{q_i, H\}$ $\dot p_i = \{p_i, H\}$ $\forall i \in \hat{s}$ → q_i, p_i jsou tzv. kanonicky sdružené proměnné

Pozn. *Q. M. pozorovatelným A, B přiřadí samosdružené operátory $\hat A, \hat B$ na Hilbertově prostoru stavů (kvadr. int. vlnových funkcí $\Psi(\vec x, t)$) jejichž (reálné) vlastní hodnoty odpovídají měřitelným hodnotám veličin, tak aby* $C = \{A,B\} \Rightarrow i\hbar\hat C = (\hat A\circ\hat B - \hat B\circ\hat A) = \underbrace{[\hat A, \hat B]}_{\text{komutátor}}$

$C = f(A_1,\dots,A_k) \Rightarrow \hat C = f(\hat A_1,\dots,\hat A_k)$ *(princip korespondence)* $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ kvůli rozměru (J.s)

např. $x_j \to \hat x_j(\Psi) = x_j\cdot\Psi$ $p_k \to \hat p_k(\Psi) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}\Psi$ $[\hat x_j, \hat p_k] = i\hbar\delta_{jk}$ $\hat H\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi$ $(i^2 = -1)$ kvůli samosdruženosti

Poissonova věta: Poissonova závorka dvou integrálů pohybu je opět integrálem pohybu.

I. P. tvoří Lieovu algebru

Dk. F_1, F_2 jsou I. P. pro systém s Hamiltonovou funkcí H $\quad \frac{dF_i}{dt}\Big|_{H.R.} = \{F_i, H\} + \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0 \quad i = 1,2$

$$\frac{d\{F_1,F_2\}}{dt}\Big|_{H.R.} = \{\{F_1,F_2\},H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{F_1,F_2\} = \{\{F_1,F_2\},H\} + \{\frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2\} + \{F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t}\} =$$

$$= \{\{F_1,F_2\},H\} - \{\{F_1,H\},F_2\} - \{F_1,\{F_2,H\}\} = \{\{F_1,F_2\},H\} + \{\{H,F_1\},F_2\} + \{\{F_2,H\},F_1\} = 0$$

Integrály pohybu snadno najdeme na základě proměnných které chybí v předpisu Hamiltonovy funkce

1) čas t $\quad H = H(\vec q, \vec p)$ tj. $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt}\Big|_{H.R.} = \{H,H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \longrightarrow$ Hamiltonova funkce $H = H(\vec q, \vec p) = \text{Konst.}$

2) cyklické souřadnice q_j tj. $\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow p_j = \text{Konst.}$ $\quad$ obdobně pro p_j tj. $\frac{\partial H}{\partial p_j} = 0 \Rightarrow q_j = \text{Konst.}$

Odvození Hamiltonových rovnic z Hamiltonova principu – variace křivek $\vec q(t)$ v konfiguračním prostoru

$$0 = \delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(\underbrace{\vec q, \dot{\vec q}}_{\text{nezávislé proměnné L}}, t)\,dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}(\hat p_i\dot q_i - H(\vec q, \vec{\hat p}, t))\,dt = \int_{t_1}^{t_2}(\dot q_i\delta\hat p_i + \underbrace{\hat p_i\delta\dot q_i}_{\frac{d}{dt}(\hat p_i\delta q_i) - \dot{\hat p}_i\delta q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta\hat p_i)\,dt =$$

pro
$\delta\vec q(t_1) = 0$
$\delta\vec q(t_2) = 0$
$\hat p_i = \frac{\partial L}{\partial\dot q_i}$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\Big[\underbrace{\Big(-\dot{\hat p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\Big)}_{\text{(II.)}\ 0'' \overset{\text{ZLVP}}{\Longleftarrow}}\underbrace{\delta q_i}_{\text{vzájemně nezávislé}} + \underbrace{\Big(\dot q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\Big)}_{=0 \text{ přímým výpočtem (I.) derivace}}\delta\hat p_i\Big]dt + \underbrace{\Big[\hat p_i\delta q_i\Big]_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ pevné konce}}$$

Pracujeme v proměnných $\vec q, \dot{\vec q}$ a až při zápisu výsledných rovnic přejdeme od $\vec q, \dot{\vec q}$ k $\vec q, \vec p$ a zrušíme tak střechy u $\vec p$

Variace $\delta\vec q$ a $\delta\vec{\hat p}$ nejsou navzájem nezávislé což nevadí neboť koeficienty u $\delta\vec{\hat p}$ jsou nula.

Modifikovaný Hamiltonův princip na fázovém prostoru – variace křivek $(\vec q(t), \vec p(t))$ ve fázovém prostoru

$$0 = \delta\bar S = \delta\int_{t_1}^{t_2}\underbrace{(p_i\dot q_i - H(\vec q, \vec p, t))}_{F(\vec q, \vec p, \dot{\vec q}, \dot{\vec p}, t)}\,dt$$

nezávislé proměnné F

pro
$\delta\vec q(t_1) = 0 = \delta\vec q(t_2)$
$\delta\vec p(t_1) = 0 = \delta\vec p(t_2)$ ← není nutné

Eulerovy–Lagrangeovy rce. pro funkcionál $\bar S$ (akci na fázovém pr.)

$$0 = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial\dot q_j}\Big) - \frac{\partial F}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}(p_i\delta_{ij}) + \frac{\partial H}{\partial q_j} = \dot p_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \Rightarrow \dot p_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial\dot p_j}\Big) - \frac{\partial F}{\partial p_j} = 0 - \delta_{ij}\dot q_i + \frac{\partial H}{\partial p_j} = -\dot q_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \Rightarrow \dot q_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

V této formulaci začínáme s akcí $\bar S$ na Γ. Variace $\delta\vec q$ a $\delta\vec p$ považujeme za nezávislé, stejně tak proměnné $\vec q, \vec p$, které již nejsou svázán definicí obecné hybnosti, nýbrž jen Hamiltonovými rovnicemi. V tomto smyslu již mají obě sady Hamiltonových rovnic dynamický obsah.

Kanonické transformace

Př. $H = H(\vec{p}, t)$ $\quad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i(t) = \alpha_i$ Konst.

$\forall i \in \hat{n}$ $\quad \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \omega_i(\vec{\alpha}, t) \Rightarrow q_i(t) = \int \omega_i(\vec{\alpha}, t)\, dt + q_{0i}$

Pokud najdeme transformaci na Γ která zachová tvar Hamiltonových rovnic a převede H na fci. nezávisející na $\vec{q}$ je úloha vyřešena v kvadraturách.

Pozn. Bodové transformace $q_j = q_j(\vec{Q}, t)$ $\forall j \in \hat{n}$ konfiguračního pr. automatický zachovávají tvar LR2D.

Hledáme transformace fázového prostoru Γ, které zachovávají tvar Hamiltonových rovnic

(1) $\quad q_i = q_i(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ $\quad \forall i \in \hat{n}$ třídy C^2

$\quad p_i = p_i(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ $\quad$ invertibilní $\left| \dfrac{\partial(\vec{q}, \vec{p})}{\partial(\vec{Q}, \vec{P})} \right| \neq 0$

Jacobián

tak, aby $\forall H = H(\vec{q}, \vec{p}, t) \in C^2(\Gamma \times \mathbb{R})$ $\exists K = K(\vec{Q}, \vec{P}, t) \in C^2(\Gamma \times \mathbb{R})$

tak, že $\forall (\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ na Γ platí $\quad \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \iff \begin{aligned} \dot{Q}_j &= \frac{\partial K}{\partial P_j} \\ \dot{P}_j &= -\frac{\partial K}{\partial Q_j} \end{aligned}$

Hamiltonovy rovnice lze odvodit z modifikovaného Hamiltonova principu

$$\delta S_1 = \delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{(p_i \dot{q}_i - H)}_{f(\vec{q}, \vec{p}, \dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}}, t)} dt = 0 \qquad \delta \vec{q}(t_{1,2}) = 0 = \delta \vec{p}(t_{1,2}) \qquad \delta\vec{q}, \delta\vec{p} \text{ nezávislé}$$

$$\delta S_2 = \delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{(P_j \dot{Q}_j - K)}_{g(\vec{Q}, \vec{P}, \dot{\vec{Q}}, \dot{\vec{P}}, t)} dt = 0 \qquad \delta \vec{Q}(t_{1,2}) = 0 = \delta \vec{P}(t_{1,2}) \qquad \delta\vec{Q}, \delta\vec{P} \text{ nezávislé}$$

oba funkcionály jsou definovány na stejném prostoru křivek a mají-li popisovat stejnou úlohu, musí nabývat stacionární hodnoty na stejných křivkách (pouze popsaných jinými souřadnicemi) to nastává v případech:

a) $S_2 = \lambda \cdot S_1$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ $\quad (P_j \dot{Q}_j - K) = \lambda(p_i \dot{q}_i - H)$ $\quad$ škálování $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ $\quad Q_j = \mu q_j$, $P_j = \nu p_j$ $\quad P_j \dot{Q}_j - K = \mu\nu p_j \dot{q}_j - K = \lambda(p_i \dot{q}_i - H)$

$\Rightarrow \lambda = \mu\nu \wedge K = \mu\nu H$

b) $S_1 = S_2 + C$ $\quad C \in \mathbb{R}$ $\quad$ (Vytvořující funkce) $\exists F = F(\vec{Q}, \vec{P}, t) \in C^{(2)}(\Gamma \times \mathbb{R})$ $\quad p_i \dot{q}_i - H = P_j \dot{Q}_j - K + \dfrac{\hat{d} F(\vec{Q}, \vec{P}, t)}{dt}$

Transformace (1) pro kterou $\exists F = F(\vec{Q}, \vec{P}, t) \in C^{(2)}(\Gamma \times \mathbb{R})$ a $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall H \in C^{(2)}(\Gamma \times \mathbb{R})$ $\exists K \in C^{(2)}(\Gamma \times \mathbb{R})$ splňující $\lambda(p_i \dot{q}_i - H) = P_j \dot{Q}_j - K + \dfrac{\hat{d} F}{dt}$ se nazývá

1. kanonická, pokud $\lambda = 1$
2. rozšířená kanonická, pokud $\lambda \neq 0, 1$ (lze získat jako 1. + škálování)
3. užší kanonická, pokud $\lambda = 1$ $\quad \dfrac{\partial Q_j}{\partial t} = 0 = \dfrac{\partial P_j}{\partial t}$ (bezčasová)

$\swarrow$

$$dF(\vec{Q}, \vec{P}, t) = p_i\, dq_i - P_j\, dQ_j + (K - H)\, dt$$

představuje rovnost dvou diferenciálních forem zapsaných v různých proměnných

upravíme buď levou (=>vytvořující fce.) nebo pravou stranu (=>kriteria kanoničnosti)

Vytvořující funkce kanonické transformace – je funkce vytvořená z F přepisem (nebo Legendreovou tr.) do takové sady proměnných, kdy $\forall j \in \hat{n}$ je vždy jedna z páru kanonicky sdružených proměnných Q_j, P_j ponechána velká (nová) a druhá převedena na malou (starou). Čtyři základní druhy vytvořujících fcí:

$$\begin{array}{c} ② \\ \\ ④ \end{array} \left| \begin{array}{c:c} \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{Q}} & \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{P}} \\ \hdashline \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{Q}} & \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{P}} \end{array} \right| \begin{array}{c} ① \\ \\ ③ \end{array} \neq 0$$

$$\begin{array}{c} ③ \\ \\ ④ \end{array} \left| \begin{array}{c:c} \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{q}} & \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{p}} \\ \hdashline \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{q}} & \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{p}} \end{array} \right| \begin{array}{c} ① \\ \\ ② \end{array} \neq 0$$

① Vytvořující fce. 1. druhu $\quad F_1 = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) = F(\vec{Q}, \vec{\hat{P}}, t)$ $\quad$ kde $\vec{\hat{P}} = \vec{\hat{P}}(\vec{q}, \vec{Q}, t) \Leftarrow \left| \dfrac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{P}} \right| \neq 0$

$$dF_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) = p_i\, dq_i - P_j\, dQ_j + (K - H)\, dt = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

$\dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i \quad \forall i \in \hat{n} \qquad \dfrac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -P_j \quad \forall j \in \hat{n}$

$K = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t}$ $\quad$ transformace Hamiltoniánu

hledáme-li transformaci danou fci. F_1 představují tyto vztahy definice $\vec{p}$ a $\vec{P}$

hledáme-li vytvořující fci. pro danou transformaci, je třeba zapsat $\vec{p}, \vec{P}$ jako fce $\vec{q}, \vec{Q}$ a řešit parciální dif. ro

② $F_2 = F_2(\vec{q}, \vec{P}, t) = F(\hat{Q}, \vec{P}, t) + P_j \cdot \hat{Q}_j = F_1 + P_j \cdot \hat{Q}_j$ $\quad \vec{\hat{Q}} = \vec{\hat{Q}}(\vec{q}, \vec{P}, t) \Leftarrow \left| \dfrac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{Q}} \right| \neq 0$ $\quad \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial P_j} = Q_j \quad K = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t}$

$dF = d(F_2 - P_j Q_j) = p_i\, dq_i - P_j\, dQ_j + (K - H)\, dt \Rightarrow dF_2(\vec{q}, \vec{P}, t) = p_i\, dq_i + Q_j\, dP_j + (K - H)\, dt$ $\quad$ Legendreova tr. fce. F_1

③ $F_3(\vec{p}, \vec{Q}, t) = F_1 - p_i q_i$ $\quad \dfrac{\partial F_3}{\partial p_i} = -q_i \quad \dfrac{\partial F_3}{\partial Q_j} = -P_j$

④ $F_4(\vec{p}, \vec{P}, t) = F_1 - p_i q_i + P_j Q_j$ $\quad \dfrac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q_i \quad \dfrac{\partial F_4}{\partial P_j} = Q_j$

Kriteria kanoničnosti – nutné a postačující podmínky pro kanoničnost transformace: $q_i = q_i(\vec{Q},\vec{P},\lambda)$ $p_i = p_i(\vec{Q},\vec{P},\lambda)$

$$dF(\vec{Q},\vec{P},\lambda) = p_i\,dq_i - P_j\,dQ_j + (K-H)\,d\lambda = \underbrace{\left(p_i\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - P_j\right)}_{\frac{\partial F}{\partial Q_j}} dQ_j + \underbrace{p_i\frac{\partial q_i}{\partial P_j}}_{\frac{\partial F}{\partial P_j}} dP_j + \underbrace{\left(K - H + p_i\frac{\partial q_i}{\partial \lambda}\right)}_{\frac{\partial F}{\partial \lambda}} d\lambda$$

$$dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}dQ_j + \frac{\partial q_i}{\partial P_j}dP_j + \frac{\partial q_i}{\partial \lambda}d\lambda$$

pokud má F existovat musí být tato diferenciální forma uzavřená

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Q_k \partial Q_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q_j \partial Q_k} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial Q_k}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + p_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_k\partial Q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial Q_k} = \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + p_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_j\partial Q_k} - \frac{\partial P_k}{\partial Q_j} \qquad 0 = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\frac{\partial p_i}{\partial Q_k} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = [Q_j, Q_k]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial P_k \partial P_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial P_j \partial P_k} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_k}\frac{\partial q_i}{\partial P_j} + p_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial P_k\partial P_j} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} + p_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial P_j\partial P_k} \qquad 0 = \frac{\partial q_i}{\partial P_j}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial P_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} = [P_j, P_k]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial P_k \partial Q_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q_j \partial P_k} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_k}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + p_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial P_k\partial Q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial P_k} = \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} + p_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_j\partial P_k} \qquad \delta_{jk} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} = [Q_j, P_k]$$

zbylé podmínky jsou definičními vztahy pro fci. K a na transformaci již nekladou žádná další omezení

Ⓘ $[Q_j, P_k] = \delta_{jk} \quad \forall j,k \in \hat{s}$

$[Q_j, Q_k] = 0 = [P_j, P_k]$

Lagrangeovy závorky – definované pro souřadnice fázového prostoru

$$[Q_j, P_k]_{(q,p)} = \sum_{i=1}^{\hat{s}} \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_k}\right)$$

indexem u závorek jsou někdy značeny funkce které se v nich derivují

Pozn. $[Q_j, P_k]_{(Q,P)} = \frac{\partial Q_i}{\partial Q_j}\frac{\partial P_i}{\partial P_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial P_k}\frac{\partial P_i}{\partial Q_j} = \delta_{ij}\delta_{ik} - 0 = \delta_{jk} = [Q_j, P_k]_{(q,p)}$

Lagrangeovy závorky jsou invariantní při kanonické tr.

Jednotné souřadnice fázového prostoru Γ – zjednoduší zápis, reflektují rovnocennost $\vec{q}$ a $\vec{p}$

$r_i = q_i$

$r_{s+i} = p_i \quad \forall i \in \hat{s}$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \\ p_1 \\ \vdots \\ p_s \end{pmatrix}$$

Hamiltonovy rovnice $\dot{r}_i = \mathbb{J}_{ik}\frac{\partial H}{\partial r_k} \quad \forall i \in \widehat{2s} \qquad \dot{\vec{r}} = \mathbb{J}\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}\right)^T$

Poissonovy závorky $\{F, G\}_r = \frac{\partial F}{\partial r_i}\mathbb{J}_{ik}\frac{\partial G}{\partial r_k} = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{r}}\right)\mathbb{J}\left(\frac{\partial G}{\partial \vec{r}}\right)^T$

Lagrangeovy závorky $[F, G]_r = \frac{\partial r_i}{\partial F}\mathbb{J}_{ik}\frac{\partial r_k}{\partial G} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial F}\right)^T\mathbb{J}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial G}\right)$

(symplektická) matice řádu $2s \times 2s$

$$\mathbb{J} = \left(\begin{array}{c:c} 0 & \mathbb{1}_s \\ \hdashline -\mathbb{1}_s & 0 \end{array}\right) \in SO(2s) \qquad \mathbb{J}^{-1} = \mathbb{J}^T = -\mathbb{J} \qquad \mathbb{J}^2 = -\mathbb{1}_{2s} \qquad \det\mathbb{J} = 1$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{r}}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial r_{2s}}\right) \qquad \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial F}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial F} \\ \vdots \\ \frac{\partial r_{2s}}{\partial F} \end{pmatrix}$$

Transf. (1) $r_j = r_j(\vec{Z}, \lambda)$ třídy C^2 $\forall j \in \widehat{2s}$ $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right| = \left|\left(\frac{\partial r_j}{\partial Z_k}\right)\right| \neq 0$ je kanonická $\Longleftrightarrow$

Ⓘ $$\mathbb{J}_{ik} = [Z_i, Z_k]_r = \frac{\partial r_m}{\partial Z_i}\mathbb{J}_{ml}\frac{\partial r_l}{\partial Z_k} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)_{mi}\mathbb{J}_{ml}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)_{lk} = \left(\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)^T\mathbb{J}\underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)}_{\mathbb{A}}\right)_{ik} \Longleftrightarrow$$

$\forall i,k \in \widehat{2s}$

$[Q_j, P_k] = \delta_{jk} \quad \forall j,k \in \hat{s} \quad / \cdot \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)$

$[Q_j, Q_k] = 0 = [P_j, P_k]$

Ⓘⓘ $$\mathbb{J}_{ik} = \{Z_i, Z_k\}_r = \frac{\partial Z_i}{\partial r_m}\mathbb{J}_{ml}\frac{\partial Z_k}{\partial r_l} = \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)_{im}\mathbb{J}_{ml}\left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)_{kl} = \left(\overbrace{\left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)}^{\mathbb{A}^{-1}}\mathbb{J}\left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)^T\right)_{ik} \Longleftrightarrow$$

$\{Q_j, P_k\} = \delta_{jk} \quad \forall j,k \in \hat{s}$

$\{Q_j, Q_k\} = 0 \quad \{P_j, P_k\} = 0$

Ⓘⓘⓘ Přímé (symplektické) podmínky

symplektický – z řečtiny sym+plektikos = spletený dohromady (Weyl 1939)

$$\mathbb{J}\underbrace{\left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)}_{\mathbb{A}^{-1}} = \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)^T}_{\mathbb{A}^T}\mathbb{J} \qquad \mathbb{J}_{il}\frac{\partial Z_l}{\partial r_k} = \frac{\partial r_l}{\partial Z_i}\mathbb{J}_{lk} \quad \forall i,k \in \widehat{2s}$$

$$\left(\begin{array}{c:c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{q}} & \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{p}} \\ \hdashline -\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{q}} & -\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{p}} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} -\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{Q}}\right)^T & \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{Q}}\right)^T \\ \hdashline -\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{P}}\right)^T & \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{P}}\right)^T \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} \frac{\partial P_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial P_i} & -\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \end{array}} \quad \forall i,j \in \hat{s}$$

Pro časově nezávislou transformaci lze tyto podmínky odvodit i přímým výpočtem derivací složených funkcí z Hamiltonových rovnic.

Podobné (avšak pouze postačující) podmínky lze odvodit i z uzavřenosti forem dF_i, rozdíl je ve funkcích které zde vystupují. Např. pro $dF_1(\vec{q},\vec{Q})$

$$\frac{\partial \hat{P}_i(\vec{q},\vec{Q})}{\partial q_j} = -\frac{\partial \hat{p}_j(\vec{q},\vec{Q})}{\partial Q_i} \quad \text{vs.} \quad \frac{\partial P_i(\vec{q},\vec{p})}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j(\vec{Q},\vec{P})}{\partial Q_i}\Bigg|_{\vec{Q}(\vec{q},\vec{p}),\vec{P}(\vec{q},\vec{p})}$$

Dk. $$\underset{Ⓘ}{\mathbb{J} = \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A}} \Longleftrightarrow \underset{Ⓘⓘⓘ}{\mathbb{J}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T\mathbb{J}} \Longleftrightarrow \mathbb{J}^2\mathbb{A}^{-1}\mathbb{J} = \mathbb{J}\mathbb{A}^T\mathbb{J}^2 \Longleftrightarrow \mathbb{A}^{-1}\mathbb{J} = \mathbb{J}\mathbb{A}^T \Longleftrightarrow \underset{Ⓘⓘ}{\mathbb{A}^{-1}\mathbb{J}(\mathbb{A}^{-1})^T = \mathbb{J}} \Longleftrightarrow \mathbb{J} = \mathbb{A}\mathbb{J}\mathbb{A}^T$$

Věta: Pro každou kanonickou transformaci platí $\overline{\{F,G\}_{(q,p)}} = \{\overline{F},\overline{G}\}_{(Q,P)}$ Poissonovy závorky jsou invariantní při kanonické tr.

pruh označuje fce. vyjádřené ve velkých proměnných $\overline{F}(\vec{Z},t) = F(\vec{r}(\vec{Z},t),t)$

Dk. $$\overline{\{F,G\}_r} = \overline{\frac{\partial F}{\partial r_i}} J_{ik} \overline{\frac{\partial G}{\partial r_k}} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial Z_l} \overline{\frac{\partial Z_l}{\partial r_i}} J_{ik} \overline{\frac{\partial Z_m}{\partial r_k}} \frac{\partial \overline{G}}{\partial Z_m} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial Z_l} \overline{\{Z_l, Z_m\}_r} \frac{\partial \overline{G}}{\partial Z_m} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial Z_l} J_{lm} \frac{\partial \overline{G}}{\partial Z_m} = \{\overline{F},\overline{G}\}_Z$$

Matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2s,2s}$ se nazývá <u>symplektická</u> $\iff \mathbb{A}^T\mathbb{J} = \mathbb{J}\mathbb{A}^{-1} \iff \mathbb{J} = \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A} \iff \mathbb{J} = \mathbb{A}\mathbb{J}\mathbb{A}^T \iff \mathbb{A}^{-1}\mathbb{J} = \mathbb{J}\mathbb{A}^T$

Kriteria lze shrnout do věty: **Transformace (1) je kanonická $\iff$ její Jacobiho matice je symplektická.**

<u>Kanonické transformace tvoří grupu</u> – tr. souřadnic (třídy $C^{(2)}$) na fázovém prostoru Γ tvoří grupu

- identická transformace je kanonická $\vec{r} = \vec{Z}$ $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right) = \mathbb{1}$ $\mathbb{1}^T\mathbb{J}\cdot\mathbb{1} = \mathbb{J}$
- inverzní tr. ke kanonické tr. je kanonická $\mathbb{A} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)$ $\mathbb{A}^{-1} = \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)$ $\mathbb{J} = \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A} \Rightarrow \overbrace{(\mathbb{A}^T)^{-1}}^{(\mathbb{A}^{-1})^T}\mathbb{J}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{J}$
- složení kanonických tr. je kanonická tr. $\vec{r} = \vec{r}(\vec{Z},t)$ $\vec{Y} = \vec{Y}(\vec{r},t)$ $\mathbb{B} = \left(\frac{\partial \vec{Y}}{\partial \vec{r}}\right)$ $\left(\frac{\partial \vec{Y}}{\partial \vec{Z}}\right) = \left(\frac{\partial \vec{Y}}{\partial \vec{r}}\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right) = \mathbb{B}\cdot\mathbb{A}$

Lze to dokázat i pomocí vytvořujících funkcí, ty se při skládání transformací sčítají.

$$(\mathbb{B}\mathbb{A})^T\mathbb{J}(\mathbb{B}\mathbb{A}) = \mathbb{A}^T\underbrace{(\mathbb{B}^T\mathbb{J}\mathbb{B})}_{\mathbb{J}}\mathbb{A} = \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A} = \mathbb{J}$$

$\Rightarrow$ symplektické matice tedy tvoří grupu tzv. <u>Symplektická grupa</u> $Sp(2s,\mathbb{R}) = \{\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2s,2s} \mid \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A} = \mathbb{J}\}$

Tvrzení: Determinant libovolné symplektické matice je roven jedné tj. $\forall \mathbb{A} \in Sp(2s,\mathbb{R})$ $\det \mathbb{A} = 1$

Dk. Pfaffián definovaný pro $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2s,2s}$, $\mathbb{A}^T = -\mathbb{A}$ $\mathrm{Pf}(\mathbb{A}) = \frac{1}{2^s s!}\sum_{\pi \in S_{2s}} \mathrm{sgn}\,\pi\, A_{\pi(1),\pi(2)} \dots A_{\pi(2s-1),\pi(2s)}$ $\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a$
má vlastnosti

$$\det \mathbb{A} = (\mathrm{Pf}\,\mathbb{A})^2 \qquad \forall \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{2s,2s}\ \mathrm{Pf}(\mathbb{B}^T\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det \mathbb{B}\,\mathrm{Pf}\,\mathbb{A} \qquad \mathrm{Pf}\,\mathbb{J} = \mathrm{Pf}(\mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A}) = \det \mathbb{A}\,\mathrm{Pf}\,\mathbb{J} \Rightarrow \det \mathbb{A} = 1$$

Pozn. Kriteria kanoničnosti nekladou žádné podmínky na funkce K,H (kanoničnost tr. nezávisí na konkrétní fyzikální úloze) ani na časový průběh transformace. Proto lze čas považovat za nezávislý parametr a na časově závislou tr. nahlížet jako na jednoparametrickou množinu po sobě jdoucích časově nezávislých transformací. Kanoničnost transformace znamená zachování symplektické formy.

Symplektický vektorový prostor (V,ω) je vektorový prostor V nad $\mathbb{R}$ vybavený symplektickou formou ω

Symplektická forma ω na V je zobrazení $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$, které je současně

- bilineární $\omega(x,y) = \omega(x^i e_i, y^j e_j) = x^i y^j \omega(e_i,e_j) = x^i y^j \omega_{ij} = \vec{x}^T\omega\vec{y}$ $(\dim V = n$ a $(e_1,\dots,e_n)$ báze $V)$
- antisymetrické $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$ $\forall x,y \in V$
- nedegenerované $(\omega(x,y) = 0\ \forall y \in V) \Rightarrow x = 0$

$$\left.\begin{matrix} \omega^T = -\omega \\ \det(\omega) \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dim V = 2s$$

dimenze symplektického pr. je vždy sudá

Pozn. Ve V existuje tzv. symplektická báze ve které je $\omega = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1}_s \\ \hline -\mathbb{1}_s & 0 \end{array}\right) = \mathbb{J}$

Automorfizmy (symetrie) prostoru (V,ω) jsou lineární bijekce $A : V \to V$ zachovávající formu ω
tj. $\omega(Ax,Ay) = \omega(x,y)$ $\forall x,y \in V$ v bázi V $(\mathbb{A}\vec{x})^T\omega\mathbb{A}\vec{y} = \vec{x}^T\mathbb{A}^T\omega\mathbb{A}\vec{y} = \vec{x}^T\omega\vec{y}$ $\forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

Pozn. Nedegenerovanou bilineární formu lze využít k ztotožnění vek. pr. V a jeho duálu V^*
$\forall \alpha \in V^*\ \exists_1 v \in V\ \forall u \in V$ $\alpha(u) = \omega(u,v)$ zobrazení $b_\omega(v) = \omega(.,v)$ je izomorsizmus V na V^*

Hamilton–Jacobiho rovnice (HJR)

Hledáme vytvořující funkci kanonické tr. 2. druhu $F_2(\vec{q},\vec{P},t)$ která převede zadaný hamiltonián H na co nejjednodušší tvar tj. řeší rovnici $K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$ kde je dosazeno $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ do fce. $H(\vec{q},\vec{p},t)$.

Což je parciální diferenciální rovnice určující jak F_2 závisí na $\vec{q}$ a t. Pak
Hledaná časově závislá transformace představuje přechod
$(\vec{q},\vec{p}) \xrightarrow{F_2} (\vec{Q},\vec{P})$ do souřadnic, ve kterých je systém v klidu.

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j} = 0 \Rightarrow Q_j = \text{Konst.}$$
$$\dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow P_j = \text{Konst.}$$

Pozn. Lze hledat i vytvořující funkce jiných druhů např. $F_3(\vec{p},\vec{Q},t)$ – pak dosazujeme do H za $q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$

Hamilton–Jacobiho rovnice

$$\boxed{H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

je parciální diferenciální rovnice 1. řádu pro neznámou funkci S závisející na $s+1$ navzájem nezávislých proměnných $\vec{q}, t$.

Její řešení (úplný integrál HJR) závisí na $s+1$ integračních konstantách.

Neboť S vystupuje v rovnici pouze skrze své derivace, je určeno až na aditivní konstantu, kterou lze považovat za jednu z těchto $s+1$ konstant. Zbylých s konstant označíme $P_1,\dots,P_s$.

Řešení HJR $S = S(\vec{q},t,\vec{P})$, nazývané hlavní funkce Hamiltonova, obsahuje úplnou informaci o systému.

Jacobiho věta: Hlavní funkce Hamiltonova $S(\vec{q},t,\vec{P})$ je vytvořující funkce kanonické transformace $(\vec{Q},\vec{P}) \longrightarrow (\vec{q},\vec{p})$ která udává pohyb dané soustavy tj.

Pozn. k $\frac{\partial S}{\partial P_j}$ fce. $S(\vec{q},t,\vec{P})$ funkcí $2s+1$ nezávislých proměnných $\vec{q},t,\vec{P}$ přičemž proměnné $\vec{P}$ jsou konstanty (integrály pohybu) pouze pro soustavu popsanou Hamiltonovou funkcí H. Tr. danou fcí. S lze použít i na jiný systém se stejným s, pak ale $\vec{P}$ nemusí být konst.

$$\forall j \in \hat{s} \quad \begin{aligned} Q_j &= \frac{\partial S}{\partial P_j}(\vec{q},t,\vec{P}) \longrightarrow q_i = q_i(t,\vec{Q},\vec{P}) \\ p_j &= \frac{\partial S}{\partial q_j}(\vec{q},t,\vec{P}) \longrightarrow p_i = p_i(t,\vec{Q},\vec{P}) \end{aligned} \quad \forall i \in \hat{s} \Bigg\}$$

je fázová trajektorie soustavy s Hamiltonovou funkcí $H = -\frac{\partial S}{\partial t}\Big|_{(\vec{q},t,\vec{P}(\vec{q},\vec{p},t))}$

Řešení HJR – separací proměnných. Pokud $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, separujeme čas $S = -E(\vec{P})t + S_0(\vec{q},\vec{P})$ a hledáme charakteristickou funkci Hamiltonovu $S_0(\vec{q},\vec{P})$ jako řešení bezčasové HJR $H(\vec{q},\frac{\partial S_0}{\partial \vec{q}}) = E$

Význam hlavní funkce Hamiltonovy

$$S(\vec{q},\tilde{t},\vec{Q}) = \int_{t_0(\vec{Q})}^{\tilde{t}(\vec{q})} L(\vec{q}(t),\dot{\vec{q}}(t),t)\,dt$$

$$\frac{dS}{dt}\Big|_{H.R.} = \underset{\substack{\parallel \\ p_j \\ \text{vytvořující fce.}}}{\frac{\partial S}{\partial q_j}}\dot{q}_j + \underset{\substack{\parallel \\ -H \\ \text{HJR}}}{\frac{\partial S}{\partial t}} + \frac{\partial S}{\partial P_k}\underset{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{integrál pohybu}}}{\dot{P}_k} = p_j\dot{q}_j - H = L$$

derivace podél fázové trajektorie

Hlavní fce. Hamiltonova je akce vypočtená podél skutečné trajektorie v konfiguračním prostoru vycházející v čase t_0 z bodu $\vec{Q}$ (s hybností $\vec{P} = -\frac{\partial S}{\partial \vec{Q}}$ jako funkce "horní meze" $\vec{q}$ v čase $\tilde{t}$

Charakteristická fce. Ham. je zkrácená akce vypočtená podél skutečné trajektorie $\frac{dS_0}{dt}\Big|_{HR} = \frac{\partial S_0}{\partial q_i}\dot{q}_i = p_i\dot{q}_i \quad S_0 = \int p_i dq_i$

Př. Volný hmotný bod $L = \frac{1}{2}m\dot{q}_i^2 \quad H = \frac{p_i^2}{2m}$

$q_i(t) = Q_i + v_i t \quad v_i = \frac{q_i - Q_i}{t} = \text{Konst.} \quad t_0 = 0$ čas kdy $\vec{q}(t) = \vec{Q}$

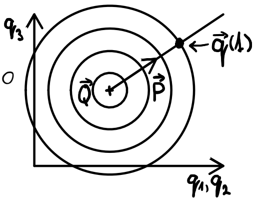
HJR $H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

$$S = \int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}m\dot{q}_i^2\,d\tilde{t} = \int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}mv_i^2\,d\tilde{t} = \left[\frac{1}{2}mv_i^2\tilde{t}\right]_{t_0}^{t} = \frac{1}{2}mv_i^2 t = \frac{m}{2t}(q_i - Q_i)^2$$

Pozn.

1) $S = S(\vec{q},t,\vec{Q})$ lze považovat za rovnici vlnoplochy šířící se konfiguračním pr. M.

Pro dané t představuje $S(\vec{q},t,\vec{Q}) = \text{Konst.}$ rovnici nadplochy v konf$M$pr. která se při změně t šíří jako "čelo rázové vlny". Bod popisující konfiguraci systému je bodem této nadplochy určeným podmínkou $\vec{P} = -\frac{\partial S}{\partial \vec{Q}}$
Kanonická hybnost $\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}} = \nabla_q S$ je normálou k této nadploše a pokud je rovnoběžná s obecnou rychlostí $\dot{\vec{q}}$
pak trajektorie jsou kolmé k nadplochám. Na vývoj systému tak lze pohlížet jako šíření vlnoplochy v konfiguračním prostoru a na trajektorie jako na paprsky.



2) Rovnice eikonálu ve vakuu $\sum_{i=1}^{3} v^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2$ odpovídá HJR fotonu $H = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$, $\sum_{i=1}^{3} c^2\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + m_0^2c^4 = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2$

3) Schrödingerova rce. $i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(\vec{x})\cdot\psi$ pro vlnovou funkci $\psi = \psi(\vec{x},t)$ kde $P_{\text{rob.}}(\vec{x},t) = \bar{\psi}\psi\,dV$

hledáme-li řešení tvaru $\psi(\vec{x},t) = C\exp\left[\frac{i}{\hbar}S(\vec{x},t)\right]$ pak rovnice pro S $\quad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + U(\vec{x}) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\Delta S$

v limitě pro $\hbar \to 0$ přejde na HJR (Klasická limita kvantové mechaniky)

Bezčasová Schr. rce. $\hat{H}\psi = E\psi$ – hledání vlastních vektorů $\hat{H}$ odpovídá řešení bezčasové HJR.

Plochy konstantní fáze $S = \text{Konst.}$ vlnové fce. ψ kvant. mech. jsou v této limitě kolmé na klasické trajektorie.

Diferenciální formy

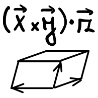
vek. pr. V nad $\mathbb{R}$, $(e_1,\dots,e_m)$ báze V, $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^m)$ duální báze V^*, $\varepsilon^i(e_j)=\delta_{ij}$, $k\in\mathbb{N}_0$, $k\leq m$

k-tá vnější mocnina pr. V^* je reálný vek. pr. $\Lambda^k(V^*)$ všech (úplně) antisymetrických k-lineárních forem na V tj. $\alpha:\underbrace{V\times\dots\times V}_{k \text{ krát}}\rightarrow\mathbb{R}$ lineárních v každé složce a splňujících $\forall\pi\in S_k\quad \alpha(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})=\operatorname{sgn}\pi\,\alpha(v_1,\dots,v_k)\quad\forall v_1,\dots,v_k\in V$

Vnější algebra vek. pr. V^* je vek. pr. $\Lambda V^*=\bigoplus_{k=0}^{m}\Lambda^k(V^*)$ nehomogenních forem spolu s bilineární asociativní operací $\wedge:\Lambda V^*\times\Lambda V^*\rightarrow\Lambda V^*$ nazývanou <u>vnější součin</u>, definovanou na homogenních formách $\alpha\in\Lambda^k(V^*),\beta\in\Lambda^l(V^*)$ předpisem $(\alpha\wedge\beta)(v_1,\dots,v_{k+l})=\frac{1}{k!\,l!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}\operatorname{sgn}\pi\,\alpha(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})\cdot\beta(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)})\quad\forall v_1,\dots,v_{k+l}\in V$ a splňující $\alpha\wedge\beta=(-1)^{k\cdot l}\beta\wedge\alpha$

$\dim\Lambda^k(V^*)=\binom{m}{k}$ Př. $V=\mathbb{R}^3$ $\Lambda^0(V^*)=\mathbb{R}$ $\Lambda^1(V^*)=V^*$ $\Lambda^2(V^*)$ $(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}=\sum_{\pi\in S_3}\operatorname{sgn}\pi\, x^{\pi(1)}y^{\pi(2)}z^{\pi(3)}=\underbrace{\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2\wedge\varepsilon^3}_{\text{báze }\Lambda^3(V^*)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

$\dim\Lambda V^*=2^m$ báze (1) $(\varepsilon^1,\varepsilon^2,\varepsilon^3)$ $(\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^3,\varepsilon^2\wedge\varepsilon^3)$ $\varepsilon^i(\vec{x})=x^i$



Diferenciální forma stupně k na Γ (k-forma) je zobrazení $\alpha: b\in\Gamma\longrightarrow\alpha(b)\in\Lambda^k(T^*_b\Gamma)$ které každému $b\in\Gamma$ přiřadí k-lineární antisymetrickou formu na tečném prostoru $T_b\Gamma$ ke Γ v bodě b.

$\Omega^k(\Gamma)$ množina všech k-forem na Γ $\Omega^0(\Gamma)$ reálné funkce na Γ

Existuje právě jedno lineární zobrazení nazývané <u>vnější derivace</u> $d:\Omega^k(\Gamma)\longrightarrow\Omega^{k+1}(\Gamma)$ $0\leq k\leq 2s-1$ s vlastnostmi

1, $\forall f\in\Omega^0(\Gamma)$ je df diferenciál fce. f 2, $d\circ d=0$ 3, $\forall\alpha\in\Omega^k(\Gamma)\,\forall\beta\in\Omega^l(\Gamma)$ $d(\alpha\wedge\beta)=(d\alpha)\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge(d\beta)$

<u>Symplektická forma</u> ω na Γ je 2-forma $\omega\in\Omega^2(\Gamma)$ která je uzavřená $(d\omega=0)$ a nedegenerovaná $(\det\omega\neq 0)$

Na fázovém prostoru existuje globálně (díky jeho struktuře $\Gamma=T^*M$) kanonická Cartanova 1-forma $\Theta=\sum_{i=1}^{s}p_i dq_i$

$$d\Theta=d(p_i dq_i)=dp_i\wedge dq_i+(-1)^0 p_i\wedge d(dq_i)=dp_i\wedge dq_i=\omega=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2s}\omega_{ij}dz_i\wedge dz_j\qquad(\omega_{ij})=\left(\begin{array}{c|c}0&-\mathbb{1}_s\\\hline\mathbb{1}_s&0\end{array}\right)=\omega$$

Kanoničnost tr. $\vec{Q}=\vec{Q}(\vec{q},\vec{p},t),\ \vec{P}=\vec{P}(\vec{q},\vec{p},t)$ odpovídá existenci funkce $F(\vec{Q},\vec{P},t)$ splňující podmínku $p_i dq_i-H\,dt=P_j dQ_j-K\,dt+dF$ vedoucí na kriteria kanoničnosti, která nezávisí na časovém vývoji transformace. Čas lze tedy (při zkoumání kanoničnosti) považovat za parametr, který určuje konkrétní bezčasovou kanonickou tr. z 1-parametrické množiny bezčasových kanonických tr. tvořících dohromady časově závislou kanonickou tr. a kanoničnost tak lze vyšetřovat pro každé pevné t zvlášť, $t=$ konst $dt=0$ a podmínka přejde na $p_i dq_i=P_j dQ_j+dF$ odkud aplikací vnější derivace získáme $dp_i\wedge dq_i=dP_j\wedge dQ_j+ddF$ což je podmínka zachování symplektické formy

$$dp_i\wedge dq_i=dP_j\wedge dQ_j\qquad\frac{1}{2}\omega_{ij}dz_i\wedge dz_j=\frac{1}{2}\omega_{kl}\,dZ_k\wedge dZ_l=\frac{1}{2}\omega_{kl}\left(\frac{\partial Z_k}{\partial z_i}dz_i\right)\wedge\left(\frac{\partial Z_l}{\partial z_j}dz_j\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial Z_k}{\partial z_i}\omega_{kl}\frac{\partial Z_l}{\partial z_j}dz_i\wedge dz_j$$

Kanonické transformace tedy představují symetrie fázového prostoru jakožto symplektické variety (Γ,ω) (tzv. symplektomorfizmy).

Poincaréovy integrální invarianty

Buď $D\subset\Gamma$ podvarieta sudé dimenze $2k$, $k\in\hat{s}$ fázového prostoru (Γ,ω), pak integrály $I^k[D]=\int_D\underbrace{\omega\wedge\dots\wedge\omega}_{k\text{ krát}}$ jsou invarianty libovolné (aktivní) kanonické transformace $\phi:\Gamma\rightarrow\Gamma$ tj. $I^k[\phi(D)]=I^k[D]$

Dk. pouze pro k=1

$$I^1[\phi(D)]=\int_{\phi(D)}\omega=\int_{\phi(D)}dP_i\wedge dQ_i=\int_D\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial P_i}{\partial p_j}dp_j\right)\wedge\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}dq_k+\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}dp_k\right)=\int_D\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}dq_j\wedge dq_k+\frac{\partial P_i}{\partial \underset{\downarrow}{q_j}}\frac{\partial Q_i}{\partial \underset{\downarrow}{p_k}}\underset{(-dp_k\wedge dq_j)}{dq_j\wedge dp_k}+$$

$$+\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}dp_j\wedge dq_k+\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}dp_j\wedge dp_k=\int_D\frac{1}{2}[q_k,q_j]_{Q,P}dq_j\wedge dq_k+\underbrace{[q_k,p_j]_{Q,P}}_{\delta_{kj}}dp_j\wedge dq_k+\frac{1}{2}[p_k,p_j]_{Q,P}dp_j\wedge dp_k=\int_D dp_k\wedge dq_k=I^1[D]$$

Pozn. Objem na fázovém prostoru je určen pomocí nenulové 2s-formy, obvykle Liovilleovy formy objemu $\Omega=\frac{1}{s!}(-1)^{\frac{s(s-1)}{2}}\underbrace{\omega\wedge\dots\wedge\omega}_{s\text{ krát}}=dq_1\wedge\dots\wedge dq_s\wedge dp_1\wedge\dots\wedge dp_s=dz_1\wedge\dots\wedge dz_{2s}$ $V(D)=\int_D\Omega$

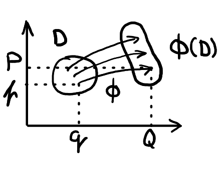
Liouvilleova věta 1) Velikost objemu libovolné oblasti D fázového prostoru Γ se při (aktivní) kanonické transformaci ϕ nemění tj. $V(D)=V(\phi(D))$

2) Při časovém vývoji systému se objem libovolné oblasti fázového prostoru nemění.

$$\text{Dk.}\quad V(\phi(D))=\int_{\phi(D)}dZ_1\wedge\dots\wedge dZ_{2s}=\int_D\left(\sum_{i_1=1}^{2s}\frac{\partial Z_1}{\partial z_{i_1}}dz_{i_1}\right)\wedge\dots\wedge\left(\sum_{i_{2s}=1}^{2s}\frac{\partial Z_{2s}}{\partial z_{i_{2s}}}dz_{i_{2s}}\right)=\int_D\sum_{i_1,\dots,i_{2s}=1}^{2s}\frac{\partial Z_1}{\partial z_{i_1}}\cdots\frac{\partial Z_{2s}}{\partial z_{i_{2s}}}dz_{i_1}\wedge\dots\wedge dz_{i_{2s}}=$$

$$=\int_D\sum_{i_1,\dots,i_{2s}=1}^{2s}\frac{\partial Z_1}{\partial z_{i_1}}\cdots\frac{\partial Z_{2s}}{\partial z_{i_{2s}}}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&\dots&2s\\i_1&\dots&i_{2s}\end{pmatrix}dz_1\wedge\dots\wedge dz_{2s}=\int_D\det\left(\frac{\partial\vec{Z}}{\partial\vec{z}}\right)dz_1\wedge\dots\wedge dz_{2s}=\int_D 1\,dz_1\wedge\dots\wedge dz_{2s}=V(D)$$

Pozn. Statistická mechanika—na časový vývoj statistického souboru ve fázovém pr. se lze dívat jako na proudění nestlačitelné kapaliny.



Duální povaha pozorovatelných veličin v Hamiltonově formalizmu

I. Pozorovatelné (veličiny) jsou reálné funkce $G:\Gamma\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ třídy C^1 na rozšířeném fázovém prostoru.
Stav systému je určen bodem ve fázovém prostoru o souřadnicích $(\vec{q},\vec{p})\in\Gamma$.
Výsledek měření pozorovatelné G v čase t na systém ve stavu $(\vec{q}(t),\vec{p}(t))$ dostaneme dosazením $G(\vec{q}(t),\vec{p}(t),t)$.

II. Pozorovatelná G je generátorem jednoparametrické grupy kanonických transformací fázového prostoru.

Pozorovatelná $G\in\Omega^0(\Gamma)$ 1–forma $dG\in\Omega^1(\Gamma)$ Hamiltonovské vektorové pole X_G

$$G:\Gamma\to\mathbb{R} \qquad G=G(\vec{q},\vec{p}) \quad \xmapsto[\text{vnější derivace}]{d} \quad dG=\frac{\partial G}{\partial q_i}\underbrace{dq_i}+\frac{\partial G}{\partial p_i}\underbrace{dp_i} \quad \xmapsto[\text{symplektická forma}]{\omega} \quad X_G=\frac{\partial G}{\partial p_i}\underbrace{\frac{\partial}{\partial q_i}}-\frac{\partial G}{\partial q_i}\underbrace{\frac{\partial}{\partial p_i}}=\{.,G\} \qquad \vec{X}_G=\begin{pmatrix}\frac{\partial G}{\partial p_i}\\ -\frac{\partial G}{\partial q_i}\end{pmatrix}$$

vypočtené v b jsou bází $T^*_b\Gamma$ vypočtené v bodě b jsou bazické vektory $T_b\Gamma$

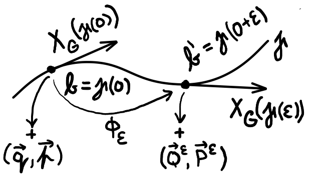
Integrální křivka vektorového pole

$$\gamma:\mathbb{R}\to\Gamma \qquad \gamma'(\varepsilon)=\frac{d\gamma}{d\varepsilon}=X_G(\gamma(\varepsilon)) \qquad \frac{dq_i}{d\varepsilon}=\frac{\partial G}{\partial p_i}$$

$$\gamma=\gamma(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\vec{q}(\varepsilon)\\ \vec{p}(\varepsilon)\end{pmatrix} \qquad \frac{dp_i}{d\varepsilon}=-\frac{\partial G}{\partial q_i}$$

její tečný vektor je v každém bodě shodný s vektorem pole

Difr: Každým bodem oblasti $\Gamma\times\mathbb{R}$ prochází právě jedna charakteristika (neprodloužitelné řešení $\gamma:(a,b)\to\Gamma$
Tedy v každém bodě $\Gamma=\Gamma\times\{0\}$ " začíná právě jedna integrální křivka.



(lokální) tok generovaný polem X_G

$$\phi_\varepsilon:\Gamma\to\Gamma \quad b\in\Gamma \quad b=\gamma(0)\longrightarrow\phi_\varepsilon(b)=\gamma(0+\varepsilon)$$

$$\varepsilon\in(-a,a)\subset\mathbb{R} \qquad \phi_\varepsilon:(\vec{q}(0),\vec{p}(0))\longrightarrow(\vec{q}(\varepsilon),\vec{p}(\varepsilon))$$

Tok je lokální, pokud $\phi:\varepsilon\in(-a,a)\subset\mathbb{R}\to\phi_\varepsilon$ nejde roztáhnout na celé $\mathbb{R}$.

Vlastnosti toku

$\phi_0=Id_\Gamma$ identita

$\phi_\varepsilon\circ\phi_\lambda=\phi_{\varepsilon+\lambda}$

$\phi_\varepsilon^{-1}=\phi_{-\varepsilon}$

Pokud je tok definovaný na celém $\mathbb{R}$ pak představuje jednoparametrickou grupu kanonických transformací.

(aktivní) transformace daná tokem ϕ_ε

$$Q_i^\varepsilon(\vec{q},\vec{p})=q_i(\varepsilon)=\left(\phi_\varepsilon(\vec{q},\vec{p})\right)_i \qquad \forall i\in\hat{s} \qquad \vec{q}(0)=\vec{q}$$

$$P_i^\varepsilon(\vec{q},\vec{p})=p_i(\varepsilon)=\left(\phi_\varepsilon(\vec{q},\vec{p})\right)_{s+i} \qquad \vec{p}(0)=\vec{p}$$

Infinitezimální verze transformace (Taylor v 0 do 1. řádu v ε)

$$Q_i^\varepsilon=q_i(0+\varepsilon)=q_i(0)+\varepsilon\left.\frac{dq_i}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=q_i+\varepsilon\frac{\partial G}{\partial p_i}(\vec{q},\vec{p})$$

$$P_i^\varepsilon=p_i(0+\varepsilon)=p_i(0)+\varepsilon\left.\frac{dp_i}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=p_i-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}(\vec{q},\vec{p})$$

Kanoničnost infinitezimální transformace (podmínka musí platit do 1. řádu v ε)

$$\{Q_i^\varepsilon,P_j^\varepsilon\}=\{q_i,p_j\}+\varepsilon\{\frac{\partial G}{\partial p_i},p_j\}-\varepsilon\{q_i,\frac{\partial G}{\partial q_j}\}-\varepsilon^2\{\frac{\partial G}{\partial p_i},\frac{\partial G}{\partial q_j}\}=\delta_{ij}+\varepsilon\{\{q_i,G\},p_j\}-\varepsilon\{q_i,\{G,p_j\}\}-\sigma(\varepsilon^2)=$$

$$=\delta_{ij}+\varepsilon\left(\{\{q_i,G\},p_j\}+\{\{G,p_j\},q_i\}\right)-\sigma(\varepsilon^2)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Jacobiho id.}}}{=}\delta_{ij}-\varepsilon\{\underbrace{\{p_j,q_i\}}_{-\delta_{ij}},G\}-\sigma(\varepsilon^2)=\delta_{ij}+\underbrace{\{\delta_{ij},G\}}_{0}-\sigma(\varepsilon^2)=\delta_{ij}-\sigma(\varepsilon^2)$$

$$\{Q_i^\varepsilon,Q_j^\varepsilon\}=O(\varepsilon^2)=\{P_i^\varepsilon,P_j^\varepsilon\} \qquad \forall i,j\in\hat{s}$$

Konečnou tr. lze získat složením (integrací) infinitezimálních tr. a neboť složení dvou kanonických tr. je kanonické bude i tato tr. kanonická. Pro infinitezimální tr. existuje i vytvořující fce. $F_2(\vec{q},\vec{P})=q_jP_j+\varepsilon G(\vec{q},\vec{P})$

Př. $G=p_1$ $\quad dG=1\cdot dp_1$ $\quad X_G=1\cdot\frac{\partial}{\partial q_1}$ $\quad \frac{dq_1}{d\varepsilon}=1$ $\quad q_1(\varepsilon)=\int 1\cdot d\varepsilon+C=\varepsilon+q_1(0)$ $\quad Q_1=q_1+\varepsilon$ $\quad P_1=p_1$

$s=2$ $\quad dp_i\leftrightarrow\frac{\partial}{\partial q_i}$ $\quad \vec{X}_G=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad i=1,2$ $\quad Q_2=q_2$ $\quad P_2=p_2$

(q_1,q_2,p_1,p_2) $\quad dq_i\leftrightarrow-\frac{\partial}{\partial p_i}$ $\quad \frac{dq_2}{d\varepsilon}=0$ $\quad q_2(\varepsilon)=q_2(0)$ $\quad \frac{dp_i}{d\varepsilon}=0$ $\quad p_i(\varepsilon)=p_i(0)$

funkce $G=p_1$ je generátorem translace

Teorém Noetherové v Hamiltonově formalizmu

Nechť fce. $F=F(\vec{q},\vec{p})$ a Hamiltonova fce. $H=H(\vec{q},\vec{p})$ nezávisí na čase, pak F je I. P. $\iff \{F,H\}=0$

1) F je generátorem 1–param. grupy tr. $(\vec{q},\vec{p})\to(\vec{Q}^\varepsilon,\vec{P}^\varepsilon)=(\vec{q}(\varepsilon),\vec{p}(\varepsilon))$

$$H(\vec{Q}^\varepsilon,\vec{P}^\varepsilon)=\hat{H}(\vec{q},\vec{p},\varepsilon)=H(\vec{q}(\varepsilon),\vec{p}(\varepsilon))\underset{\substack{\uparrow\\ \text{invariance } H}}{=}H(\vec{q}(0),\vec{p}(0)) \qquad 0=\frac{\partial\hat{H}}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{d\varepsilon}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{d\varepsilon}=\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i}=\{H,F\}$$

2) H je generátorem časového vývoje $(\vec{q},\vec{p})\to(\vec{Q}^t,\vec{P}^t)=(\vec{q}(t),\vec{p}(t))$ $\quad F(\vec{q}(t),\vec{p}(t))=F(\vec{q}(0),\vec{p}(0))$ $\quad 0=\left.\frac{dF}{dt}\right|_{H.R.}=\{F,H\}$

Hamiltonián H je invariantní vůči 1–param. grupě tr. generované funkcí F (tj. H se zachovává podél integrálních křivek vek. pole X_F) $\iff$ F je invariantní vůči 1–param. grupě tr. generované Hamiltoniánem představující časový vývoj (tj. zachovává se podél integrálních křivek vek. pole X_H (fázových trajektorií) a je tedy integrálem pohybu). Tedy i ke každému IP. existuje 1–param. grupa symetrií Hamiltonovy fce.

Nabitá relativistická částice v elektromagnetickém poli

pro volnou částici bez elmag. pole $L = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ kde $v^2 = \sum \dot{x}_j^2$

Taylorův rozvoj

$$-m_0c^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4}-\dots\right) = \overbrace{-m_0c^2}^{\text{konst.}}+\overbrace{\frac{1}{2}m_0v^2}^{T}+\overbrace{\frac{1}{8}m_0\frac{v^4}{c^2}+\dots}^{\text{moc malé}}$$

v elmag. poli $L = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e(\varphi - \vec{v}\cdot\vec{A})$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = -m_0c^2\frac{\frac{-2v_j\delta_{ij}}{c^2}}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\delta_{ij}A_j = \frac{m_0v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + eA_i$$

$$p_i - eA_i = \frac{m_0v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (p_i-eA_i)^2 = \frac{m_0^2v_i^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (\vec{p}-e\vec{A})^2 = \frac{m_0^2c^2v^2}{c^2-v^2} \qquad v^2 = \frac{c^2(\vec{p}-e\vec{A})^2}{(\vec{p}-e\vec{A})^2+m_0^2c^2}$$

$$E = \frac{\partial L}{\partial v_i}v_i - L = \frac{m_0v_i^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + eA_iv_i - \left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e(\varphi-\vec{v}\cdot\vec{A})\right) = \frac{m_0v^2+m_0c^2-m_0v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi$$

$$H = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\frac{c^2(\vec{p}-e\vec{A})^2}{(\vec{p}-e\vec{A})^2+m_0^2c^2}}} + e\varphi = \frac{m_0c^2}{\sqrt{\frac{m_0^2c^2}{(\vec{p}-e\vec{A})^2+m_0^2c^2}}} + e\varphi = c\sqrt{(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{kanonická}\\ \text{hybnost}}}{\vec{p}}-e\vec{A})^2+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{klidová hmotnost}}}{m_0^2}c^2} + e\varphi$$

Věta o viriálu

Střední časová hodnota funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f=f(t)$ $\quad \langle f\rangle = \lim\limits_{\tau\to+\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\,dt$

Věta: Pokud $\exists F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$, F omezená $(\exists K\in\mathbb{R}, |F(t)|\leq K, \forall t)$ pak $\langle f\rangle = \langle\dot{F}\rangle = 0.$

Důkaz: $|\langle f\rangle| = \lim\limits_{\tau\to+\infty}\left|\frac{1}{\tau}(F(\tau)-F(0))\right| \leq \lim\limits_{\tau\to+\infty}\left|\frac{2K}{\tau}\right| = 0$

Věta o viriálu v Hamiltonově formalizmu:

Jsou-li $q_i(t)$ a $p_i(t)$ $\forall i\in\hat{s}$ omezené funkce pak $\left\langle q_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\right\rangle = \left\langle p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\right\rangle$ (pokud existují).

Značení: pro funkci $Z = Z(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m,t)$, $Z:\mathbb{R}^{6m+1}\to\mathbb{R}$ a funkce $\tilde{\vec{x}}_\alpha = \tilde{\vec{x}}_\alpha(t)$ $\forall\alpha\in\hat{N}$

označíme $\tilde{Z} = \tilde{Z}(t) = Z(\tilde{\vec{x}}_1(t),\dots,\tilde{\vec{x}}_m(t),\dot{\tilde{\vec{x}}}_1(t),\dots,\dot{\tilde{\vec{x}}}_m(t),t)$, $\tilde{Z}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ složenou funkci

(1870 Rudolf Clausius) – vztah pro střední časovou hodnotu kinetické energie

Věta o viriálu: Označme $G = \sum\limits_{\alpha=1}^{m}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{x}_\alpha$ a $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha=1}^{m}m_\alpha\vec{v}_\alpha^2$ pak pro libovolné řešení $\tilde{\vec{x}}_\alpha = \tilde{\vec{x}}_\alpha(t)$ Newtonových pohybových rovnic $m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha = \vec{F}_\alpha$ $\forall\alpha\in\hat{N}$ platí $\left\langle\frac{d\tilde{G}}{dt}\right\rangle = 0 \Rightarrow \langle\tilde{T}\rangle = \underbrace{-\frac{1}{2}\left\langle\sum\limits_{\alpha=1}^{N}\tilde{\vec{F}}_\alpha\cdot\tilde{\vec{x}}_\alpha\right\rangle}_{\text{viriál}}$

Důkaz: $2\tilde{T} = \sum\limits_\alpha m_\alpha\dot{\tilde{\vec{x}}}_\alpha^2 = \left(\sum\limits_\alpha m_\alpha\dot{\tilde{\vec{x}}}_\alpha\cdot\tilde{\vec{x}}_\alpha\right)^{\cdot} - \sum\limits_\alpha m_\alpha\ddot{\tilde{\vec{x}}}_\alpha\cdot\tilde{\vec{x}}_\alpha = \dot{\tilde{G}} - \sum\limits_\alpha\tilde{\vec{F}}_\alpha\cdot\tilde{\vec{x}}_\alpha$

Jsou-li navíc síly $\vec{F}_\alpha$ potenciální tj. $\vec{F}_\alpha = -\nabla_\alpha U = -\frac{\partial U}{\partial\vec{x}_\alpha}$ a potenciál $U = U(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N,t)$ je homogenní funkce stupně k v proměnných $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N$ pak $\langle\dot{\tilde{G}}\rangle = 0 \Rightarrow \langle\tilde{T}\rangle = \frac{k}{2}\langle\tilde{U}\rangle$

Důkaz: $\sum\limits_\alpha\tilde{\vec{F}}_\alpha\cdot\tilde{\vec{x}}_\alpha = \sum\limits_{\alpha=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{3}\tilde{F}_{\alpha_i}x_{\alpha_i} = -\sum\limits_{\alpha=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha_i}}x_{\alpha_i} = -kU$

Označíme-li $E = T+U$ pak $\langle\tilde{E}\rangle = \langle\tilde{T}\rangle + \langle\tilde{U}\rangle = \left(1+\frac{k}{2}\right)\langle\tilde{U}\rangle$ a platí $\langle\tilde{U}\rangle = \frac{2}{k+2}\langle\tilde{E}\rangle$

$\langle\tilde{T}\rangle = \frac{k}{k+2}\langle\tilde{E}\rangle$

Je-li navíc $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ pak $\tilde{E} = $konst. je celková energie a $\langle\tilde{E}\rangle = E$